УДК 519.21

Є. О. Лебєдєв (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

СТАЦІОНАРНИЙ РЕЖИМ ТА БІНОМНІ МОМЕНТИ ДЛЯ МЕРЕЖ ТИПУ $[SM \mid GI \mid \infty]^r$

By using methods of the Markov renewal theory, we find conditions for the existence of a stationary mode for multi-channel networks with semi-Markov input flow. As a tool of stationary distribution analysis, we introduce the multivariate binomial moments and study their asymptotic properties. For multi-channel queue with a periodic input flow, we construct the generating function of the stationary distribution in the explicit form via parameters of the system.

Методами теорії марковського відновлення знайдено умови існування стаціонарного режиму для багатоканальних мереж з напівмарковським вхідним потоком. Як засіб вивчення стаціонарного розподілу введено багатовимірні біномні моменти та вивчено їх асимптотичні властивості. Для багатоканальної системи з періодичним вхідним потоком побудовано генератрису стаціонарного розподілу у явному вигляді через параметри системи.

Основна модель, що вивчається у роботі, є мережею масового обслуговування, яка функціонує таким чином. На r обслуговуючих вузлів ззовні надходить один загальний потік вимог, який керується напівмарковським процесом $\xi(t) \in \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Це означає, що моменти надходження вимог збігаються з моментами t_n, $n = 1, 2, \ldots$, змін станів $\xi(t)$. Якщо у момент t_n процес $\xi(t)$ переходить у стан i, то вимога з номером n з імовірністю h_{ij} надходить для обслуговування у вузол j, $\sum_{j=1}^{r} h_{ij} = 1$, $H = \| h_{ij} \|$ — прямокутна матриця розміру $N \times r$. Через $F(t) = \| F_{ij}(t) \|_1^N$ будемо позначати напівмарковську матрицю процесу $\xi(t)$, а через $F_i(t) = \sum_{j=1}^{N} F_{ij}(t)$ — функцію розподілу часу перебування у стані i.

У кожному з r обслуговуючих вузлів маємо необмежене число однотипних обслуговуючих приладів, $G_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, r$, — функція розподілу часу обслуговування у j-му вузлі. Після обслуговування у j-му вузлі вимога з імовірністю p_{jk} надходить у вузол k і з імовірністю $p_{jr+1} = 1 - \sum_{k=1}^{r} p_{jk}$ залишає мережу, $P = \| p_{jk} \|_1^r$ — матриця маршрутизації мережі. Додатковий вузол з номером $r+1$ інтерпретується як „вихід" з мережі обслуговування. Надалі будемо вважати, що $G_j(0+) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, r$, і $F_i(0+) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$, що завжди виконується на практиці. У відповідності з системою позначень, що прийнята в теорії масового обслуговування, описану вище модель будемо позначати символом $[SM \mid GI \mid \infty]^r$.

Мережі типу $[SM \mid GI \mid \infty]^r$ використовуються для моделювання процесу обробки інформації в інформаційно-обчислювальних мережах [1], а також при дослідженні структури слідів елементарних частинок у трекових камерах фізики високих енергій [2]. На відміну від класичних багатоканальних мереж Джексона (див., наприклад, [3]) мережі, що розглядаються, мають джерело вимог, параметри якого керуються напівмарковським процесом. Це дозволяє розширити область застосувань на випадок вхідних потоків змінної інтенсивності, включаючи інтенсивність, що періодично змінюється з часом.

Для мереж типу $[SM \mid GI \mid \infty]^r$ розглянемо багатовимірний процес обслуговування

© Є. О. ЛЕБЄДЄВ, 2002

$$X(t) = (X_1(t), \ldots, X_r(t)),$$

де $X_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, r$, — число зайнятих приладів у j-му вузлі у момент часу $t \geq 0$. Аналогічно через $X_j^i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, $j = 1, 2, \ldots, r$, будемо позначати число зайнятих приладів у j-му вузлі у момент часу t, якщо у початковий момент мережа порожня, $\xi(0) = i$ і момент надходження першої вимоги в мережу збігається з моментом виходу з i.

Для векторів $X(t)$,

$$X^i(t) = (X_1^i(t), \ldots, X_r^i(t)), \qquad i = 1, \ldots, N,$$

введемо генератриси

$$\Phi(t, z) = M z_1^{X_1(t)} \ldots z_r^{X_r(t)}, \qquad \Phi^i(t, z) = M z_1^{X_1^i(t)} \ldots z_r^{X_r^i(t)},$$

$$z = (z_1, \ldots, z_r), \qquad |z| \leq 1.$$

Траєкторія вимоги від моменту надходження в мережу до моменту виходу з неї може бути описана напівмарковським процесом $\eta(t)$, який набуває значень у множині станів $\{1, 2, \ldots, r, r+1\}$ і визначається напівмарковською матрицею $\|G_{ij}(t)\|_1^{r+1}$,

$$G_{ij}(t) = \begin{cases} p_{ij} G_i(t), & i = 1, 2, \ldots, r, \quad j = 1, 2, \ldots, r, r+1; \\ \delta_{r+1\,j} G_{r+1}(t), & i = r+1, \quad j = 1, 2, \ldots, r, r+1, \end{cases}$$

$$G_{r+1}(t) = \begin{cases} 0, & t < 1; \\ 1, & t \geq 1. \end{cases}$$

Стан $r+1$ для процесу $\eta(t)$ є поглинаючим. Поглинання $r+1$ інтерпретується як вихід вимоги з мережі. Через

$$p_{ij}(t) = P(\eta(t) = j / \eta(0) = i)$$

будемо позначати перехідні ймовірності напівмарковського процесу $\eta(t)$.

Якщо для процесу обслуговування вимог

$$X(t) = (X_1(t), \ldots, X_r(t)), \qquad t \geq 0,$$

існує стаціонарний режим, то через X_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, будемо позначати число зайнятих приладів у i-му вузлі у стаціонарному режимі, а через $\Phi(z)$ — генератрису вектора $X = (X_1, \ldots, X_r)$.

Умови існування стаціонарного режиму для $[SM \mid GI \mid \infty]^r$-мережі встановлено у наступній теоремі.

Теорема 1. *Нехай матриця $F(t)$ — неґратчаста, матриця $F(+\infty)$ — нерозкладна і $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N$ — стаціонарні ймовірності $F(+\infty)$. Тоді якщо $\max_i \int_0^\infty t dF_i(t) < \infty$, $\max_i \int_0^\infty t dG_i(t) < \infty$, спектральний радіус матриці маршрутизації P менший 1, то для процесу обслуговування $X(t)$ існує стаціонарний режим і*

$$\Phi(z) = 1 - \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \int_0^\infty \Phi^j(t, z) \left\{ \sum_{k=1}^{r} h_{jk} [p_{k1}(t)(1 - z_1) + \ldots + p_{kr}(t)(1 - z_r)] \right\} dt, \quad (1)$$

де

$$\lambda_j = \pi_j \left\{ \sum_{i=1}^{N} \pi_i \int_0^\infty t dF_i(t) \right\}^{-1}.$$

Доведення теореми 1 базується на двох допоміжних твердженнях.

Нехай L_T, $0 < T < \infty$, — повний метричний простір векторних функцій

$$\Phi(t, z) = (\Phi^1(t, z), \Phi^2(t, z), \ldots, \Phi^N(t, z)), \qquad z = (z_1, \ldots, z_r),$$

з компонентами $\Phi^i(t, z)$, які визначені для $0 \le t \le T$, $|z| \le 1$, вимірні по t і є ймовірнісними генератрисами відносно z. Відстань між $\Phi, \Phi^* \in L_T$ визначається рівністю

$$\rho(\Phi, \Phi^*) = \max_{1 \le i \le N} \sup_{\substack{0 \le t \le T \\ |z| \le 1}} \left| \Phi^i(t, z) - \Phi^{*i}(t, z) \right|.$$

Справедлива така лема.

Лема 1. *Для довільного $T > 0$ генератриси $\Phi^i(t, z)$, $0 \le t \le T$, $|z| \le 1$ векторів $X^i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, є єдиним розв'язком системи інтегральних рівнянь*

$$\Phi^i(t, z) = 1 - F_i(t) + \sum_{j=1}^{N} \int_0^t dF_{ij}(u) \Phi^j(t-u, z) \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{r} h_{jk} [p_{kr+1}(t-u) + p_{k1}(t-u) z_1 + \ldots p_{kr}(t-u) z_r], \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \qquad (2)$$

який при $0 \le t \le T$ належить L_T.

Доведення леми випливає з теореми про нерухому точку стискуючого оператора [4, с. 605].

Лема 2. *Нехай*

$$R(t) = \| R_{ij}(t) \|_1^r = \sum_{n=0}^{\infty} G^{n*}(t)$$

— матриця відновлення напівмарковського процесу $\eta(t)$, $G(t) = \| G_{ij}(t) \|_1^r$. Тоді якщо спектральний радіус матриці P менший 1 і $\int_0^\infty t dG_i(t) = \mu_i^{-1} < \infty$ для $i = 1, 2, \ldots, r$, то:

a) $\lim\limits_{t \to \infty} R(t) = R^0 = \| R_{ij}^0 \|_1^r = (I - P)^{-1} < \infty;$

b) $R^1 = \left\| \int_0^\infty (R_{ij}^0 - R_{ij}(t)) dt \right\|_1^r = (I - P)^{-1} \Delta^{-1}(\mu) (I - P)^{-1} P < \infty,$

де $\Delta(\mu) = \| \mu_i \delta_{ij} \|_1^r$ — діагональна матриця.

Доведення. Нехай

$$R_{ij}(s) = \int_{0+}^{\infty} e^{-st} dR_{ij}(t), \qquad g_i(s) = \int_0^\infty e^{-st} dG_i(t), \qquad s \ge 0,$$

— перетворення Лапласа функцій $R_{ij}(t)$ і $G_i(t)$. Тоді в термінах перетворень

Лапласа рівняння марковського відновлення $R(t) = I + G * R(t)$ для матриці $R(t)$ [5, с. 40] можна подати у вигляді

$$R(s) = \Delta[g(s)]P(I + R(s)), \tag{3}$$

де

$$\Delta[g(s)] = \left\| \delta_{ij} g_i(s) \right\|_1^r, \qquad R(s) = \left\| R_{ij}(s) \right\|_1^r.$$

Розв'язком рівняння (3) є матриця

$$R(s) = (I - \Delta[g(s)]P)^{-1} \Delta[g(s)]P$$

і тому

$$R^0 - I = \lim_{s \to 0+} R(s) = (I - P)^{-1} P.$$

Розглянемо

$$\frac{1}{s}[R(0) - R(s)] = \left\| \int_0^\infty \left[R_{ij}^0 - R_{ij}(t) \right] e^{-st}\, dt \right\|_1^r =$$

$$= \frac{1}{s}\left[(I - P)^{-1} P - (I - \Delta[g(s)]P)^{-1} \Delta[g(s)]P \right].$$

Чисельник в останньому виразі запишемо таким чином:

$$(I - P)^{-1} P - (I - \Delta[g(s)]P)^{-1} \Delta[g(s)]P =$$

$$= (I - P)^{-1}(I - \Delta[g(s)])P + \left[(I - P)^{-1} - (I - \Delta[g(s)]P)^{-1} \right] \Delta[g(s)]P =$$

$$= (I - P)^{-1}(I - \Delta[g(s)])P + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{k-1} P^{k-1-i}(I - \Delta[g(s)])P(\Delta[g(s)]P)^{i+1}.$$

Оскільки

$$\lim_{s \to 0+} \Delta[g(s)] = I, \qquad \lim_{s \to 0+} \frac{1}{s}(I - \Delta[g(s)]) = \Delta^{-1}(\mu),$$

то

$$R^1 = \lim_{s \to 0+} \frac{1}{s}[R(0) - R(s)] =$$

$$= (I - P)^{-1} \Delta^{-1}(\mu) P + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} P^{k-i} \Delta^{-1}(\mu) P^{i+1} = (I - P)^{-1} \Delta^{-1}(\mu)(I - P)^{-1} P.$$

Лему доведено.

Перейдемо до доведення теореми.

***Доведення теореми* 1.** Подамо систему рівнянь (2), яка визначає генератриси $\Phi^i(t, z)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, у вигляді рівнянь марковського відновлення

$$\Phi^i(t, z) = f_i(t) + \sum_{j=1}^{N} \int_0^t dF_{ij}(u) \Phi^j(t - u, z), \qquad i = 1, 2, \ldots, N,$$

де

$$f_i(t) = 1 - F_i(t) - \sum_{j=1}^{N} \int_0^t dF_{ij}(u) \Phi^j(t - u, z) \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{r} h_{jk}[p_{k1}(t-u)(1-z_1) + \ldots + p_{kr}(t-u)(1-z_r)].$$

Для того щоб твердження теореми випливало із загальних результатів теорії марковського відновлення, достатньо для $i = 1, 2, \ldots, r$ перевірити безпосередню інтегровність за Ріманом на $[0, \infty)$ функцій $f_i(t)$. Для цього побудуємо для $|f_i(t)|$ монотонну мажоранту $\tilde{f}_i(t)$, інтегровну на $[0, \infty)$.

Оскільки $\Phi^i(t-u, z)$ є генератрисою, то

$$|f_i(t)| \leq 1 - F_i(t) + \sum_{k,m=1}^{r} \int_0^t dF_i(u) p_{km}(t-u) \leq$$

$$\leq (1+r)[1-F_i(t/2)] + \sum_{k,m=1}^{r} \int_0^{t/2} dF_i(u) p_{km}(t-u). \tag{4}$$

Знайдемо оцінку зверху для інтеграла $\int_0^{t/2} dF_i(u) p_{km}(t-u)$.

Функції $p_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, \ldots, r$, як розв'язок рівняння марковського відновлення можуть бути подані у вигляді

$$p_{ij}(t) = \int_0^t dR_{ij}(u)(1 - G_j(t-u)), \quad i, j = 1, 2, \ldots, r. \tag{5}$$

Використовуючи (5), знаходимо

$$p_{ij}(t) \leq \int_0^{t/2} dR_{ij}(u)(1 - G_j(t-u)) + \int_{t/2}^{t} dR_{ij}(u)(1 - G_j(t-u)) \leq$$

$$\leq (1 - G_j(t/2))(R_{ij}^0 - \delta_{ij}) + (R_{ij}^0 - R_{ij}(t/2)). \tag{6}$$

Права частина (6) є монотонно спадною функцією, тому

$$\int_0^{t/2} dF_i(u) p_{km}(t-u) \leq (1-G_m(t/4))(R_{km}^0 - \delta_{km}) + (R_{km}^0 - R_{km}(t/4)). \tag{7}$$

Поєднуючи (4) і (7), маємо монотонну мажоранту

$$\tilde{f}_i(t) = (1+r)[1-F_i(t/2)] + \sum_{k,m=1}^{r} \left[(1-G_m(t/4))(R_{km}^0 - \delta_{km}) + (R_{km}^0 - R_{km}(t/4))\right].$$

Інтегровність на $[0, \infty)$ функції $\tilde{f}_i(t)$ випливає з леми 2 і обмеженості інтегралів

$$\int_0^\infty t dF_i(t) < \infty, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \quad \int_0^\infty t dG_i(t) < \infty, \quad j = 1, 2, \ldots, r.$$

Теорему доведено.

Зауважимо, що у співвідношенні (1) генератриса стаціонарного розподілу подається через генератриси процесу обслуговування у перехідному режимі. Як правило, явні формули для $\Phi(z)$ можуть бути отримані тільки у випадку пуассонівського вхідного потоку (див. [3]).

Ефективним засобом при дослідженні процесу обслуговування є біномні моменти. Багатовимірним біномним моментом $M_{k_1, \ldots, k_r}(t)$ порядку $(k_1, \ldots, k_r)$ процесу обслуговування

$$X(t) = (X_1(t), \ldots, X_r(t))$$

будемо називати

$$M_{k_1,\ldots,k_r}(t) = \sum_{\alpha_1 = k_1,\ldots,\alpha_r = k_r}^{\infty} \binom{\alpha_1}{k_1} \cdots \binom{\alpha_r}{k_r} P(X_1(t) = \alpha_1, \ldots, X_r(t) = \alpha_r).$$

Якщо ряд $\sum_0^\infty M_{k_1,\ldots,k_r}(t) z_1^{k_1} \ldots z_r^{k_r}$ збігається в деякій області

$$Z = \left\{(z_1, \ldots, z_r) \colon |z_i| < z_i^0,\ i = 1, 2, \ldots, r\right\},$$

то його суму будемо позначати через $M(t, z)$ і називати генератрисою біномних моментів. Аналогічно можна ввести $M^i_{k_1,\ldots,k_r}(t)$ і $M^i(t, z)$ для процесу

$$X^i(t) = (X^i_1(t), \ldots, X^i_r(t)).$$

Біномні моменти задовольняють систему рівнянь марковського відновлення

$$M^i_{k_1,\ldots,k_r}(t) = m^i_{k_1,\ldots,k_r}(t) + \sum_{j=1}^{N} \int_0^t dF_{ij}(u) M^j_{k_1,\ldots,k_r}(t-u), \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{8}$$

де

$$m^i_{k_1,\ldots,k_r}(t) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{r} \int_0^t dF_{ij}(u) h_{jk} [p_{k1}(t-u) M^j_{k_1-1,\ldots,k_r}(t-u)(1-\delta_{0k_1}) + \ldots$$
$$\ldots + p_{kr}(t-u) M^j_{k_1,\ldots,k_r-1}(t-u)(1-\delta_{0k_r})], \qquad k_1 + k_2 + \ldots + k_r \neq 0.$$

Вивчимо асимптотичні властивості біномних моментів.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови теореми* 1, *то для довільних* $i = 1, 2, \ldots, N$, $k_1, k_2, \ldots, k_r = 0, 1, \ldots$ *функції* $m^i_{k_1,\ldots,k_r}(t)$ *безпосередньо інтегровні за Ріманом на* $[0, \infty)$,

$$\lim_{t\to\infty} M^i_{k_1,\ldots,k_r}(t) = M_{k_1,\ldots,k_r}$$

існують, не залежать від початкового стану і

$$M_{k_1,\ldots,k_r} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{r} \int_0^\infty \lambda_j h_{jk} [p_{k1}(t) M^j_{k_1-1,\ldots,k_r}(t)(1-\delta_{0k_1}) + \ldots$$
$$\ldots + p_{kr}(t) M^j_{k_1,\ldots,k_r-1}(t)(1-\delta_{0k_r})]\, dt. \tag{9}$$

Перед тим, як доводити теорему, розглянемо систему рівнянь

$$\varphi_i(t) = \theta_i(t) + \sum_{j=1}^{N} \int_0^t dF_{ij}(u) \varphi_j(t-u), \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{10}$$

де

$$\theta_i(t) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{r} \int_0^t dF_{ij}(u) h_{jk} [1 - p_{kr+1}(t-u)].$$

Для функцій $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, які задані як розв'язок (10), справедлива така лема.

Лема 3. *Якщо виконуються умови теореми* 1, *то*

$$\lim_{t \to \infty} \varphi_j(t) = \sum_{k=1}^{r} \theta_k / \mu_k, \quad j = 1, 2, \ldots, N, \tag{11}$$

де

$$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_r) = \nu(I - P)^{-1}$$

— *розв'язок рівняння балансу*, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_r)$, $\nu_i = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k h_{ki}$ — *інтенсивність зовнішнього потоку на* i*-й вузол.*

Твердження леми 3 випливає з теореми про асимптотичну поведінку розв'язку рівнянь марковського відновлення.

Як наслідок (11) маємо $\max_{1 \le i \le N} \sup_{t \ge 0} \varphi_i(t) = \rho < \infty$.

Доведення теореми 2. Для $k = 0, 1, \ldots$ позначимо

$$M(k) = \max_{\substack{1 \le i \le N \\ k = k_1 + \ldots + k_r}} \sup_{t \ge 0} M^i_{k_1, \ldots, k_r}(t).$$

Методом математичної індукції по $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_r$ встановимо нерівність

$$M(k) \le \rho^k, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{12}$$

і твердження теореми.

Зазначимо, що для $i = 1, 2, \ldots, N$ $M^i_{0, \ldots, 0}(t) \equiv 1$ і для $k = 0$ нерівність (12) виконується.

Нехай $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_r = 1$, $\overline{\alpha}$ — r-вимірний вектор, компонента якого з номером α дорівнює 1, а інші — 0.

Для $M^i_{\overline{\alpha}}(t)$ система (8) має вигляд

$$\begin{aligned} M^i_{\overline{\alpha}}(t) &= m^i_{\overline{\alpha}}(t) + \sum_{j=1}^{N} \int_0^t dF_{ij}(u) M^j_{\overline{\alpha}}(t-u), \quad i = 1, 2, \ldots, N, \\ m^i_{\overline{\alpha}}(t) &= \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{r} \int_0^t dF_{ij}(u) h_{jk} p_{k\alpha}(t-u). \end{aligned} \tag{13}$$

Позначимо через

$$H(t) = \left\| H_{ij}(t) \right\|_1^N = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t)$$

матрицю відновлення напівмарковського процесу $\xi(t)$. Тоді $M^i_{\overline{\alpha}}(t)$ можна подати у вигляді

$$M^i_{\overline{\alpha}}(t) = \sum_{j=1}^{N} \int_0^t dH_{ij}(u) m^j_{\overline{\alpha}}(t-u), \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{14}$$

Доведемо (12) для $k = 1$. Підставляючи (13) у (14), знаходимо

$$M^i_{\overline{\alpha}}(t) = \sum_{j=1}^{N} \int_0^t dH_{ij}(u) \left[\sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{r} \int_0^{t-u} dF_{jn}(v) h_{nk} p_{k\alpha}(t-u-v) \right] \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{N} \int_0^t dH_{ij}(u) \theta_j(t-u) = \varphi_i(t) \le \rho.$$

Таким чином, $M(1) \le \rho$.

Щоб завершити перевірку кроку $k = 1$, встановимо безпосередню інтегровність за Ріманом на $[0, \infty)$ функцій $m^i_{\bar\alpha}(t)$.

Використовуючи методику побудови мажоранти $\tilde f_i(t)$ (теорема 1), маємо

$$m^i_{\bar\alpha}(t) \le [1 - F_i(t/2)] + \sum_{k=1}^{r}\Big[(1 - G_\alpha(t/4))(R^0_{k\alpha} - \delta_{k\alpha}) + (R^0_{k\alpha} - R_{k\alpha}(t/4))\Big]. \quad (15)$$

Права частина (15) є монотонною мажорантою для $m^i_{\bar\alpha}(t)$, яка інтегровна на $[0, \infty)$. Звідси випливає безпосередня інтегровність $m^i_{\bar\alpha}(t)$ і співвідношення (9) для $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_r = 1$.

Припустимо тепер, що твердження теореми і нерівність (12) справедливі для всіх $(k_1, \ldots, k_r)$ таких, що $k_1 + k_2 + \ldots + k_r < k$. Подамо біномні моменти $M^i_{k_1, \ldots, k_r}(t)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, для $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = k$ у вигляді

$$M^i_{k_1,\ldots,k_r}(t) = \sum_{j=1}^{N}\int_0^t dH_{ij}(u) m^j_{k_1,\ldots,k_r}(t-u), \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \quad (16)$$

Перевіримо нерівність (12). Для цього $m^j_{k_1,\ldots,k_r}(t-u)$ підставимо у (16):

$$M^i_{k_1,\ldots,k_r}(t) = \sum_{j=1}^{N}\int_0^t dH_{ij}(u)\Bigg[\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{r}\int_0^{t-u} dF_{jn}(v) h_{nk} \times$$

$$\times\ [p_{k1}(t-u-v) M^n_{k_1-1,\ldots,k_r}(t-u-v)(1-\delta_{0k_1}) + \ldots$$

$$\ldots + p_{kr}(t-u-v) M^n_{k_1,\ldots,k_r-1}(t-u-v)(1-\delta_{0k_r})]\Bigg] \le$$

$$\le\ M(k-1)\sum_{j=1}^{N}\int_0^t dH_{ij}(u)\theta_j(t-u) = M(k-1)\varphi_i(t) \le \rho^k.$$

Отже, $M(k) \le \rho^k$.

Використовуючи припущення індукції, знаходимо

$$m^i_{k_1,\ldots,k_r}(t) \le \rho^{k-1}\sum_{\nu=1}^{r}\int_0^t dF_i(u)[p_{\nu 1}(t-u) + \ldots + p_{\nu r}(t-u)] \le \rho^{k-1}[1 - F_i(t/2)] +$$

$$+ \sum_{\nu, m=1}^{r}\Big[(1 - G_m(t/4))(R^0_{\nu m} - \delta_{\nu m}) + (R^0_{\nu m} - R_{\nu m}(t/4))\Big]. \quad (17)$$

Права частина (17) є монотонною мажорантою для $m^i_{k_1,\ldots,k_r}(t)$, інтегровною на $[0, \infty)$. Таким чином, функції $m^i_{k_1,\ldots,k_r}(t)$ безпосередньо інтегровні за Ріманом. Теорему доведено.

Для генератрис біномних моментів з теореми 2 випливає таке твердження.

Наслідок 1. *Якщо виконуються умови теореми* 1, *то в області*

$$Z = \{(z_1, \ldots, z_r) : |z_i| < 1/\rho,\ \ i = 1, 2, \ldots, r\}$$

існують

$$M(z) = \sum_0^\infty M_{k_1,\ldots,k_r} z_1^{k_1} \ldots z_r^{k_r}, \qquad M^j(t, z), \qquad t \ge 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, N,$$

і

$$M(z) = 1 + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{r}\int_0^\infty \lambda_j h_{jk} M^j(t,z)[p_{k1}(t)z_1 + \ldots + p_{kr}(t)]\,dt.$$

Застосуємо отримані результати до системи обслуговування типу $GI|GI|\infty$ з періодичним вхідним потоком. Періодичність означає, що інтервали τ_n, $n = 1, 2, \ldots$, між моментами надходження вимог є незалежними випадковими величинами, причому τ_{mN+k}, $m = 0, 1, \ldots$, однаково розподілені з функцією розподілу $F_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, N$. Як і раніше, через $G(t)$ будемо позначати функцію розподілу часу обслуговування.

Описана вище система є частковим випадком $[SM|GI|\infty]^r$-мережі, коли $r = 1$, а напівмарковська матриця $F(t) = \|F_{ij}(t)\|_1^N$ процесу $\xi(t)$ складається з

$$F_{ij}(t) = \begin{cases} F_i(t), & i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad j = i+1; \\ F_N(t), & i = N, \quad j = 1; \\ 0 \text{ — в інших випадках.} \end{cases}$$

З теореми 1 випливає такий результат.

Наслідок 2. *Якщо* $F_1 * F_2 * \ldots * F_N(t)$ *— неґратчаста,*

$$\int_0^\infty t\,dF_i(t) = 1/\lambda_i < \infty, \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \qquad \int_0^\infty t\,dG(t) = 1/\mu < \infty,$$

то для системи $GI|GI|\infty$ *з періодичним рекурентним вхідним потоком існує стаціонарний режим і генератрису* $\Phi(z)$ *стаціонарного розподілу можна подати у вигляді*

$$\Phi(z) = 1 - \lambda(1-z)\sum_{j=1}^{N}\int_0^\infty \Phi^j(t,z)[1-G(t)]\,dt, \qquad \lambda = (1/\lambda_1 + \ldots 1/\lambda_N)^{-1},$$

де функції $\Phi^j(t,z)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, *є единим розв'язком системи рівнянь*

$$\Phi^j(t,z) = 1 - F_j(t) + \int_0^t dF_j(u)\Phi^{j+1}(t-u,z)[G(t-u) + z(1-G(t-u))],$$

$$j = 1, 2, \ldots, N,$$

$$\Phi^{N+1}(t,z) = \Phi^1(t,z).$$

У випадку $GI|M|\infty$-системи з періодичним вхідним потоком можна отримати явний вигляд $\Phi(z)$.

Нехай

$$f_i(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,dF_i(t), \qquad s \geq 0,$$

— перетворення Лапласа функцій розподілу

$$F_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \qquad f_{i,j}(s) = f_i(s) f_{i+1}(s) \ldots f_j(s),$$

$$i \leq j, \qquad B(s) = \|B_{ij}(s)\|_1^N,$$

$$B_{ij}(s) = \begin{cases} f_{1,N}(s)\big[f_{i,N}(s)/f_{j,N}(s)\big], & j \leq i; \\ f_{i,N}(s)/f_{j,N}(s), & j > i, \end{cases}$$

$$A(0) = I, \qquad A(k) = \prod_{m=1}^{k} B(m\mu), \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Наслідок 3. *Якщо для системи масового обслуговування типу $GI \mid M \mid \infty$ з періодичним рекурентним вхідним потоком виконуються умови наслідку 2, то для процесу обслуговування існує стаціонарний режим і генератриса стаціонарного розподілу має вигляд*

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z-1)^k M_k, \tag{18}$$

$$M_0 = 1, \qquad M_k = \frac{1}{k}\frac{\lambda}{\mu}(\bar{1}A(k-1), \bar{1}) \prod_{m=1}^{k-1} (1 - f_{1,m}(m\mu))^{-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots . \tag{19}$$

де $\bar{1}$ — *N-вимірний вектор, складений з* 1.

Формули (18), (19) є матричним аналогом формул Такача, які отримані для класичного випадку $GI \mid M \mid \infty$-системи.

1. *Бочаров П. П., Печинкин А. В.* Теория массового обслуживания. – М.: Рос. ун-т дружбы народов, 1995. – 529 с.
2. *Двуреченский А., Кулюкина Л. А., Ососкова Г. А.* Оценки трековой ионизации в трековых камерах. – Дубна, 1981. – (Препринт / АН СССР. Ин-т ядерных исследований; № 5-82-631).
3. *Анисимов В. В., Лебедев Е. А.* Стохастические сети обслуживания. Марковские модели. – Киев: Лыбидь, 1992. – 208 с.
4. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
5. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1976. – 184 с.

Одержано 14.03.2001,
після доопрацювання – 26.11. 2001