УДК 517.948.34

В. В. Эфендиев (Одес. ун-т)

УСРЕДНЕНИЕ СИСТЕМ С МЕДЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

We justify the averaging method for systems with a delay that are described by both "slow" and"rapid" variables. The results obtained are applied in analyzing a problem of control theory.

Наведено обгрунтування методу усереднення для систем із загаюванням, що описуються як „повільними", так і „швидкими" змінними. Одержані результати застосовано для аналізу однієї задачі теорії керування.

Усреднение систем „медленными" и „быстрыми" переменными рассматривалось во многих работах (см., например, [1 – 7]). В частности, в [1] принцип усреднения был доказан для систем, в которых уравнения для „медленных" переменных содержат постоянное запаздывание. В настоящей работе предложенная в [1] схема усреднения обоснована (см. п. 2) для систем с переменным запаздыванием, содержащимся как в уравнениях для медленных, так и для быстрых переменных. Доказан ряд теорем о близости решений исходных и усредненных уравнений. Полученные результаты применены для анализа одной задачи терминального кусочно-постоянного управления.

В работах [1, 4, 6, 7] исследуются задачи, в которых дифференциальные уравнения содержат малый множитель при правой части:

$$\dot{x} = \varepsilon X(t, x, y), \qquad \dot{y} = Y(t, x, y), \tag{1}$$

$\varepsilon > 0$ — малый параметр: $\varepsilon \ll 1$; $t \in I \equiv [0, \varepsilon^{-1}]$; $x \in G_x \subset R^k$, $y \in G_y \subset R^l$, множества G_x и G_y открыты и ограничены; вектор-функции $X(t, x, y)$, $Y(t, x, y)$ размерности k, l соответственно равномерно ограничены в $G \equiv R_t^1 * * G_x * G_y$, так что независимая переменная t и переменная y являются „быстрыми" в сравнении с медленной переменной x. Например, в задаче реверсирования судового двигателя [3] содержится медленная переменная v (скорость судна) и имеющая скорость порядка $O(1)$ переменная ω (скорость вращения вала двигателя).

При этом если исследуемый динамический процесс устойчив, что характерно для приложений, то на переходном режиме переменная y меняется сравнительно быстро, а в окрестности устойчивого решения скорости изменения x и y „выравниваются" и имеют порядок ε (в [3] ε пропорционально отношению момента инерции вала двигателя к массе судна, так что $\varepsilon \ll 1$), т. е. быстрых переменных нет. Такие задачи рассматриваются ниже (см. также [2, 4, 5]).

1. Введем следующие предположения:

1) следуя принципу усреднения [1, 4, 6, 7], будем полагать, что порождающая система, т. е. система (1) при $\varepsilon = 0$, имеет не выходящее из G_y вместе с ρ-окрестностью решение

$$x = x^0, \quad y = y(t, z^0, 0) \equiv \eta(t, x^0, y^0),$$

где z^0 — состояние системы (1) при $t = 0$, которое считается заданным, и формально $y(t, z^0, 0) = y(t, z^0, \varepsilon)|_{\varepsilon=0}$;

в дальнейшем будем использовать обозначение $z = (x', y')'$, где штрих означает транспонирование, а также полагать $G_z \equiv G_x * G_y$;

2) наряду с (1) введем усредненное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \bar{X}(\bar{x}), \qquad \bar{x}|_{\tau=0} = x^0, \tag{2}$$

где $\tau = \varepsilon t$, $\tau \in [0, 1]$ и предел

$$\bar{X}(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X\bigl(t, x, \eta(t, x, y^0)\bigr)dt \tag{3}$$

предполагается существующим равномерно по $x \in G_x$, $y^0 \in G_y^0 \subset G_y$.

Сравним решение исходной и усредненной задач с учетом предположений 1 и 2.

Теорема 1. *Пусть в области* $G \equiv \{(t, x, y)\colon t \geq 0,\ x \in G_x \subset R^k,\ y \in G_y \subset R^l\}$ *выполнены условия* 1, 2 *и следующие условия*:

3) *функции* $X(t, z)$, $Y(t, z)$ *непрерывны, равномерно ограничены и удовлетворяют условию Липшица по* z *с константой* λ:

$$X(t, z),\ Y(t, z) \in \mathrm{Lip}_z(\lambda, G_z);$$

4) *равномерно по* $x^0 \in G_x^0 \subset G_x$ *решение* $\bar{x} = \bar{x}(\varepsilon t, x^0)$ *задачи* (2) *с* ρ*-окрестностью при* $t \in I$ *лежит в области* G_x.

Тогда для любого $\delta \in (0, \rho)$ *найдется* $\varepsilon^0 > 0$ *такое, что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0)$ *и* $t \in I$ *решение* $z(t, z^0, \varepsilon)$ *задачи* (1) *существует, единственно, не выходит из области* G_z *и выполняется неравенство*

$$\left\| x(t, z^0, \varepsilon) - \bar{x}(\varepsilon t, x^0) \right\| < \delta. \tag{4}$$

Доказательство. Из условия 3 следует, что $\bar{X}(x)$ непрерывна, равномерно ограничена в G_x и $\bar{X}(x) \in \mathrm{Lip}_x(\lambda, G_x)$ [4], т. е. решение задачи (2) существует, единственно и в силу условия 4 при $t \in I$ не выходит из G_x вместе с ρ-окрестностью. В силу условия 3 решение исходной задачи $z(t, z^0, \varepsilon)$ также существует, единственно и принадлежит G_z по крайней мере для $t \in [0, T] \equiv \equiv I_1$, $T \leq \varepsilon^{-1}$. Покажем сначала, что на интервале $t \in I_1$ неравенство (4) выполняется. Используя интегральное представление для решений систем (1) и (2), получаем с учетом оценки (15) [7], что для любого $\bar{\eta} > 0$ найдется $\varepsilon^0 > 0$ такое, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$

$$\left\| x(t, z^0, \varepsilon) - \bar{x}(\varepsilon t, x^0) \right\| \leq \varepsilon\lambda \int_0^t \left\| x(t, z^0, \varepsilon) - \bar{x}(\varepsilon t, x^0) \right\| dt +$$

$$+ \varepsilon \left\| \int_0^t \bigl[X(t, \bar{x}, y) - \bar{X}(\bar{x}) \bigr] dt \right\| \leq \varepsilon\lambda \int_0^t \left\| x(t, z^0, \varepsilon) - \bar{x}(\varepsilon t, x^0) \right\| dt + \frac{3\bar{\eta}}{4}\exp(-\lambda).$$

Применяя здесь лемму Гронуолла – Беллмана, получаем неравенство (4) при $\bar{\eta} = \dfrac{4}{3}\delta$.

Покажем теперь, что $T \geq \varepsilon^{-1}$. Пусть это не так. Выберем $\delta = 0{,}5\rho$. Тогда на отрезке $[T, \varepsilon^{-1}]$ найдется такое $\bar{T}$, что в силу непрерывности решений задач (1) и (2)

$$0{,}5\rho \leq \| x(t, z^0, \varepsilon) - x(\varepsilon t, x^0) \| < \rho. \tag{5}$$

Следовательно, при $t = \bar{T}$ решение $x(t, z^0, \varepsilon)$ задачи (1) остается в ρ-окрестности решения задачи (2), т. е. в области G_x. Но тогда неравенство (4) выполняется, что противоречит неравенству (5), поскольку $\delta = 0,5\rho$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть в области G выполнены условия 1 – 4 и следующее предположение*:

5) *система уравнений*

$$\frac{\partial u(t,x,y)}{\partial t} + \frac{\partial u(t,x,y)}{\partial y} Y(t,x,y) = X(t,x,y) - \overline{X}(x)$$

имеет непрерывное и равномерно ограниченное вместе с производными по t, x, y решение $u(t,x,y)$. Тогда можно указать такие константы $C > 0$, $\varepsilon^0 > 0$, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ на сегменте I решение $z = z(t, z^0, \varepsilon)$ задачи (1) *существует, единственно, лежит в области G_z и выполняется неравенство*

$$\left\| x(t, z^0, \varepsilon) - \overline{x}(\varepsilon t, x^0) \right\| < C\varepsilon. \qquad (6)$$

Доказательство. Здесь и далее через C переобозначаются, когда это возможно, возникающие в оценках константы, не зависящие от ε.

В дополнение к доказательству теоремы 1 рассмотрим при $t \in I$ следующую функцию:

$$\kappa(t, z^0, \varepsilon) = \overline{x}(\varepsilon t, x^0) + \varepsilon u\big(t, \overline{x}(\varepsilon t, x^0), y(t, z^0, \varepsilon)\big).$$

Оценим норму разности $\dot{\kappa}(t, z^0, \varepsilon)$ и $\dot{x}(t, z^0, \varepsilon)$:

$$\|\dot{x} - \dot{\kappa}\| = \left\| \varepsilon X(t,z) - \varepsilon \overline{X}(\overline{x}) - \varepsilon \frac{\partial u(t,\overline{x},y)}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial u(t,\overline{x},y)}{\partial x} \dot{\overline{x}} - \varepsilon \frac{\partial u(t,\overline{x},y)}{\partial y} \dot{y} \right\| \le$$

$$\le \varepsilon \| X(t,z) - X(t,\overline{x},y) \| + \varepsilon \left\| \overline{X}(t,\overline{x},y) - \overline{X}(\overline{x}) - \left[\frac{\partial u(t,\overline{x},y)}{\partial t} + \frac{\partial u(t,\overline{x},y)}{\partial y} Y(t,\overline{x},y) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial u(t,\overline{x},y)}{\partial y} Y(t,\overline{x},y) \right] \right\| + \varepsilon \left\| \frac{\partial u(t,\overline{x},y)}{\partial y} [Y(t,z) - Y(t,\overline{x},y)] \right\| + C\varepsilon^2 \le$$

$$\le \varepsilon\lambda \|x - \overline{x}\| + \varepsilon\lambda \left\| \frac{\partial u(t,\overline{x},y)}{\partial y} \right\| \|\overline{x} - x\| + C\varepsilon^2 \le C\varepsilon \|x - \kappa\| + C\varepsilon^2,$$

откуда $\|x - \kappa\| \le C\varepsilon + C\varepsilon \int_0^t \|x - \kappa\| dt$ для любого $t \in I$.

Воспользовавшись леммой Гронуолла – Беллмана, получим $\|x - \kappa\| \le C\varepsilon$. Поскольку из определения $\kappa(t, z^0, \varepsilon)$ следует $\|\overline{x} - \kappa\| \le C\varepsilon$, то неравенство (6) доказано.

В дальнейшем применим такое условие [4]:

6) предположим, что равномерно относительно $z \in G_z$ существует предел

$$\overline{Y}(z) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_T^0 \left[\frac{\partial \eta(t,z)}{\partial y} \right]^{-1} \frac{\partial \eta(t,z)}{\partial x} X(t, x, \eta(t,z)) dt, \qquad (7)$$

и введем уравнение

$$\frac{d\overline{y}_1}{d\tau} = \overline{Y}(\overline{z}_1), \qquad \overline{y}_1|_{\tau=0} = y^0, \qquad (8)$$

где $\overline{x}_1 \equiv \overline{x}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть в области G выполнены условия* 1 – 3, 6 *и следующее условие:*

7) *решение* $\bar{z} = \bar{z}(t, \varepsilon t, z_0)$ *усредненной системы* (2), (8) *определено для* $t \geq 0$, *не выходит из* G_z *вместе со своей* ρ*-окрестностью и* $\eta(t, z) \in \in \mathrm{Lip}(\lambda, G)$.

Тогда для любого $\delta > 0$ *существует* $\varepsilon_0(\delta) > 0$ *такое, что для* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *и* $t \in I$ *решение задачи* (1) *при* $z|_{t=0} = z^0 \in G_z^0 \subset G_z$ *существует, единственно и выполняется неравенство*

$$\left\| z(t, \varepsilon, z^0) - \bar{z}(t, \varepsilon, z^0) \right\| < \delta, \tag{9}$$

где $\bar{y}(t, \varepsilon, z^0) = \eta\big(t, \bar{x}(\varepsilon t, z^0),\ \bar{y}_1(\varepsilon t, z^0)\big)$.

Доказательство. Введем систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \varepsilon X(t, x_1, \eta(t, z_1)), \qquad z_1|_{t=0} = z^0, \\ \dot{y}_1 &= -\varepsilon \left[\frac{\partial \eta(t, z_1)}{\partial y} \right]^{-1} \frac{\partial \eta(t, z_1)}{\partial x} X(t, x_1, \eta(t, z_1)), \end{aligned} \tag{10}$$

для которой система (2), (8) является усредненной и выполнены все условия теоремы 1.1 [4] об усреднении систем стандартного вида, т. е. и системы (10). Поэтому для любого $\delta_1 > 0$ существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любых $\varepsilon \in \in (0, \varepsilon_0]$ и $t \in I$ решение задачи (10) существует, единственно, не выходит из G_z вместе с некоторой ρ_1-окрестностью и выполняется неравенство

$$\left\| z_1(t, \varepsilon, z^0) - \bar{z}_1(\varepsilon t, z^0) \right\| < \delta_1 .$$

Система (10) получена из (1) заменой переменных $x = x_1$, $y = \eta(t, z_1)$, следовательно,

$$\begin{aligned} \left\| y(t, \varepsilon, z^0) - \bar{y}(t, \varepsilon t, z^0) \right\| &= \left\| \eta\big(t, z_1(t, \varepsilon, z^0)\big) - \eta\big(t, \bar{z}_1(\varepsilon t, z^0)\big) \right\| \leq \\ &\leq \lambda \left[\left\| x_1(t, \varepsilon, z^0) - \bar{x}(\varepsilon t, z^0) \right\| + \left\| y_1(t, \varepsilon, z^0) - \bar{y}_1(\varepsilon t, z^0) \right\| \right] \leq 2\lambda \delta_1 . \end{aligned} \tag{11}$$

Положим $\delta = \max(\delta_1, 2\lambda\delta_1)$. Теорема доказана.

Следствие. *Система* (10) *имеет стандартный вид, для которого известны асимптотические разложения решения произвольного порядка* [4 – 6]. *Так, если при соответствующих требованиях к* (10) [4, 6] *решение* $\bar{z}_1(t, \varepsilon, z^0)$ *таково, что* $\delta_1 = C_1 \varepsilon$, $C_1 = \mathrm{const}$, *то согласно оценке* (11) *в* (9) *будет* $\delta = = C\varepsilon$, *где* $C = \max(C_1, 2\lambda C_1)$.

Далее остановимся на частном случае условия 2, когда конструктивно определяется независимость предела (3) от y^0. Для этого введем следующие условия (см. также [5]):

2′) предположим, что равномерно по $x \in G_x$ существует предел

$$\tilde{X}(x, y_0) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X\big(t, x, \eta(t, x, y^0)\big) dt, \tag{3′}$$

где согласно условию 1 $\eta(t, x, y^0) = y(t, x, y^0, 0)$;

8) порождающая система равномерно по $x \in G_x^0$ имеет асимптотически устойчивое решение $\overline{\eta}(t, x)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть в области* G *выполнены условия* 1, 2′, 3, 4, 8.

Тогда для любого $\delta > 0$ *найдется* $\varepsilon^0 > 0$ *такое, что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ *и*

$t \in I$ решение $z(t, z^0, \varepsilon)$ задачи (1) *существует, единственно, не выходит из области G_z и выполняется неравенство* (9), *где $\bar{y}(t, z^0, \varepsilon)$ — решение задачи*

$$\dot{\bar{y}} = Y\big(t, \bar{x}(\varepsilon t, x^0), \bar{y}\big), \qquad \bar{y}|_{t=0} = y^0,$$

$\bar{x} = \bar{x}(\varepsilon t, x^0)$ — решение задачи (2).

Доказательство. Покажем сначала, что $\overline{X}(x)$, определяющая уравнение (2), существует.

Действительно, в силу условия 8 существует вектор-функция $\rho = \rho(t, x, y^0)$, $x = \mathrm{const}$, такая, что $\|\rho(t, x, y^0)\| \to 0$ при $t \to \infty$ и $\eta(t, x, y^0) = \overline{\eta}(t, x) + \rho(t, x, y^0)$.

Введем обозначения

$$\tilde{X}_T(x, y^0) = \frac{1}{T}\int_0^T X\big(t, x, \eta(t, x, y^0)\big)dt, \qquad \overline{X}_T(x) = \frac{1}{T}\int_0^T X(t, x, \overline{\eta}(t, x))dt.$$

Имеем $\left\|\overline{X}_T(x) - \tilde{X}_T(x, y^0)\right\| \le \dfrac{\lambda}{T}\displaystyle\int_0^T \left\|\rho(t, x, y^0)\right\|dt \equiv q.$

Очевидно, что $\lim\limits_{T\to\infty} q = 0$, так как либо $\displaystyle\int_0^T \left\|\rho(t, x, y^0)\right\|dt$ ограничен, либо нулевое предельное значение получим после применения правила Лопиталя. Следовательно, $\overline{X}(x) = \lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T X(t, x, \overline{\eta}(t, x))dt$, что соответствует (3), т. е. среднее $\overline{X}$ не зависит от y^0 и все условия теоремы 1 выполнены. Поэтому выполняется неравенство (4), причем входящую в него справа константу выберем равной $\bar{\delta} > 0$, $\bar{\delta} = \mathrm{const}$.

Далее, рассмотрим функцию $R(t, \bar{x}, x, y) = Y(t, x, y) - Y(t, \bar{x}, y)$. В силу оценки (4) имеем $\|R(t, \bar{x}, x, y)\| < \delta_1$, где δ — сколь угодно мало, $\delta_1 = \lambda\bar{\delta}$.

Уравнение для y в (1) перепишем в виде

$$\dot{y} = Y(t, \bar{x}, y) + R(t, \bar{x}, x, y). \tag{12}$$

При $R(t, \bar{x}, x, y) \equiv 0$ в силу условия 8 решение уравнения (12) асимптотически устойчиво, причем $\|R(t, \bar{x}, x, y)\| < \delta_1$ и $(y - \bar{y})|_{t=0} = 0$, т. е. для достаточно малых $\delta_1 > 0$ это решение устойчиво при постоянно действующих возмущениях, и для произвольного сколь угодно малого $\delta_2 > 0$ найдется $\delta_3 \in (0, \delta_1)$ такое, что при $\|R(t,\bar{x},x,y)\| < \delta_3$ имеем $\|y - \bar{y}\| < \delta_2$ для $t \in I$. Пусть $\delta = \max(\delta_2, \bar{\delta})$. С учетом (4) получим оценку (9). Теорема доказана.

Заменив условие 8 более жестким предположением и дополнив условие 3, уточним оценку (9).

Теорема 5. *Пусть в области G выполнены условия* 1, 2′, 4 *и следующие предположения*:

3′) *выполнено условие* 3, *причем функции $X(t, x, y)$, $Y(t, x, y)$ имеют непрерывные и равномерно ограниченные частные производные первого порядка по x, y*;

8′) *порождающая система равномерно по $x \in G_x$ имеет экспоненциально устойчивое решение $\overline{\eta}(t, x)$.*

Тогда можно указать такие $C > 0$ и $\varepsilon^0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ и $t \in I$ решение задачи (1) *существует, единственно, лежит в области G_z и выполняется неравенство*

$$\left\| z(t, \varepsilon, z^0) - \bar{z}(t, \varepsilon, z^0) \right\| < C\varepsilon, \tag{13}$$

где $\bar{x} = \bar{x}(\varepsilon t, x^0)$ — *решение задачи* (3), $\bar{y} = \bar{y}(t, \varepsilon, z^0) = y\big(t, \bar{x}(\varepsilon t, x^0), y^0, 0\big)$, $z = (x', y')'$.

Доказательство. Поскольку все условия теоремы 4 выполнены, то решение задачи (1) существует, единственно и выполнено неравенство (9).

Для любых фиксированных $\varepsilon > 0$, $z^0 \in G_z^0$ введем обозначения: $u(t) = x(t, \varepsilon, z^0) - \bar{x}(\varepsilon t, x^0)$, $v(t) = y(t, \varepsilon, z^0) - \bar{y}(t, \varepsilon, z^0)$, так что оценки (9) относятся к $u(t)$, $v(t)$.

Линеаризуя систему (1), получаем

$$\dot{u} = \varepsilon X_x^* u + \varepsilon X_y^* v + \varepsilon\big[X(t, \bar{z}) - \bar{X}(\bar{x})\big],$$

$$\dot{v} = Y_y^* v + Y_x^* u - \varepsilon \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \bar{X}(\bar{x}),$$

где в обозначениях $X_x^*, \ldots$ индекс внизу означает соответствующую частную производную, а звездочка — что вычисления выполняются в промежуточной точке между z и $\bar{z}$.

Заменим эти уравнения эквивалентными интегральными уравнениями

$$u(t) = \varepsilon \int_0^t S_x(t, \rho, \varepsilon)\big\{X_y^* v(\rho) + \bar{X}(\rho, \bar{z}) - \bar{X}(\bar{x})\big\} d\rho, \tag{14}$$

$$v(t) = \int_0^t S_y(t, \rho, \varepsilon)\left\{Y_x^* u(\rho) - \varepsilon \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \bar{X}(\bar{x})\right\} d\rho, \tag{15}$$

где S_x, S_y — фундаментальные матрицы однородных систем: $\dot{S}_x = \varepsilon X_x^* S_x$, $\dot{S}_y = Y_y^* S_y$.

Подставляя теперь в уравнение (14) выражение для $v(t)$ из (15), получаем

$$u(t) = \varepsilon \int_0^t S_x(t, \rho, \varepsilon) X_y^* \int_0^\rho S_y(\rho, q, \varepsilon) Y_x^* u(q)\, dq\, d\rho + R(t, \varepsilon). \tag{16}$$

Учитывая, что $\| S_x \| < C$ и в силу условия 8′ $\|S_y(t, \rho, \varepsilon)\| < \mu \exp[-\lambda(t - \rho)]$, для $R(t, \varepsilon)$ имеем $\| R(t, \varepsilon) \| < C_1 \varepsilon$ [5].

Преобразуем (16) по формуле Дирихле:

$$u(t) = \varepsilon \int_0^t \left[\int_q^t S_x(t, \rho, \varepsilon) X_y^* S_y(\rho, q, \varepsilon)\right] Y_x^* u(q)\, dq + R(t, \varepsilon),$$

откуда $\| u(t) \| \le \varepsilon C_2 \int_0^t \|u(q)\| dq + \varepsilon C_1 < \varepsilon C$.

Учитывая эту оценку, из (15) получаем $\| v(t) \| < \varepsilon C$. Теорема доказана.

2. Далее будем рассматривать соответствующие уравнения (1) системы с переменным запаздыванием. Пусть $z(t, \varepsilon) = (x(t, \varepsilon)', y(t, \varepsilon)')'$.

Рассмотрим две задачи: первая содержит запаздывание только в уравнении для медленной переменной x:

$$\dot{x} = \varepsilon X_1\big(t, z(t, \varepsilon), x(t - \rho(t), \varepsilon)\big), \qquad \dot{y} = Y_1\big(t, z(t, \varepsilon)\big), \tag{17}$$

при асимптотическом решении которой применим теоремы 1 – 3, а вторая имеет более общий вид

$$\dot{x} = \varepsilon X_2(t, z(t,\varepsilon), z(t-\rho(t),\varepsilon)), \qquad \dot{y} = Y_2(t, z(t,\varepsilon), z(t-\rho(t),\varepsilon)), \tag{18}$$

решение которой построим с применением теорем 4 и 5.

Задачи (17), (18) дополняются условием

$$z(t,\varepsilon)|_{t\in[-\Delta,0]} = \theta(t). \tag{19}$$

Здесь $\Delta = \mathrm{const}$; $\rho(t), \theta(t)$ — $(k+l)$-мерные функции; $z(t-\rho(t),\varepsilon) = \{z_i(t-\rho_i(t),\varepsilon),\ i = 1,\ldots,k+l\}$, т. е. компонента i вектора z имеет обычное для приложений запаздывание $\rho_i(t)$, причем $0 < \rho_i(t) \le \Delta$. Очевидно, для (17) достаточно последние l компонент функции $\theta(t)$ определить только для $t = 0$.

Наряду с системой (17) рассмотрим систему дифференциальных уравнений без запаздывания, которую получим из (17) при $\rho(t) \equiv 0$ для всех $t \in I$:

$$\dot{x}_1 = \varepsilon X_1(t, z_1(t,\varepsilon), x_1(t,\varepsilon)), \qquad \dot{y}_1 = Y_1(t, z_1(t,\varepsilon)), \tag{20}$$

$$z_1(0,\varepsilon) = \theta(0), \tag{21}$$

где $z_1(t,\varepsilon) = (x_1(t,\varepsilon)', y_1(t,\varepsilon)')'$.

Как и для систем стандартного вида [6, с. 40], докажем лемму о близости решений задач (17), (19) и (20), (21).

Лемма 1. *Пусть в области G функции $X(t,z_1) \equiv X_1(t,z_1,x_1)$, $Y(t,z_1) \equiv \equiv Y_1(t,z_1)$ удовлетворяют условиям 1 – 4 и функция $\theta(t)$ непрерывна на отрезке $t \in [-\Delta, 0]$.*

Тогда для любого $\delta > 0$ можно указать такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ на отрезке $t \in I$ решение $z(t,\varepsilon)$ системы (17), (19) существует, единственно и будет выполняться неравенство

$$\|x(t,\varepsilon) - x_1(t,\varepsilon)\| < \delta. \tag{22}$$

Если в дополнение к условиям 1 – 4 выполнено также условие 6, то

$$\|y(t,\varepsilon) - y_1(t,\varepsilon)\| < \delta. \tag{23}$$

Доказательство. Существование и единственность решения $z(t,\varepsilon)$ в области I^* следует из условия 2 при построении $z(t,\varepsilon)$ методом шагов с шагом Δ и теоремы Коши.

Докажем сначала неравенство (22). Согласно (3), (4), усредненная для уравнений (17) система имеет вид

$$\dot{\bar{x}} = \varepsilon \overline{X}_1(\bar{x}(t,\varepsilon), \bar{x}(t-\rho(t),\varepsilon)), \qquad \bar{x}|_{t\in[-\Delta,0]} = \theta(t).$$

Усредненная для уравнений (20) система такова:

$$\dot{\bar{x}}_1 = \varepsilon \overline{X}_1(\bar{x}_1(t,\varepsilon), \bar{x}_1(t,\varepsilon)), \qquad \bar{x}_1(0) = \theta(0). \tag{24}$$

Поскольку для $x(t,\varepsilon)$, $\bar{x}(t,\varepsilon)$ и для $x_1(t,\varepsilon)$, $\bar{x}_1(t,\varepsilon)$ имеют место оценки (4), то для выполнения неравенства (22) достаточно оценить разность $\bar{x}(t,\varepsilon)$ и $\bar{x}_1(t,\varepsilon)$. Пусть $P = \max\limits_{t\in[-\Delta,0]} \|\theta(t) - \bar{x}_1(t,\varepsilon)\|$, M — константа, ограничивающая X, Y согласно условию 3.

Для любого $t \in (0, \varepsilon^{-1}]$ имеем

$$\|\bar{x}(t,\varepsilon) - \bar{x}_1(t,\varepsilon)\| \le \varepsilon\lambda \int_0^t (\|\bar{x}(\tau,\varepsilon) - \bar{x}_1(\tau,\varepsilon)\| + \|\bar{x}(\tau-\rho(\tau),\varepsilon) - \bar{x}_1(\tau,\varepsilon)\| d\tau \le$$

$$\leq \varepsilon\lambda\int_0^t \|\bar{x}(\tau,\varepsilon)-\bar{x}_1(\tau,\varepsilon)\|d\tau + \varepsilon\lambda\int_0^\Delta \|\bar{x}(\tau-\rho(\tau),\varepsilon)-\bar{x}_1(\tau,\varepsilon)\|ds +$$

$$+\ \varepsilon\lambda\int_\Delta^t \|\bar{x}(\tau-\rho(\tau),\varepsilon)-\bar{x}(\tau,\varepsilon)+\bar{x}(\tau,\varepsilon)-\bar{x}_1(\tau,\varepsilon)\|d\tau.$$

Поскольку

$$\|\bar{x}(\tau,\varepsilon)-\bar{x}(\tau-\rho(\tau),\varepsilon)\| \leq \varepsilon\int_0^\Delta \|\bar{X}_1(\bar{x}(t,\varepsilon)),\bar{x}(t-\rho(t),\varepsilon)\| \leq \varepsilon M\Delta,$$

$$\int_\Delta^t \|\bar{x}(\tau,\varepsilon)-\bar{x}(\tau-\rho(\tau),\varepsilon)\|d\tau \leq \int_\Delta^t \varepsilon M\Delta d\tau < M\Delta,$$

то

$$\|\bar{x}(t,\varepsilon)-\bar{x}_1(t,\varepsilon)\| \leq \varepsilon\lambda P\Delta+\varepsilon\lambda M\Delta+2\varepsilon\lambda\int_0^t \|\bar{x}(\tau,\varepsilon)-\bar{x}_1(\tau,\varepsilon)\|d\tau.$$

Следовательно, согласно лемме Гронуолла – Беллмана

$$\|\bar{x}(t,\varepsilon)-\bar{x}_1(t,\varepsilon)\| < C\varepsilon,$$

где $C=(\lambda P\Delta+\lambda M\Delta)\exp(2\lambda)$, что доказывает неравенство (22), причем если в дополнение к условиям леммы выполнено условие 5, то в силу (6) найдется $C =$ $=\mathrm{const}$ такое, что в (22) $\delta = C\varepsilon$.

Так как система (2), (8) будет усредненной и для уравнений (17) и (20), то оценка (23) является следствием неравенства (9). Лемма доказана.

На основании леммы 1 можно утверждать, что доказана следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть функция* $\theta(t)$ *в условии* (19) *непрерывна на отрезке* $t\in$ $\in[-\Delta,0]$ *и в области* G *относительно задач* (17), (19) *и* (24) *выполнены все условия теоремы* 1. *Тогда решение задачи* (17), (19) *существует, единственно и для любого* $\delta>0$ *найдется* $\varepsilon^0>0$ *такое, что для* $\varepsilon\in(0,\varepsilon^0]$ *и* $t\in I$ *выполняется неравенство*

$$\|x(t,\varepsilon)-\bar{x}_1(t\varepsilon)\| < \delta. \tag{25}$$

Если для задач (17), (19) *и* (24) *выполнены все условия теоремы* 2, *то также можно указать константу* $C>0$ *такую, что*

$$\|x(t,\varepsilon)-\bar{x}_1(t\varepsilon)\| < C\varepsilon. \tag{26}$$

Если же для задач (17), (19) *и* (24), (8) *выполнены все условия теоремы* 3, *то оценка типа* (25) *выполняется также и для переменных* $y(t,\varepsilon)$ *и* $\bar{y}_1(t,\varepsilon)$:

$$\|z(t,\varepsilon)-\bar{z}_1(t\varepsilon)\| < \delta. \tag{27}$$

Оценку (27) можно преобразовать к виду (9).

Замечание. Задача (17) по аналогии с [1] допускает такое обобщение:

$$\dot{x} = \varepsilon X_1(t,z(t,\varepsilon),z(t-p(t),\varepsilon)), \qquad \dot{y} = Y_1(t,z(t,\varepsilon)), \tag{28}$$

где, как и выше, $z=(x',y')'$.

Проводя рассуждения, аналогичные доказательству леммы 1, получаем, что для решений задач (28), (19) и (20), (21) также выполняется оценка (22), следовательно, и оценки (25) – (27).

Предположим далее, что для задачи (20), (21) выполнено предположение 8 (или 8$'$), тогда конструктивно определяется независимость предела (3) от y^0.

Обобщим лемму и теорему 6 на задачи (18), (19). Положим в (17) $p(t)\equiv 0$:

$$\dot{x}_2 = \varepsilon X_2(t, z_2(t,\varepsilon), z_2(t,\varepsilon)), \qquad \dot{y}_2 = Y_2(t, z_2(t,\varepsilon), z_2(t,\varepsilon)), \tag{29}$$

$$z_2(0,\varepsilon) = \theta(0), \tag{30}$$

где $z_2(t,\varepsilon) = (x_2(t,\varepsilon)', y_2(t,\varepsilon)')'$.

Лемма 2. *Пусть в области G функции $Z(t, z_2) = Z_2(t, z_2, z_2)$ удовлетворяют условиям* 1, 2′, 4, *а также* 3 *и* 8 (*или* 3′ *и* 8′) *и функция $\theta(t)$ непрерывна на отрезке $t \in [-\Delta, 0]$.*

Тогда для любого $\delta > 0$ можно указать такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ на отрезке $t \in I$ решение $z(t,\varepsilon)$ системы (18), (19) *существует, единственно и выполняется неравенство*

$$\| z(t,\varepsilon) - z_2(t,\varepsilon) \| < \delta \tag{31}$$

(*или найдется константа $C > 0$ такая, что*

$$\| z(t,\varepsilon) - z_2(t,\varepsilon) \| < C\varepsilon). \tag{32}$$

Доказательство. Для $x(t,\varepsilon)$ и $x_2(t,\varepsilon)$ обоснование неравенства (31) совпадает с обоснованием неравенства (22) для задачи (28).

Для $y(t,\varepsilon)$ и $y_2(t,\varepsilon)$ (31) следует из (22), асимптотической устойчивости $y(t,\varepsilon)$ и равенства $y(0,\varepsilon) = y_2(0,\varepsilon)$. Оценка (32) получается аналогично (31) с учетом неравенства (13).

Теорема 7. *Пусть функция $\theta(t)$ в условии* (19) *непрерывна на отрезке $t \in [-\Delta, 0]$ и в области G для задачи* (18), (19) *выполнены все условия теоремы* 4. *Тогда решение задачи* (18), (19) *существует, единственно и для любого $\delta > 0$ найдется $\varepsilon^0 > 0$ такое, что для $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ и $t \in I$ выполняется неравенство*

$$\| z(t,\varepsilon) - \bar{z}_2(t,\varepsilon) \| < \delta. \tag{33}$$

Если для задачи (18), (19) *выполнены все условия теоремы* 5, *то также можно указать $C = \text{const}$ такую, что*

$$\| z(t,\varepsilon) - \bar{z}_2(t,\varepsilon) \| < C\varepsilon, \tag{34}$$

где $z_2(t,\varepsilon)$ соответствует $\bar{z}_2(t,\varepsilon,z^0)$ в (9) *и* (13).

Доказательство следует из того, что для задач (18), (19) и (29), (30) справедлива лемма 2, а их усредненные задачи совпадают.

3. Применим изложенные выше результаты к терминальной задаче оптимального управления.

Исходя из систем (17), (19) или (18), (19), полагаем, что объект управления описывается уравнениями

$$\dot{x} = \varepsilon X_1(t, z, x(t - p(t), \varepsilon, u), u), \qquad \dot{y} = Y_1(t, z, u), \tag{35}$$

или уравнениями

$$\dot{x} = \varepsilon X_2(t, z, z(t - p(t), \varepsilon, u), u), \qquad \dot{y} = Y_1(t, z, z(t - p(t), \varepsilon, u), u). \tag{36}$$

Задачи (35) и (36) дополняются начальным условием

$$z(t,\varepsilon,u)\big|_{t\in[-\Delta,0]} = \theta(t). \tag{37}$$

Требуется найти кусочно-постоянное управление $u \in V$ с конечным числом переключений, минимизирующее функционал

$$I_1(u) = \Phi_1(x(T,\varepsilon,u)) \to \min_{u\in V} \tag{38}$$

или функционал

$$I(u) = \Phi(z(T, \varepsilon, u)) \to \min_{u \in V}. \tag{39}$$

Здесь $T = L \cdot \varepsilon^{-1}$, L — сколь угодно большая положительная постоянная, z строго выпукла по u для любых $(t, z) \in I \times G_x \times G_y$, $I \equiv [0, T]$, $u \in V$ — r-мерный вектор управления, V — компактное множество, $\Phi_1(x) \in C_x^2(G_x)$, $\Phi_1(z) \in \in C_z^2(G_z)$. Как и для (17), для (35) достаточно последние l компонент функции $\theta(t)$ определить только для $t = 0$. В силу замечания к теореме 6 в (17) возможна зависимость X_1 от $y(t - p(t), \varepsilon, u)$.

Пусть равномерно по $u \in V$ для задачи (35), (37) ((36), (37)) выполнены все условия теоремы 6 (все условия теоремы 7). Допустимому управлению $u \in V$ соответствует кусочно-гладкое решение задачи (35), (37) ((36), (37)). Ему соответствует решение $\bar{z}_1(\varepsilon t, u)$ (решение $\bar{z}_2(t, \varepsilon, u)$) усредненной задачи. Для этого решения согласно теореме 6 выполняется неравенство (25), или (26), или (27) (неравенство (33), или (34) согласно теореме 7).

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$\bar{I}_1(\bar{u}) = \Phi_1(\bar{x}_1(L, \bar{u})) \to \min_{\bar{u} \in V}, \tag{40}$$

или функционала

$$\bar{I}(\bar{u}) = \Phi(\bar{z}_1(L, \bar{u})) \to \min_{\bar{u} \in V}, \tag{41}$$

или функционала

$$\bar{I}(\bar{u}) = \Phi(\bar{z}_2(T, \varepsilon, \bar{u})) \to \min_{\bar{u} \in V}, \tag{42}$$

где $\bar{u}$ также кусочно-постоянная функция с конечным числом переключений.

Для каждой из задач управления, соответствующих неравенствам (25), (26), (33) и (34), справедлива теорема об асимптотической близости оптимальных значений функционалов, определенных на исходной (функционалы (38) и (39)) и на усредненной траекториях (функционалы (40) – (42)).

Правые части неравенств относительно асимптотической близости оптимальных значений функционалов такие же, как и у неравенств (25), (26), (33) и (34). Рассмотрим случай, когда выполнены условия теоремы 7, включающие все условия теоремы 5. Тогда справедливо неравенство (34) (остальные случаи обосновываются аналогично).

Теорема 8. *Пусть* u^*, $\bar{u}^*$ *— решения задачи минимизации функционалов* (39), (42) *и для системы* (36), (37) *равномерно по* $u \in V$ *выполнены условия теоремы* 7, *включающие условия теоремы* 5, *так что найдется* $C = \text{const}$ *такая, что имеет место неравенство* (34). *При сделанных предположениях выполняются неравенства*

$$\left| I(u^*) - \bar{I}(\bar{u}^*) \right| < C\varepsilon, \tag{43}$$

$$I(\bar{u}^*) - I(u^*) < C\varepsilon. \tag{44}$$

Доказательство. Обозначим решение исходной задачи (36), (37), (39) через u^*, I^*, z^* и решение ее усредненной задачи с функционалом (42) через $\bar{u}^*, \bar{I}^*, \bar{z}^*$.

В силу оптимальности u^* для исходной задачи имеем

$$I_1 \equiv I(\bar{u}^*) > I^*. \tag{45}$$

Обозначим решение задачи (42), (43) при $u = \bar{u}^*$ через z^1. В силу теоремы 7 и неравенства (40) для достаточно малых ε при $t = L\varepsilon^{-1}$

$$\|z^1 - \bar{z}^*\| < C\varepsilon,$$

откуда в силу свойств $\Phi(z)$

$$|I_1 - \bar{I}^*| < C\varepsilon. \qquad (46)$$

Далее, в силу оптимальности $\bar{u}^*$ для усредненной задачи при $\bar{I}_1 = \bar{I}(u^*)$ имеем

$$\bar{I}_1 > \bar{I}^*. \qquad (47)$$

Обозначим решение усредненной задачи при $\bar{u} = u^*$ через $\bar{z}^1$. В силу теоремы 7 и неравенства (34) для достаточно малых ε при $t = L\varepsilon^{-1}$

$$\|\bar{z}^1 - z^*\| < C\varepsilon,$$

откуда в силу свойств $\Phi(z)$ получаем

$$|\bar{I}_1 - I^*| < C\varepsilon. \qquad (48)$$

Возможны два случая:

1. Если $I^* < \bar{I}^*$, то из (47) имеем

$$\bar{I}_1 > \bar{I}^* > I^*,$$

откуда следует неравенство (43) в силу неравенства (48), а неравенство (44) вытекает из неравенств (43) и (46).

2. Пусть теперь $I^* \geq \bar{I}^*$. Из (45) имеем

$$I_1 > I^* \geq \bar{I}^*, \qquad (49)$$

так что (43) следует из (46), а (44) — из (49) и (46). Теорема доказана.

Таким образом, решение усредненной задачи определит значение функционала, асимптотически близкое к значению функционала (39) для исходной задачи (36), (37) на допустимых управлениях.

1. *Волосов В. М., Медведев Г. И., Моргунов Б. И.* О применении метода усреднения к некоторым системам дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Вестн. Моск. ун-та. Физика, астрономия. – 1968. – № 2. – С. 251–294.
2. *Желтиков В. П., Эфендиев В. В.* Погранслойное усреднение систем стандартного вида с запаздыванием // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 10. – С. 1362–1369.
3. *Небеснов В. И., Цымбал Б. И., Эфендиев В. В.* К динамике реверсирования судового дизельного привода // Машиноведение. – 1969. – № 5. – С. 3–9.
4. *Плотников В. А.* Метод усреднения в задачах управления. – Киев; Одесса: Лыбидь, 1992. – 188 с.
5. *Плотников В. А., Эфендиев В. В.* Асимптотическое решение уравнений с медленными и быстрыми переменными. – Одесса, 1982. – 28 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 1560-82.
6. *Филатов А. Н.* Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. – Ташкент: Фан, 1974. – 216 с.
7. *Хапаев М. М., Филатов О. П.* О принципе усреднения для систем с „быстрыми" и „медленными" переменными // Дифференц. уравнения. – 1983. – **19**, № 9. – С. 1640–1643.

Получено 11.03.99,
после доработки — 20.12.2001