УДК 513.88

О. Г. Сторож, О. Б. Шувар (Львів. нац. ун-т)

ПРО ОДИН КЛАС МАЙЖЕ ОБМЕЖЕНИХ ЗБУРЕНЬ ГЛАДКИХ ЗВУЖЕНЬ ЗАМКНЕНОГО ОПЕРАТОРА

We investigate a class of perturbations of a closed densely defined operator in the Hilbert space. These perturbations change the domain of definition of the operator. We prove that a perturbed operator S is closed and densely defined. We construct an adjoint operator S^*.

Досліджується один клас збурень замкненого щільно визначеного оператора в гільбертовому просторі. Ці збурення змінюють область визначення оператора. Доведено, що збурений оператор S є замкненим та щільно визначеним. Побудовано спряжений оператор S^*.

У даній статті розглядається один клас збурень замкненого щільно визначеного оператора в гільбертовому просторі, які змінюють не тільки закон дії оператора, а і його область визначення. Такі збурення досліджувалися багатьма авторами (див. [1, 2] і цитовану там літературу). Введемо позначення, які будемо використовувати в роботі:

$(\cdot|\cdot)_X$ і $\|\cdot\|_X$ — скалярний добуток і норма в гільбертовому просторі X; $\mathbf{1}_X$ — тотожне перетворення цього простору;

$D(T)$, $R(T)$, $\ker T$ — відповідно область визначення, область значень та многовид нулів оператора T;

$\boldsymbol{B}(X, Y)$ — сукупність лінійних неперервних операторів $T: X \to Y$, де X, Y — гільбертові простори, таких, що $D(T) = X$, $\boldsymbol{B}(X) \overset{\text{df}}{=} \boldsymbol{B}(X, X)$;

$\boldsymbol{C}(X)$ — клас замкнених лінійних щільно визначених операторів $T: X \to X$;

$T|E$ та TE — звуження оператора T на множину E та образ множини E при відображенні T;

$(\cdot|\cdot)_T$ і $\|\cdot\|_T$ — скалярний добуток і норма графіка оператора $T: X \to Y$, тобто

$$\forall x, y \in D(T) \quad (x|y)_T \overset{\text{df}}{=} (x|y)_X + (Tx|Ty)_Y, \quad \|x\|_T \overset{\text{df}}{=} \sqrt{(x|x)^{1/2}};$$

$D[T]$ — передгільбертів простір, що збігається як множина з $D(T)$ і наділений скалярним добутком $(\cdot|\cdot)_T$;

T^* — гільбертів, спряжений з оператором T;

$\oplus$, $\ominus$ — символи ортогональної суми та ортогонального доповнення, зокрема $\oplus_T$, $\ominus_T$ — відповідні символи в $D[T]$;

якщо $A_i: X \to Y_i$, $i = 1, \ldots, n$, — лінійні оператори, то запис $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ означає, що $\forall x \in X$ $Ax = (A_1 x, \ldots, A_n x)$.

За вихідний об'єкт приймемо пару операторів L, $L_0 \in \boldsymbol{C}(H)$, де H — фіксований комплексний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot|\cdot) \overset{\text{df}}{=} (\cdot|\cdot)_H$ і з нормою $\|\cdot\| \overset{\text{df}}{=} \|\cdot\|_H$, таких, що $L_0 \subset L$. У випадку, коли $\dim [D(L)/D(L_0)] < \infty$, розглядувані нами збурення споріднені в розумінні [3] з парою (L, L_0). Ми від цього припущення відмовляємось і, використовуючи поряд з методами теорії розширень елементи теорії збурень, викладеної, наприклад, в [4], доводимо замкненість та щільну визначеність досліджуваних операторів, а також встановлюємо умови їхньої взаємної спряженості.

1. Покладемо $M \overset{\text{df}}{=} L_0^*$, $M_0 \overset{\text{df}}{=} L^*$. Якщо D — один із просторів $D[L]$ або

$D[M]$, G — довільний гільбертів простір, а $W \in \boldsymbol{B}(D, G)$, то під $W' \in \boldsymbol{B}(G, D)$ розуміємо спряжений оператор, тобто $\forall y \in D$, $\forall g \in G$ $(Wy|g)_G = (y|W'g)_D$. Далі припустимо, що $(G_1 \oplus G_2, U_1 \oplus U_2)$ є крайовою парою для (L, L_0), а $(G_2 \oplus G_1, \tilde{U}_1 \oplus \tilde{U}_2)$ — крайовою парою для (M, M_0) (див. [2], означення 4.1.1), причому

$$\forall y \in D(L),\ \forall z \in D(M) \quad (Ly|z) - (y|Mz) = \left(U_1 y | \tilde{U}_2 z\right)_{G_1} - \left(U_2 y | \tilde{U}_1 z\right)_{G_2}. \quad (1)$$

Далі скрізь припускаємо, що L-грань оператора $U \overset{\text{df}}{=} U_1 \oplus U_2$ і M-грань оператора $\tilde{U} \overset{\text{df}}{=} \tilde{U}_1 \oplus \tilde{U}_2$ дорівнюють нулю, тобто

$$(\forall b > 0)(\exists a > 0)(\forall y \in D(L)) \quad \| Uy \|_G \le a\| y \| + b \| Ly \|, \quad (2)$$

$$(\forall \tilde{b} > 0)(\exists \tilde{a} > 0)(\forall z \in D(M)) \quad \left\| \tilde{U}z \right\|_{\tilde{G}} \le \tilde{a} \| z \| + \tilde{b} \| Mz \|. \quad (3)$$

Нехай $\Phi_i \in \boldsymbol{B}(H, G_i)$, $i = 1, 2$. Визначимо оператори S та T за допомогою співвідношень

$$D(S) = \{ y \in D(L) : U_1 y = \Phi_1 y \}, \quad (4)$$

$$\forall y \in D(S) \quad Sy = Ly + \Phi_2^* U_2 y, \quad (5)$$

$$D(T) = \{ z \in D(M) : \tilde{U}_1 z = \Phi_2 y \}, \quad (6)$$

$$\forall z \in D(T) \quad Tz = Mz + \Phi_1^* \tilde{U}_2 z. \quad (7)$$

Оператори S та T трактуються в роботі як збурення операторів L_1 та M_1, визначених таким чином:

$$D(L_1) = \{ y \in D(L) : U_1 y = 0 \}, \quad \forall y \in D(L_1) \quad L_1 y = Ly, \quad (8)$$

$$D(M_1) = \{ z \in D(M) : \tilde{U}_1 z = 0 \}, \quad \forall z \in D(M_1) \quad M_1 z = Mz. \quad (9)$$

Але ці збурення змінюють не тільки закон дії оператора, а й область його визначення. У випадку диференціальних операторів це означає збурення, що зачіпає також крайові умови, якими описується область визначення оператора.

2. У цьому пункті буде показано, що якщо виконуються умови (2), (3), то оператори S та T є майже обмеженими збуреннями гладких звужень операторів L та M відповідно в розумінні означень 4.4.3 та 4.4.4 з [2], тобто $S, T \in \boldsymbol{C}(H)$, $S^* = T$.

Лема 1. *Якщо виконується умова* (2), *то норми графіків операторів* L *та* $L + \Phi_2^* U_2$ *еквівалентні на* $D(L)$.

Доведення. З (2) випливає, що L-грань оператора $\Phi_2^* U_2$ дорівнює нулю. Оскільки $L \in \boldsymbol{C}(H)$, то й $L + \Phi_2^* U_2 \in \boldsymbol{C}(H)$ [4, с. 241], отже, $D(L)$ — банахів простір (не тільки відносно норми графіка оператора L, але й відносно норми графіка цього оператора). Крім цього, оскільки $U_2 \in \boldsymbol{B}(D[L], G_2)$, то норма $\| \cdot \|_L$ мажорує норму $\| \cdot \|_{L + \Phi_2^* U_2}$. Звідси і з теореми Банаха про обернений оператор випливає справедливість леми.

Зауваження 1. Аналогічно доводиться, що з (3) випливає еквівалентність норм графіків операторів M та $M + \Phi_1^* \tilde{U}_2$.

Теорема 1. *Якщо виконується умова* (2), *то*

$$R(\tilde{U}_1 - \Phi_2) = G_2, \tag{10}$$

а якщо виконується умова (3), *то*

$$R(U_1 - \Phi_1) = G_1. \tag{11}$$

Доведення. Покажемо спочатку, що

$$\overline{R(U_1 - \Phi_1)} = G_1. \tag{12}$$

Дійсно, нехай $h \in G_1$ і $\forall y \in D(L)$ $(U_1 y - \Phi_1 y | h)_{G_1} = 0$. Тоді для будь-якого $y \in D(L_0)$, а отже, і для будь-якого $y \in D(L)$ $(\Phi_1 y | h)_{G_1} = 0$. Таким чином, $\forall y \in D(L)$ $(U_1 y | h)_{G_1} = 0$, а отже, $h = 0$. З (12) випливає, що (11) буде доведено, якщо ми переконаємося в нормальній розв'язності оператора $U_1 - \Phi_1$ або, що еквівалентно, в нормальній розв'язності оператора $U_1' - \Phi_1'$ [4, с. 295]. У свою чергу, нормальна розв'язність цього оператора випливає з його обмеженості знизу. Доведемо, що $U_1' - \Phi_1'$ є обмеженим знизу, міркуючи від супротивного.

Нехай $h_n \in G_1$, $\|h_n\|_{G_1} = 1$ $(n \in N)$, але $\lim\limits_{n \to \infty} (U_1' - \Phi_1') h_n = 0$ (за нормою $\| \cdot \|_L$). Тоді

$$\lim_{n \to \infty} (U_1' - \Phi_1') h_n = 0, \qquad \lim_{n \to \infty} z_n = 0 \tag{13}$$

(за нормою $\| \cdot \|_H$), де

$$z_n = L U_1' h_n - L \Phi_1' h_n. \tag{14}$$

Далі, для будь-яких $y \in D(L)$, $h \in G_1$

$$\left(y | \Phi_1^* h\right) = (\Phi_1 y | h)_{G_1} = \left(y | \Phi_1' h\right) + \left(Ly | L\Phi_1' h\right),$$

а отже,

$$L\Phi_1' h \in D(M_0), \qquad \Phi_1^* h = \Phi_1' h + M_0 L \Phi_1' h. \tag{15}$$

Покладемо

$$\forall (h_1, h_2) \in G_1 \oplus G_2 \qquad J(h_1, h_2) = (ih_2, -ih_1). \tag{16}$$

Відомо [2, с. 161], що

$$\tilde{U} L U' = iJ, \qquad U M \tilde{U}' = iJ^*. \tag{17}$$

З (14), (15), (17), а також з леми 4.2.1 [2] випливає

$$M z_n = -U_1' h_n - M_0 L \Phi_1' h_n, \qquad \tilde{U}_2 z_n = h_n, \tag{18}$$

$$M z_n + \Phi_1^* \tilde{U}_2 z_n = -(U_1' - \Phi_1') h_n, \qquad z_n \in D(M). \tag{19}$$

Беручи до уваги (13), (19) і зауваження 1, переконуємося, що якщо виконується (3), то $\lim\limits_{n \to \infty} M z_n = 0$, а отже, й $\lim\limits_{n \to \infty} \tilde{U}_2 z_n = 0$. Але це суперечить другому із співвідношень (18), оскільки $\| h_n \|_{G_1} = 1$. Отримана суперечність і доводить друге твердження теореми. Перше доводиться аналогічно.

Теорема 2. $S, T \in C(H)$, $S^* = T$.

Доведення. З (10) та (11) зрозуміло, що оператори S та T задовольняють всі умови теореми 4.4.9 та наслідку 4.4.10 з [2]. Справедливість теореми випливає безпосередньо із згаданих тверджень.

Зауваження 2. Як видно з наведених вище доведень, в умовах (2), (3) U можна замінити на U_2, а $\tilde{U}$ — на $\tilde{U}_2$.

Приклад 1. Нехай L_0 — симетричний оператор з рівними дефектними числами, $L = L_0^*$, $(\tilde{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ — простір граничних значень (ПГЗ) оператора L_0, причому L-грані операторів Γ_1, Γ_2 дорівнюють нулю, $\Phi_i \in \boldsymbol{B}(H, G_i)$ $i = 1, 2$, $A = (A_{ij})_{i,j=1}^2 \in \boldsymbol{B}(\tilde{H} \oplus \tilde{H})$ — бієкція,

$$D(S) = \{ y \in D(L) \colon A_{11}\Gamma_1 y + A_{12}\Gamma_2 y = \Phi_1 y \}, \tag{20}$$

$$\forall y \in D(S) \qquad Sy = Ly + \Phi_2^*(A_{21}\Gamma_1 y + A_{22}\Gamma_2 y), \tag{21}$$

$$A^{-1} \overset{\mathrm{df}}{=} (B_{ij})_{i,j=1}^2.$$

З теореми 2 випливає

$$S \in \boldsymbol{C}(H),$$

$$D(S^*) = \{ z \in D(L) \colon B_{22}^*\Gamma_1 z + B_{12}^*\Gamma_2 z = \Phi_2 z \},$$

$$\forall z \in D(S^*) \qquad S^* z = Lz + \Phi_1^*(-B_{21}^*\Gamma_1 z + B_{11}^*\Gamma_2 z).$$

Для доведення двох останніх співвідношень потрібно порівняти рівності (17) з рівностями

$$\begin{aligned} \Gamma_1 L \Gamma_1' &= 0, & \Gamma_1 L \Gamma_2' &= -1_{\tilde{H}}, \\ \Gamma_2 L \Gamma_1' &= 1_{\tilde{H}}, & \Gamma_2 L \Gamma_2' &= 1_{\tilde{H}}, \end{aligned} \tag{22}$$

які безпосередньо випливають з (17).

Зауважимо, що поняття ПГЗ введено в праці [5] (див. також [6, 7]).

Наслідок 1. *Нехай* $(G_1 \oplus G_2,\ U_1 \oplus U_2)$, $(G_2 \oplus G_1,\ V_1 \oplus V_2)$ — *крайові пари для* (L, L_0) *та* (M, M_0) *відповідно, причому* L*-грані операторів* U_1, U_2 *та* M*-грані операторів* V_1, V_2 *дорівнюють нулю, а* $\Phi_i \in \boldsymbol{B}(H, G_i)$, $i = 1, 2$. *Визначимо оператор* S *за допомогою співвідношень* (4), (5), *а оператор* $\tilde{S}$ — *за допомогою співвідношень*

$$D(\tilde{S}) = \{ z \in D(M) \colon V_1 z = \Phi_2 z \}, \qquad \forall z \in D(\tilde{S}) \qquad \tilde{S}z = Mz + \Phi_1^* V_2 z.$$

Оператори S *та* $\tilde{S}$ *взаємно спряжені тоді і тільки тоді, коли:*

а) $P_2[UMV' - iJ]P_1 = 0$, *де* $U = U_1 \oplus U_2$, $V = V_1 \oplus V_2$, $P_1(P_2)$ — *ортопроектор* $G \to G_2 \oplus \overline{R(\Phi_1)}$ (*відповідно* $G \to G_1 \oplus \overline{R(\Phi_2)}$), *а оператор* J *визначено згідно з* (16);

б) незбурені оператори L_1 (*див.* (8)) *та* $\tilde{L}_1$, *визначений за допомогою співвідношень*

$$D(\tilde{L}_1) = \{ z \in D(M) \colon V_1 z = 0 \}, \qquad \forall z \in D(\tilde{L}_1) \qquad \tilde{L}_1 z = Mz,$$

є взаємно спряженими.

Справедливість цього твердження випливає з теорем 1, 2 та теореми 4.6.7 монографії [2].

Приклад 2. Нехай оператор S такий, як і в прикладі 1, $\tilde{A} = \left(\tilde{A}_{ij}\right)_{i,j=1}^{2} \in$ $\in \boldsymbol{B}\left(\tilde{H} \oplus \tilde{H}\right)$ — бієкція, а оператор $\tilde{S}$ визначено за допомогою співвідношень

$$D(\tilde{S}) = \{ z \in D(L) : \tilde{A}_{11}\Gamma_1 z + \tilde{A}_{12}\Gamma_2 z = \Phi_2 z \},$$

$$\forall z \in D(\tilde{S}) \qquad \tilde{S}z = Lz + \Phi_1^*(\tilde{A}_{21}\Gamma_1 z + \tilde{A}_{22}\Gamma_2 z).$$

Використовуючи наслідок 1 і рівності (22), легко переконатися, що $S^* = \tilde{S}$ тоді і тільки тоді, коли $P_2[AJ\tilde{A}^* - iJ]P_1 = 0$, а оператори $L_1 \overset{\text{df}}{=} L \mid \ker(A_{11}\Gamma_1 + A_{12}\Gamma_2)$ та $\tilde{L}_1 \overset{\text{df}}{=} L \mid \ker(\tilde{A}_{11}\Gamma_1 + \tilde{A}_{12}\Gamma_2)$ є взаємно спряженими (тут мається на увазі, що оператор J визначено згідно з (16), причому $G_1 = G_2 = \tilde{H}$).

Наслідок 2. *Оператор* (20), (21), *який розглядається в прикладі* 1, *є самоспряженим тоді і тільки тоді, коли він може бути поданий в кожному з таких виглядів*:

$$D(S) = \{ y \in D(L) : (\cos C)\Gamma_1 y - (\sin C)\Gamma_2 y = \Phi_C y \},$$

$$\forall y \in D(S) \qquad Sy = Ly + \Phi_C^*[(\sin C)\Gamma_1 y + (\cos C)\Gamma_2 y] + \Phi_C^* Q_C \Phi_C y$$

або

$$D(S) = \{ y \in D(L) : (K - 1_{\tilde{H}})\Gamma_1 y - i(K + 1_{\tilde{H}})\Gamma_2 y = \Phi_K y \},$$

$$\forall y \in D(S) \qquad Sy = Ly + \frac{1}{4}\Phi_K^*\left[-i(K + 1_{\tilde{H}})\Gamma_1 y + (K - 1_{\tilde{H}})\Gamma_2 y\right] + \Phi_K^* Q_K \Phi_K y,$$

де $C, K \in \boldsymbol{B}(\tilde{H})$ — *відповідно самоспряжений і унітарний оператори*;

$$\Phi_C, \Phi_K \in \boldsymbol{B}(H, \tilde{H}), \qquad Q_C = Q_C^*, \qquad Q_K = Q_K^* \in \boldsymbol{B}(\tilde{H}).$$

Для доведення цього твердження досить використати теореми 1, 2 і повторити міркування, наведені в [2, с. 188, 189] при доведенні аналогічного твердження для випадку, коли оператори Φ_1, Φ_2 є компактними.

Зауваження 3. У випадку, коли $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$, а L_0 — мінімальний диференціальний оператор з обмеженими операторними коефіцієнтами, результат, сформульований у наслідку 2, доведено в [8] (див. також [5, 6]).

3. Розглянемо випадок, коли оператори L та L_0, які відігравали роль вихідних об'єктів у попередніх пунктах, є відповідно максимальним і мінімальним операторами, породженими в гільбертовому просторі $H \overset{\text{df}}{=} L_2(H_0; (a, b))$ (H_0 — сепарабельний гільбертів простір) зі скалярним добутком

$$\forall y, z \in H \qquad (y \mid z) = \int_a^b (y(x) \mid z(x))_{H_0}\, dx$$

диференціальним виразом

$$l[y] = -y'' + p(x)y \qquad (x \in [a, b], -\infty, \ a < b < +\infty),$$

де $p(x)$ — обмежений самоспряжений оператор в H_0, причому оператор-функція $x \mapsto p(x)$ є сильно неперервною на $[a, b]$. З викладеного в [6, 8] випливає, що трійка $(\tilde{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$, де

$$\tilde{H} = H_0 \oplus H_0, \quad \forall y \in D(L) \quad \Gamma_1 y = (y'(a), -y'(b)), \quad \Gamma_2 y = (y(a), y(b)), \tag{23}$$

є ПГЗ оператора L_0.

Лема 2. *Оператори* Γ_1, Γ_2, *визначені згідно з* (23), *мають нульові* L-*грані.*

Доведення. Покажемо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує функція $\sigma \in \in C^\infty[a, b]$ така, що

$$\sigma(a) = \sigma'(a) = \sigma'(b) = 0, \quad \sigma(b) = 1, \quad \|\sigma\|_{L_2(a,b)} < \varepsilon. \tag{24}$$

Дійсно, існує функція $\sigma_0 \in C^\infty[a, b]$ така, що [9, с. 58]

$$\sigma_0(x) = \begin{cases} 0, & a \le x \le a + \dfrac{b-a}{3}; \\ 1, & a + \dfrac{2(b-a)}{3} \le b. \end{cases}$$

Оскільки множина

$$C_0^\infty[a, b] = \{\varphi \in C[a, b] : \operatorname{supp}\varphi \subset (a, b)\}$$

щільна в $L_2(a, b)$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\sigma_\varepsilon \in C_0^\infty[a, b]$ така, що $\|\sigma_0 - \sigma_\varepsilon\|_{L_2(a,b)} < \varepsilon$. Зрозуміло, що функція $\sigma = \sigma_0 - \sigma_\varepsilon$ задовольняє умови (24).

Покладемо $z(x) = \sigma(x)h$, де $h \in H_0$. З (24) і формули інтегрування частинами випливає, що для будь-якого $y \in D(L)$

$$\left(y'(b)\right)_{H_0} = (y \,|\, Lz) - (Ly \,|\, z) = -\int_a^b (y(x) \,|\, h)_{H_0} \overline{\sigma''(x)dx} +$$

$$+ \int_a^b (p(x)y(x) \,|\, h)_{H_0} \overline{\sigma(x)dx} - \int_a^b (Ly(x) \,|\, h)_{H_0} \overline{\sigma(x)dx},$$

тому

$$\left|\left(y'(b) \,|\, h\right)_{H_0}\right| \le \|h\|_{H_0}\left[\left(\|\sigma''\|_{L_2(a,b)} + c\|\sigma\|_{L_2(a,b)}\right)\|y\| + \|\sigma\|_{L_2(a,b)}\|Ly\|\right],$$

де $\|\cdot\|$ — норма, породжена скалярним добутком $(\cdot \,|\, \cdot)$, а

$$c = \sup_{a \le x \le b} \|p(x)\|_{H_0}.$$

Зокрема, якщо $h = y'(b)$, то

$$\|y'(b)\|_{H_0} \le \left[\left(\|\sigma''\|_{L_2(a,b)} + c\|\sigma\|_{L_2(a,b)}\right)\|y\| + \|\sigma\|_{L_2(a,b)}\|Ly\|\right].$$

Звідси і з (24) випливає, що L-грань відображення $y \mapsto y'(b)$ дорівнює нулю. Аналогічно показується, що нульову L-грань мають також відображення $y \mapsto \mapsto y(b)$, $y \mapsto y(a)$, $y \mapsto y'(a)$.

Припустимо, що $\Phi_{ij} \in \boldsymbol{B}(H, H_0)$, $i, j = 1, 2$, $\alpha_{ij} \in \boldsymbol{B}(H_0)$, $i, j = 1, \ldots, 4$, причому операторна матриця $A = \left(\alpha_{ij}\right)_{i,j=1}^4$ оборотна в $H_0^4 \overset{\text{df}}{=} H_0 \oplus H_0 \oplus H_0 \oplus H_0$. Покладемо

$$u_i(y) = \alpha_{i1}y(a) + \alpha_{i2}y'(a) + \alpha_{i3}y(b) + \alpha_{i4}y'(b), \quad y \in D(L), \quad i = 1, \ldots, 4,$$

і визначимо оператор S за допомогою співвідношень

$$D(S) = \{y \in D(L) : u_1(y) = \Phi_{11}y, \, u_2(y) = \Phi_{12}y\}, \tag{25}$$

$$\forall y \in D(S) \quad Sy = l[y] + \Phi_{21}^* u_3 y + \Phi_{22}^* u_4(y). \tag{26}$$

Безпосередньо з леми 2 та теореми 2 випливає, що оператор (25), (26) є замкненим і щільно визначеним. Крім цього, виходячи з викладеного в попередньому пункті, неважко побудувати спряжений оператор S^*. Умови, якими характеризується цей оператор, наведено в праці авторів [10], у якій анонсовано частину результатів цієї статті.

1. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л., Кочубей А. Н.* Теория расширений симметрических операторов и граничные задачи для дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 10. – С. 1299–1313.
2. *Лянце В. Э., Сторож О. Г.* Методы теории неограниченных операторов. – Киев: Наук. думка, 1983. – 210 с.
3. *Лянце В. Э.* О некоторых соотношениях между замкнутыми операторами // Докл. АН СССР. – 1972. – **204**, № 3. – С. 542–545.
4. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
5. *Кочубей А. Н.* О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений // Мат. заметки. – 1975. – **17**, № 1. – С. 41–48.
6. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
7. *Брук В. М.* Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии // Мат. сб. – 1976. – **100**, № 2. – С. 210–216.
8. *Рофе-Бекетов Ф. С.* Самосопряженные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций // Докл. АН СССР. – 1969. – **184**, № 5. – С. 1034–1037.
9. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 208 с.
10. *Сторож О. Г., Шувар О. Б.* Замкненість, щільна визначеність та умови самоспряженості диференціально-граничних операторів у просторі вектор-функцій // Допов. НАН України. – 1993. – № 8. – С. 20–24.

Одержано 12.02.2001