УДК 517.54

М. В. Заболоцький (Львів. ун-т)

АСИМПТОТИКА ЛОГАРИФМІЧНОЇ ПОХІДНОЇ ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ НУЛЬОВОГО ПОРЯДКУ

We find the asymptotic formulas for logarithmic derivative of a zero order entire function f whose zeros possess the angular density with respect to the comparison function $v(r) = r^{\lambda(r)}$, where $\lambda(r)$ is a zero proximate order of counting function $n(r)$ of zeros of f.

Знайдено асимптотичні формули для логарифмічної похідної цілої функції f нульового порядку, нулі якої мають кутову щільність відносно функції порівняння $v(r) = r^{\lambda(r)}$, де $\lambda(r)$ — нульовий уточнений порядок рахуючої функції $n(r)$ нулів f.

Нехай f — ціла функція додатного порядку цілком регулярного зростання (ц. р. зр.) в розумінні Б. Я. Левіна – Пфлюгера. Припускаємо, що читач знайомий з термінологією і основними фактами теорії цілих функцій ц. р. зр. [1]. Для таких функцій f в [2, 3] знайдено асимптотичні формули їх логарифмічних похідних $F = f'/f$ зовні деяких виняткових множин. Не зменшуючи загальності, будемо вважати надалі, що промінь $\arg z = -\pi$ є звичайним для нулів f [1, с. 125]. Нехай $\Delta(\psi)$ — функція кутової щільності послідовності нулів f, тобто для всіх ψ, крім можливо не більш ніж зліченної множини $E \subset [-\pi, \pi)$, існує границя

$$\Delta(\psi) = \lim_{r\to\infty} \frac{n(r, -\pi, \psi)}{V(r)}, \quad -\pi \le \psi < \pi, \quad \Delta(-\pi) = 0,$$

де $n(r, \alpha, \beta)$ — число нулів f в секторі $\{z : |z| \le r, \alpha \le \arg z < \beta\}$, $V(r) = r^{\rho(r)}$, $\rho(r)$ — уточнений порядок f. Зауважимо, що необхідною та достатньою умовою ц. р. зр. функції f нецілого порядку є існування кутової щільності її нулів відносно функції порівняння $V(r)$.

У випадку, коли порядок функції f дорівнює нулю, уточнений порядок $\rho(r)$ функції f вже не буде уточненим порядком рахуючої функції $n(r) = n(r, -\pi, \pi)$ її нулів. Як показано в [4], тоді $n(r) = o(V(r))$, $r \to \infty$. Отже, нулі цілої функції нульового порядку завжди будуть мати кутову щільність $\Delta(\psi) = 0$ відносно функції порівняння $V(r)$. Тому у випадку нульового порядку розглядаємо функцію порівняння $v(r) = r^{\lambda(r)}$, $v(0) = 0$, де

1) функція $\lambda(x)$ — невід'ємна, неперервно диференційовна на $[0, +\infty)$;

2) $\lambda(r) \to 0$ при $r \to +\infty$;

3) $\varepsilon(r) = \lambda(r) + r\lambda'(r)\ln r \to 0$ при $r \to +\infty$;

4) $v(r) \uparrow +\infty$ при $r \to +\infty$;

5) $0 < \varlimsup_{r\to+\infty} n(r)/v(r) < +\infty$.

Функцію $\lambda(r)$ називають нульовим уточненим порядком функції $n(r)$. Крім функції порівняння $v(r)$ будемо розглядати також функцію $\tilde{v}(r) = r^{\tilde{\lambda}(r)}$, $v(0) = 0$, де $\tilde{\lambda}(r)$ — сильний нульовий уточнений порядок $n(r)$, тобто [1, с. 56 – 60]

$$\tilde{\lambda}(r) = \Theta(\ln r)/\ln r. \tag{1}$$

Тут $\Theta(x)$ — вгнута функція, що задовольняє наступні умови:

а) $\Theta(x)\uparrow+\infty$ при $x\to+\infty$;

б) $\Theta(x)/x\to 0$ при $x\to+\infty$;

в) $\Theta''(x)/\Theta'(x)\to 0$ при $x\to+\infty$;

г) $0<\varlimsup\limits_{r\to+\infty} n(r)/\tilde{v}(r)<+\infty$.

Відомо [1, с. 60], що для довільної необмеженої зверху додатної на $[0,+\infty)$ функції $\varphi(r)$ нульового порядку існує її сильний уточнений порядок $\tilde{\lambda}(r)$.

У роботі будуть знайдені асимптотичні формули для

$$F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)},$$

де f — ціла функція нульового порядку, нулі якої мають кутову щільність $\Delta(\psi)$ відносно функції порівняння $v(r)$ або $\tilde{v}(r)$.

Зауважимо, якщо для цілих функцій ц. р. зр. асимптотику $\ln|f(z)|$ можна було вказати зовні деякої множини кругів нульової лінійної щільності, то для $F(z)$ це, взагалі кажучи, неможливо навіть в найпростішому випадку цілої функції нецілого порядку з нулями на одному промені [2, с. 63].

Нехай задана система K кругів $\{z\colon |z-a_j|<r_j\}$, $j=1,2,\ldots$, $a_j\to\infty$, $j\to\to+\infty$ і μ — деяке число, $1<\mu\le 2$. Якщо

$$\lim_{r\to+\infty} r^{-\mu}\sum_{|a_j|<r} r_j^{\mu} = 0,$$

то кажуть, що система кругів K має нульову μ-щільність. Зауважимо, що весь промінь $\arg z=\alpha$ можна покрити системою K кругів нульової μ-щільності, $1<\mu\le 2$.

Справедливі наступні теореми.

Теорема 1. *Нехай f — ціла функція нульового порядку з від'ємними нулями, $\Delta>0$, $\tilde{v}(r)$ — функція опукла відносно логарифму, $\tilde{\varepsilon}(r)=\tilde{\lambda}(r)+r\,\tilde{\lambda}'(r)\ln r$. Якщо*

$$n(r) = \Delta\tilde{v}(r)+o(\tilde{v}(r)\tilde{\varepsilon}(r)), \qquad r\to+\infty, \tag{2}$$

то для всіх $z=re^{i\theta}$, $-\pi\le\theta<\pi$,

$$F(z) = \frac{\Delta\tilde{v}(r)}{z}+\frac{i\Delta\tilde{v}(r)\tilde{\varepsilon}(r)}{z}\theta+o\left(\frac{\tilde{v}(r)\tilde{\varepsilon}(r)}{r}\right), \qquad r\to+\infty. \tag{3}$$

При цьому співвідношення (3) *виконується рівномірно відносно θ в довільному куті $-\pi+\delta\le\theta\le\pi-\delta$, $0<\delta<1$.*

Теорема 2. *Нехай f — ціла функція нульового порядку, нулі якої мають кутову щільність відносно функції порівняння $v(r)$. Тоді існує система кругів E нульової μ-щільності така, що при $z\in\mathbb{C}\setminus E$ виконується*

$$F(re^{i\theta}) = \Delta v(r)/z+o(v(r)/r), \tag{4}$$

рівномірно відносно θ при $r\to+\infty$.

Зауважимо, що в [5] одержано асимптотичні формули для $\ln f(z)$ цілої функції f нульового порядку, нулі якої від'ємні та задовольняють умову (2).

Для доведення цих теорем використаємо наступні леми.

Лема 1. *Нехай* $\tilde{\lambda}(r)$ *— сильний нульовий уточнений порядок. Тоді*

$$\tilde{\varepsilon}(r) = \Theta'(\ln r) \to 0, \quad r \to +\infty, \tag{5}$$

і

$$\frac{d\tilde{v}(r)}{d\ln r} = \tilde{v}(r)\tilde{\varepsilon}(r), \quad \frac{d^2\tilde{v}(r)}{d(\ln r)^2} = o(\tilde{v}(r)\tilde{\varepsilon}(r)), \quad r \to +\infty.$$

Доведення. З (1) одержуємо, що $\tilde{\varepsilon}(r) = \Theta'(\ln r)$. Оскільки $\Theta'(x) \le \le (\Theta(2x) - \Theta(x))/x$, то завдяки умові б) сильного нульового уточненого порядку $\tilde{\lambda}(r)$ отримуємо (5).

Далі $\tilde{v}'(r) = (\tilde{v}(r)/r)\tilde{\varepsilon}(r)$, тому

$$\frac{d\tilde{v}(r)}{d\ln r} = \tilde{v}(r)\tilde{\varepsilon}(r).$$

Враховуючи (5) і умову в) сильного нульового уточненого порядку, маємо

$$\frac{d^2\tilde{v}(r)}{d(\ln r)^2} = \tilde{v}(r)\tilde{\varepsilon}(r)\left(\tilde{\varepsilon}(r) + \frac{\tilde{\varepsilon}'(r)}{\tilde{\varepsilon}(r)}\right) =$$

$$= \tilde{v}(r)\tilde{\varepsilon}(r)\left(\tilde{\varepsilon}(r) + \frac{\Theta''(\ln r)}{\Theta'(\ln r)}\right) = o(\tilde{v}(r)\tilde{\varepsilon}(r)), \quad r \to +\infty.$$

Лему 1 доведено.

Лема 2. *Нехай* $\alpha(r)$ *— зростаюча на* $[0, +\infty)$ *функція,* $\alpha(r)/r^{\gamma}$ *спадає до нуля при* $r \to +\infty$, $0 < \gamma < 1$. *Тоді для довільної інтегровної функції* $\beta(r)$, $\beta(r) \to 0$ *при* $r \to +\infty$ *і для* $z = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta < \pi$,

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\alpha(t)\beta(t)}{(z+t)^2}\right) dt = o\left(\frac{\alpha(r)}{r}\right), \quad r \to +\infty,$$

причому ця оцінка рівномірна відносно θ *в довільному куті* $[-\pi + \delta \le \theta \le \pi - -\delta]$, $0 < \delta < 1$.

Лема 3. *Нехай* $\tilde{v}(r)$ *— функція, опукла відносно логарифму,* $0 < \varepsilon < 1$,

$$\tilde{a}_k(r, \varepsilon) = \int_0^{(1-\varepsilon)r} \tilde{v}(t)\tilde{\varepsilon}(t) t^k dt, \quad \tilde{a}_k(r) = \int_0^{r} \tilde{v}(t)\tilde{\varepsilon}(t) t^k dt,$$

$$\tilde{b}_k(r, \varepsilon) = \int_{(1+\varepsilon)r}^{+\infty} \tilde{v}(t)\tilde{\varepsilon}(t) t^{-k-2} dt, \quad \tilde{b}_k(r) = \int_r^{+\infty} \tilde{v}(t)\tilde{\varepsilon}(t) t^{-k-2} dt.$$

Тоді для $z = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta < \pi$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-i\theta(k+1)} \frac{\tilde{a}_k(r, \varepsilon)}{r^{k+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-i\theta(k+1)} \frac{\tilde{a}_k(r)}{r^{k+1}}, \tag{6}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{i\theta(k+1)} \frac{\tilde{b}_k(r, \varepsilon)}{r^{-k+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{i\theta(k+1)} \frac{\tilde{b}_k(r)}{r^{-k+1}}. \tag{7}$$

Лема 4. *Нехай* $\eta(t)$ — *інтегровна функція на* $[0, +\infty)$, $\eta(t) \to 0$ *при* $t \to +\infty$, $\tilde{v}(t)$ *така, як в лемі* 3,

$$\tilde{A}_k(r) = \frac{1}{k+1}\int_0^r \tilde{v}(t)\tilde{\varepsilon}(t)\eta(t)t^k dt, \qquad \tilde{B}_k(r) = \frac{1}{k+1}\int_r^{+\infty} \tilde{v}(t)\tilde{\varepsilon}(t)\eta(t)t^{-k-2}dt.$$

Тоді

$$\Sigma_1^* = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k e^{-i\theta(k+1)}\frac{\tilde{A}_k(r)}{r^{k+1}} = o(\tilde{v}(r)\tilde{\varepsilon}(r)), \quad r \to +\infty, \tag{8}$$

$$\Sigma_2^* = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k e^{i\theta(k+1)}\frac{\tilde{B}_k(r)}{r^{-k+1}} = o(\tilde{v}(r)\tilde{\varepsilon}(r)), \quad r \to +\infty. \tag{9}$$

Доведення лем 2 – 4 не наводимо, оскільки воно аналогічне доведенню лем 1 – 3 з [5].

Лема 5. *Нехай виконуються умови леми* 3 *і*

$$\Sigma_1 = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k e^{-i\theta(k+1)}\tilde{a}_k(r)r^{-k-1},$$

$$\Sigma_2 = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k e^{i\theta(k+1)}\tilde{b}_k(r)r^{k+1}.$$

Тоді для $z = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta < \pi$,

$$-\Sigma_1 + \Sigma_2 = i\theta\tilde{v}(r)\tilde{\varepsilon}(r) + o(\tilde{v}(r)\tilde{\varepsilon}(r)), \quad r \to +\infty. \tag{10}$$

Доведення. Оскільки за лемою 1

$$(\tilde{v}(t)\tilde{\varepsilon}(t))' = \frac{1}{t}\frac{d^2\tilde{v}(t)}{d(\ln t)^2} = \frac{\eta(t)\tilde{v}(t)\tilde{\varepsilon}(t)}{t},$$

де $\eta(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, то проінтегрувавши частинами, одержуємо

$$\tilde{a}_k(r) = \frac{\tilde{v}(t)\tilde{\varepsilon}(t)}{k+1}t^{k+1}\Big|_0^r - \frac{1}{k+1}\int_0^r (\tilde{v}(t)\tilde{\varepsilon}(t))' t^{k+1}dt = \frac{\tilde{v}(r)\tilde{\varepsilon}(r)r^{k+1}}{k+1} - \tilde{A}_k(r).$$

Аналогічно

$$\tilde{b}_k(r) = \frac{\tilde{v}(r)\tilde{\varepsilon}(r)r^{-k-1}}{k+1} + \int_r^{+\infty}\frac{\tilde{v}(t)\tilde{\varepsilon}(t)\eta(t)}{t^{k+2}}dt =$$

$$= \frac{\tilde{v}(r)\tilde{\varepsilon}(r)r^{-k-1}}{k+1} - \tilde{B}_k(r).$$

Далі, враховуючи (8) та (9), отримуємо

$$-\Sigma_1 + \Sigma_2 = -\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k e^{-i\theta(k+1)}\frac{\tilde{v}(r)\tilde{\varepsilon}(r)}{k+1} + \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k e^{i\theta(k+1)}\frac{\tilde{v}(r)\tilde{\varepsilon}(r)}{k+1} +$$

$$+ \Sigma_1^* + \Sigma_2^* = \tilde{v}(r)\tilde{\varepsilon}(r)\left(-\ln(1+e^{-i\theta}) + \ln(1+e^{i\theta})\right) + o(\tilde{v}(r)\tilde{\varepsilon}(r)) =$$

$$= \tilde{v}(r)\tilde{\varepsilon}(r)\left(\ln e^{i\theta} + o(1)\right) = i\theta\,\tilde{v}(r)\tilde{\varepsilon}(r)(1+o(1)), \quad r \to +\infty,$$

що доводить лему 5.

Лема 6. *Нехай* $v(r) = r^{\lambda(r)}$, $\varepsilon(r) = \lambda(r) + r\lambda'(r)\ln r$,

$$a_k(r) = \int_0^r v(t)\varepsilon(t)t^k dt, \qquad b_k(r) = \int_r^{+\infty} v(t)\varepsilon(t)t^{-k-2}dt.$$

Тоді для θ, $-\pi < \theta < \pi$,

$$\Sigma_3 = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k e^{-i\theta(k+1)} r^{-k-1} a_k(r) = o(v(r)), \quad r \to +\infty, \tag{11}$$

$$\Sigma_4 = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k e^{i\theta(k+1)} r^{k+1} b_k(r) = o(v(r)), \quad r \to +\infty, \tag{12}$$

причому співвідношення (11) *та* (12) *виконуються рівномірно відносно* θ, $-\pi + \delta \le \theta < \pi - \delta$, $0 < \delta < 1$.

Доведення. Нехай

$$|\Sigma_3| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k e^{-i\theta(k+1)} r^{-k-1}\left(\int_0^{r/2} + \int_{r/2}^{r}\right)\frac{v(t)\varepsilon(t)}{t^{-k}}dt\right| \le$$

$$\le \frac{v(r)}{r}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}2^{-k}\right)\int_0^{r/2}|\varepsilon(t)|dt +$$

$$+ \left|\sum_{k=0}^{+\infty}\left((-1)^k e^{-i\theta(k+1)}\int_{r/2}^{r} v(t)\varepsilon(t)dt\right) r^{-k-1}\right| = J_1 + |J_2|.$$

Оскільки

$$\frac{1}{r}\int_0^{r/2}|\varepsilon(t)|dt = o(1), \quad r \to +\infty,$$

а

$$\sum_{k=0}^{+\infty}2^{-k} = 2,$$

то $J_1 = o(v(r))$, $r \to +\infty$.

Покладемо

$$\bar{\varepsilon}(r) = \sup\left\{|\varepsilon(t)|: \frac{r}{2} \le t \le r\right\},$$

$$u_k(r) = \frac{1}{r^{k+1}}\int_{r/2}^{r} v(t)\varepsilon(t)t^k dt, \qquad \omega_k(\theta) = (-1)^k e^{-i\theta(k+1)}.$$

Маємо

$$u_{k+1}(r) - u_k(r) = \frac{1}{r^{k+1}}\int_{r/2}^{r} v(t)\varepsilon(t)\left(\frac{t}{r} - 1\right)t^k dt < 0,$$

тобто $(u_k(r))_{k=0}^{+\infty}$ — спадна послідовність, а

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\omega_k(\theta)\right| = \left|\frac{e^{-i\theta}\left(1 - (-1)^{n+1}e^{-i\theta(n+1)}\right)}{1 + e^{-i\theta}}\right| \le \frac{1}{\sin(\delta/2)}$$

для всіх $n \geq 0$ і для всіх $\theta \in [-\pi + \delta, \pi + \delta]$. Таким чином, за ознакою Діріхле ряд

$$I_4 = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(r)\omega_k(\theta)$$

рівномірно збіжний відносно $\theta \in [-\pi + \delta, \pi - \delta]$. Далі, за нерівністю Абеля,

$$|S_n(r, \theta)| = \left|\sum_{k=0}^{n} u_k(r)\omega_k(\theta)\right| \leq \left|\sum_{k=0}^{n} \omega_k(\theta)\right| (|u_0(r)| + 2|u_n(r)|) \leq$$

$$\leq \frac{\tilde{\varepsilon}(r)v(r)}{\sin(\delta/2)}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{n+1}\right),$$

звідки одержуємо, що $I_2 = \lim\limits_{n \to \infty} S_n(r, \theta) = o(v(r)), \quad r \to +\infty$.

Доведемо рівність (12). Покладемо $\varepsilon^*(r) = \sup\{|\varepsilon(t)|: r \leq t \leq 2r\}$,

$$u_k^*(r) = r^{k+1}\int_r^{2r} v(t)\varepsilon(t)t^{-k-2}dt, \qquad \omega_k^*(\theta) = (-1)^k e^{i\theta(k+1)}.$$

Тоді

$$|\Sigma_4| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} \omega_k^*(\theta)\left(u_k^*(r) + r^{k+1} + \int_{2r}^{+\infty} v(t)\varepsilon(t)t^{-k-2}\,dt\right)\right| \leq$$

$$\leq \left|\sum_{k=0}^{+\infty} \omega_k^*(\theta)u_k^*(r)\right| + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k}\right) r\int_{2r}^{+\infty} v(t)\varepsilon(t)t^{-2}\,dt = |J_3| + J_4.$$

Оскільки інтеграл

$$I(r) = \int_{2r}^{+\infty} v(t)\varepsilon(t)t^{-2}\,dt$$

збіжний, то за допомогою правила Лопіталя неважко показати, що $rI(r) = o(v(r))$, $r \to +\infty$. Звідси $J_4 = o(v(r))$, $r \to +\infty$.

Ряд J_3 оцінюємо аналогічно ряду J_2. Послідовність $(u_k(r))_{k=0}^{+\infty}$ спадна, часткові суми ряду $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \omega_k^*(\theta)$ обмежені в сукупності для $\theta \in [-\pi + \delta, \pi + \delta]$, а отже, ряд J_4 рівномірно збіжний відносно θ. Далі

$$|S_n^*(r, \theta)| = \left|\sum_{k=0}^{n} u_k^*(r)\omega_k^*(\theta)\right| \leq \left|\sum_{k=0}^{n} \omega_k^*(\theta)\right| (|u_0(r)| + 2|u_n^*(r)|) \leq$$

$$\leq \frac{v(2r)\varepsilon^*(r)}{\sin(\delta/2)}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{n+1}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{v(2r)\varepsilon^*(r)}{2\sin(\delta/2)},$$

звідки одержуємо, що $J_4(r) = o(v(r))$, $r \to +\infty$. Лему 6 доведено.

Доведення теореми 1. Нехай f — ціла функція нульового порядку, $(-a_n)$ — послідовність її нулів, $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, що задовольняє умову (2). Тоді ряд $\sum_{n=0}^{+\infty}(1/a_n)$ збіжний і для $z = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta < \pi$, маємо

$$F(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{z+a_k} = \int_0^{+\infty} \frac{dn(t)}{z+t} = \frac{n(t)}{t+z}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{n(t)dt}{(t+z)^2} =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{n(t)-\Delta\tilde{v}(t)}{(z+t)^2}dt + \int_0^{+\infty} \frac{\tilde{v}(t)dt}{(z+t)^2} = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2.$$

Покладемо $\alpha(t) = \tilde{v}(t)\tilde{\varepsilon}(t)$, $\beta(t) = (n(t)-\Delta\tilde{v}(t))/\alpha(t)$. Тоді, завдяки опуклості функції $\tilde{v}(t)$ відносно логарифму, лемі 1 та співвідношенню (2), функція $\alpha(t)$ буде зростаючою, а $\beta(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. За лемою 2 одержуємо $\tilde{I}_1 = o(\tilde{v}(r)\tilde{\varepsilon}(r)/r)$, $r \to +\infty$.

Далі

$$\tilde{I}_2 = \Delta\left(\frac{1}{z^2}\int_0^r \frac{\tilde{v}(t)}{\left(1+\frac{t}{z}\right)^2}dt + \int_r^{+\infty} \frac{\tilde{v}(t)dt}{t^2\left(1+\frac{z}{t}\right)^2}\right) =$$

$$= \Delta\left(\frac{1}{z^2}\int_0^r \tilde{v}(t)\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(k+1)\left(\frac{t}{z}\right)^k dt + \int_r^{+\infty}\tilde{v}(t)t^{-2}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(k+1)\left(\frac{z}{t}\right)^k dt\right) =$$

$$= \frac{\Delta}{z}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(k+1)}{z^{k+1}}\int_0^{(1-\varepsilon)r}\tilde{v}(t)t^k dt + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(k+1)}{z^{-k-1}}\int_{(1+\varepsilon)r}^{+\infty}\tilde{v}(t)t^{-k-2}dt\right). \quad (13)$$

Оскільки

$$\int_0^{(1-\varepsilon)r}\tilde{v}(t)t^k dt = \frac{\tilde{v}(t)t^{k+1}}{k+1}\Big|_0^{(1-\varepsilon)r} - \frac{1}{k+1}\int_0^{(1-\varepsilon)r}\tilde{v}(t)\tilde{\varepsilon}(t)t^k dt =$$

$$= \frac{\tilde{v}((1-\varepsilon)r)((1-\varepsilon)r)^{k+1}}{k+1} - \frac{1}{k+1}\tilde{a}_k(r,\varepsilon)$$

і

$$\int_{(1+\varepsilon)r}^{+\infty}\tilde{v}(t)t^{-k-2}dt = \frac{\tilde{v}((1+\varepsilon)r)((1+\varepsilon)r)^{-k+1}}{k+1} + \frac{1}{k+1}\tilde{b}_k(r,\varepsilon),$$

то з (13), завдяки (6) та (7), отримуємо

$$\tilde{I}_2 = \frac{\Delta}{z}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(1-\varepsilon)^{k+1}}{e^{i\theta(k+1)}} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k e^{i\theta(k+1)}}{(1+\varepsilon)^{k+1}}\right)\tilde{v}(r) +$$

$$+ \frac{\Delta}{z}\left(-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{z^{k+1}}\tilde{a}_k(r) + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{z^{-k-1}}\tilde{b}_k(r)\right) =$$

$$= \frac{\Delta\tilde{v}(r)}{z}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1-\varepsilon}{e^{i\theta}}\frac{1}{1+(1-\varepsilon)e^{-i\theta}} + \frac{1+\varepsilon}{e^{-i\theta}}\frac{1}{1+(1+\varepsilon)e^{i\theta}}\right) + \frac{\Delta}{z}(-\Sigma_1+\Sigma_2) =$$

$$= \frac{\Delta\tilde{v}(r)}{z} + \frac{\Delta}{z}(-\Sigma_1+\Sigma_2). \quad (14)$$

Звідси, враховуючи (10), маємо (3), що доводить теорему 1.

Доведення теореми 2. Нехай f — ціла функція порядку нуль, нулі якої мають кутову щільність відносно функції порівняння $v(r) = r^{\lambda(r)}$, де $\lambda(r)$ — нульовий уточнений порядок функції $n(r)$. Припустимо спочатку, що всі нулі f від'ємні. Тоді, як і при доведенні теореми 1, маємо для всіх θ, $-\pi < \theta < \pi$ $(\Delta = \Delta(\pi))$

$$F(z) = \int_0^{+\infty} \frac{n(t) - \Delta v(t)}{(t+z)^2} dt + \Delta \int_0^{+\infty} \frac{v(t)}{(t+z)^2} dt = I_1 + I_2.$$

Покладаючи $\alpha(t) = v(t)$, $\beta(t) = (n(t) - \Delta v(t))/\alpha(t)$, за лемою 2 одержуємо $I_1 = = o(v(r)/r)$, $r \to +\infty$.

Інтеграл I_2 обчислюємо так, як інтеграл $\tilde{I}_2$ при доведенні теореми 1. Отримаємо (див. формулу (14))

$$I_2 = \frac{\Delta}{z} v(r) + \frac{\Delta}{z}(-\Sigma_3 + \Sigma_4),$$

де Σ_3, Σ_4 — такі, як в лемі 6.

Звідси, завдяки (11) та (12), маємо

$$I_2 = \frac{\Delta}{z} v(r) + o(v(r)), \qquad r \to +\infty,$$

що доводить теорему 2 у випадку, коли нулі функції f від'ємні.

Перехід до загального випадку здійснюється за відомою схемою (див., наприклад, [2, с. 65 – 71]), оскільки, як неважко показати, має місце аналог леми 1 з [2] для цілої функції нульового порядку, нулі якої задовольняють умову $n(r) \sim \Delta v(r)$, $r \to +\infty$. Таким чином, теорему 2 доведено.

Сформулюємо, накінець, наслідок з теореми 1 для випадку, коли нулі f лежать на скінченній системі променів (a_j — нулі f)

$$\bigcup_{j=0}^{m-1} \{z\colon \arg z = \varphi_j\}, \qquad -\pi \le \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_{m-1} < \pi. \tag{15}$$

Нехай

$$\eta_j(r) = \sum_{\substack{|a_j| \le r \\ \arg a_j = \varphi_j}} 1,$$

$\arg_{-\pi} z$ — значення многозначної функції

$$\operatorname{Arg} z \in [-\pi, \pi), \qquad \Delta_j > 0, \qquad j = \overline{0, m-1}, \qquad \Delta = \sum_{j=0}^{m-1} \Delta_j.$$

***Наслідок.** Нехай f — ціла функція нульового порядку, нулі якої лежать на скінченній системі променів* (15) *і*

$$\eta_j(r) = \Delta_j \tilde{v}(r) + o(\tilde{v}(r)\tilde{\varepsilon}(r)), \qquad r \to +\infty. \tag{16}$$

Тоді існує множина K нульової μ-щільності, $1 < \mu \le 2$, така, що при $z \in \in \mathbb{C} \setminus K$ рівномірно відносно $\theta \in [-\pi, \pi)$ виконується ($r \to +\infty$)

$$F(z) = \frac{\Delta \tilde{v}(r)}{z} + i \sum_{j=0}^{m-1} \Delta_j \arg_{-\pi} e^{i(\theta - \varphi_j - \pi)} \frac{\tilde{v}(r)\tilde{\varepsilon}(r)}{z}(1 + o(1)). \tag{17}$$

Доведення. Дійсно, якщо нулі f лежать на промені $\{z\colon \arg z = \varphi\}$, то, як і при доведенні теореми 1, маємо $(\varphi < \theta < \varphi + 2\pi)$

$$F(z) = \frac{\Delta\tilde{v}(r)}{z} + i(\theta - \varphi - \pi)\frac{\Delta}{z}\tilde{v}(r)\tilde{\varepsilon}(r) + o\left(\frac{\tilde{v}(r)\tilde{\varepsilon}(r)}{r}\right), \qquad r \to +\infty.$$

Цю рівність можна записати у вигляді $(-\pi < \theta < \pi)$

$$F(re^{i\theta}) = \frac{\Delta\tilde{v}(r)}{z} + \frac{i\Delta}{z}\arg_{-\pi} e^{i(\theta-\varphi-\pi)}\tilde{v}(r)\tilde{\varepsilon}(r) + o\left(\frac{\tilde{v}(r)\tilde{\varepsilon}(r)}{r}\right), \qquad r \to \infty.$$

Звідси, враховуючи леми 2 та 3 з [2], одержуємо (17).

Зауваження. Відмовитись від умови розташування нулів на скінченній системі променів в наслідку не можемо, тому що аналог апроксимаційної леми 1 з [2] дає наближення $F(z)$ з точністю $o(\tilde{v}(r)/r)$, а не з точністю $o(\tilde{v}(r)\tilde{\varepsilon}(r)/r)$, $r \to +\infty$.

1. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 632 с.
2. *Гольдберг А. А., Коренков Н. Е.* Асимптотика логарифмической производной целой функции вполне регулярного роста // Сиб. мат. журн. – 1980. – **21**, № 3. – С. 63 – 79.
3. *Гольдберг А. А., Коренков Н. Е.* Об асимптотике логарифмической производной целой функции вполне регулярного роста // Укр. мат. журн. – 1978. – **30**, № 1. – С. 25 – 32.
4. *Гольдберг А. А., Заболоцкий Н. В.* Индекс концентрации субгармонической функции нулевого порядка // Мат. заметки. – 1983. – **34**, № 2. – С. 227 – 236.
5. *Заболоцький М. В.* Теореми типу Валірона та Валірона – Тітчмарша для цілих функцій нульового порядку // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 3. – С. 315 – 325.

Одержано 30.01.97