УДК 512.546

Е. Г. Зеленюк (Луцк. индустр. ин-т)

РАЗЛОЖИМОСТЬ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП

We prove that every countable Abelian group with a finite number of second order elements can be decomposed into countable number of subsets which are dense in any nondiscrete group topology.

Доведено, що кожну зчисленну абелеву групу з скінченним числом елементів порядку 2 можна розбити на зчисленне число підмножин щільних у будь-якій недискретній груповій топології.

Введение. Топологическая группа называется неразложимой ($\aleph_0$-неразложимой), если ее нельзя разбить на два (на $\aleph_0$) плотных подмножества. В работе [1] В. В. Комфорт и Я. ван Милл доказали, что недискретная неразложимая топологическая абелева группа содержит бесконечную булеву подгруппу. Булевой называется группа периода 2. Эквивалентная формулировка теоремы Комфорта – Милла: недискретная топологическая абелева группа с конечным числом элементов порядка 2 разложима. Ранее В. И. Малыхин в предположении аксиомы Мартина построил на счетной булевой группе групповую топологию с единственным свободным сходящимся к нулю ультрафильтром [2]. Группа Малыхина неразложима. Следовательно, каждая абелева группа, содержащая бесконечную булеву подгруппу, в предположении аксипмы Мартина допускает недискретную неразложимую групповую топологию. „Наивные" примеры недискретных неразложимых топологических групп неизвестны. Это одна из проблем, поставленных в [1]. Далее теорема Комфорта – Милла была усилена И. В. Протасовым следующим образом: недискретная неразложимая топологическая абелева группа содержит открытую счетную булеву подгруппу [3]. Недискретная топологическая абелева группа с конечным числом элементов порядка 2 $\aleph_0$-разложима [4].

Группа называется абсолютно разложимой (абсолютно $\aleph_0$-разложимой), если ее можно разбить на два (на $\aleph_0$) подмножества, плотные в любой недискретной групповой топологии. Проблема описания абсолютно разложимых групп была поставлена в [1]. И. В. Протасов, используя различные методы, доказал абсолютную разложимость и абсолютную $\aleph_0$-разложимость многих групп. Один из наиболее тонких результатов в этом направлении — абсолютная разложимость группы рациональных чисел $\mathbb{Q}$ [5]. Однако уже вопросы об абсолютной разложимости $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$ и абсолютной $\aleph_0$-разложимости $\mathbb{Q}$ оставались открытыми.

Основные результаты данной работы составляют две теоремы, в которых установлено, что в классе абелевых и в классе счетных периодических групп каждая недискретная $\aleph_0$-неразложимая группа содержит открытую счетную булеву подгруппу и каждая счетная абелева группа с конечным числом элементов порядка 2 абсолютно $\aleph_0$-разложима. Обе теоремы доказываются единым методом, берущим начало с работы [6]. Этому методу посвящен первый пункт. Во втором пункте с его помощью доказываются основные теоремы. Все топологии предполагаются хаусдорфовыми.

1. Локальные левотопологические группы и их автоморфизмы. Левотопологической группой называется группа, снабженная топологией, в которой непрерывны левые сдвиги. Топологическое пространство X с выделенным элементом e (единицей) и частичной бинарной операцией (умножением) называется локальной левотопологической группой, если существует левотопологическая группа G такая, что 1) e — единица G, 2) X — открытая окрестность $e \in G$, 3) частичное умножение на X — это в точности частичная операция, индуцированная на X умножением на G.

Локальная левотопологическая группа X называется регулярной (счетного характера), если пространство X регулярно (имеет счетную базу окрестностей единицы). Регулярность пространства означает наличие в каждой точке базы из замкнутых окрестностей. Для счетных пространств регулярность эквивалентна нульмерности — наличию в каждой точке базы из открыто-замкнутых окрестностей. Существуют нерегулярные левотопологические группы.

Пример. Пусть (G, τ) — левотопологическая группа, содержащая последовательность $\{a_n \colon n < \omega\}$ неединичных элементов, сходящихся к единице, τ' — топология на G, базу которой образуют множества вида $x(U \setminus \{a_n \colon n < \omega\})$, где $x \in G$, U — открытая окрестность единицы (G, τ). Тогда (G, τ') — левотопологическая группа, любая замкнутая окрестность единицы которой содержит почти всю последовательность $\{a_n \colon n < \omega\}$. Следовательно, (G, τ') не регулярна.

Пусть X, Y — локальные левотопологические группы. Отображение $f \colon X \to Y$ называется гомоморфизмом, если для любого $x \in X$ найдется окрестность U единицы $e_X \in X$ такая, что для всех $z \in U$ произведения xz, $f(x)f(z)$ определены и $f(xz) = f(x)f(z)$. Если $f \colon X \to Y$ — гомоморфизм, то $f(e_X) = e_Y$. Инъективный гомоморфизм называется изоморфизмом. Топологический изоморфизм локальной левотопологической группы на себя называется автоморфизмом. Порядком автоморфизма $f \colon X \to Y$ называется $\inf \sup \{|O(x)| \colon x \in U\}$, где $O(x)$ — орбита x относительно f, а $\inf$ берется по всевозможным окрестностям единицы U. Автоморфизм порядка больше 1 называется нетривиальным. Автоморфизм называется однородным, если орбита всех неединичных элементов равномощны.

Лемма 1. *Пусть G — недискретная топологическая группа без открытых булевых подгрупп. Тогда на G существует нетривиальный автоморфизм. Если G абелева либо периодическая, то на G существует нетривиальный автоморфизм конечного порядка.*

Доказательство. Для каждого элемента $a \in G$ рассмотрим автоморфизм $x \mapsto a^{-1}xa$. Предположим, что каждый такой автоморфизм тривиален. Это означает, что для любого элемента $a \in G$ найдется окрестность единицы U такая, что $az = za$ для всех $z \in U$. Покажем, что отображение $x \mapsto x^{-1}$ будет автоморфизмом. Пусть x — произвольный элемент из G, U — окрестность единицы такая, что $xz = zx$ для всех $z \in U$, тогда $(xz)^{-1} = z^{-1}x^{-1} = x^{-1}z^{-1}$. Поскольку G без открытых булевых подгрупп, то этот автоморфизм нетривиален.

Лемма 2. *Пусть X — недискретная локальная левотопологическая группа, f — автоморфизм на X конечного порядка m. Существует недискретная локальная левотопологическая группа X_0, однородный автоморфизм f_0 на X_0 порядка m и непрерывный автоморфизм $h \colon X_0 \to X$ такие, что $h \cdot f_0 = f \cdot h$. Причем, если X регулярна, то X_0 также можно выбрать регулярной.*

Доказательство. Выделяя в X достаточно малую открытую окрестность единицы, можно считать, что для любого $x \in X$, $|O(x)| \le m$. Рассмотрим множество $M = \{x \in X \colon |O(x)| = m\}$. Оно открыто. Следовательно, для любого $x \in M$ найдется окрестность единицы U такая, что $xU \subseteq M$. Кроме этого, $e \in \overline{M}$. Пусть $X_0 = \{e\} \cup M$, $h \colon X_0 \to X$ — естественное вложение,

$f_0 = f|_{X_0}$. Снабдим X_0 топологией, объявив окрестностями точки $x \in X_0$ множества вида $x(U \cap X_0)$, где U — достаточно малая окрестность $e \in X$. Тогда X_0 — недискретная локальная левотопологическая группа, причем, если X регулярна, то регулярна и X_0, $h: X_0 \to X$ — непрерывный изоморфизм, $f_0: X_0 \to X_0$ — однородный автоморфизм порядка m, $h \cdot f_0 = f \cdot h$.

Пусть $\mathbb{Z}(m+1) = \{0, 1, \ldots, m\}$ — циклическая группа порядка m, g — подстановка на $\mathbb{Z}(m+1)$, заданная циклом $(1, \ldots, m)$, $\bigoplus_\omega \mathbb{Z}(m+1)$ — прямая сумма ω экземпляров $\mathbb{Z}(m+1)$, снабженная обычной топологией суммы l, r — отображения, сопоставляющие каждому ненулевому элементу из $\bigoplus_\omega \mathbb{Z}(m+1)$ номер первой и последней ненулевой координаты. Подстановка g на $\mathbb{Z}(m+1)$ естественно индуцирует подстановку на $\bigoplus_\omega \mathbb{Z}(m+1)$. Будем обозначать ее также g. Очевидно, что g — гомеоморфизм, $g(0) = 0$ орбиты всех ненулевых элементов m-элементы и для любых $a, b \in \bigoplus_\omega \mathbb{Z}(m+1)$ таких, что $r(a) < l(b)$, имеем $g(a+b) = g(a) + g(b)$. Следовательно, g — однородный автоморфизм порядка m на локальной левотопологической группе $\bigoplus_\omega \mathbb{Z}(m++1)$.

Теорема 1. *Пусть X — счетная недискретная регулярная локальная левотопологическая группа, f — однородный автоморфизм на X порядка m. Существует непрерывный изоморфизм $h: X$ на $\bigoplus_\omega \mathbb{Z}(m+1)$ такой, что*

1) *если $x, y \in X$ и $r(h(x)) + 1 < l(h(y))$, то произведение xy определено и $h(xy) = h(x) + h(y)$,*

2) $h \cdot f = g \cdot h$.

Если X счетного характера, то непрерывный изоморфизм h можно сделать топологическим.

Доказательству теоремы 1 предпошлем следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть X — счетное регулярное пространство, f — гомеоморфизм на X, относительно которого каждый элемент из X имеет m-элементную орбиту. Тогда существует разбиение X на открыто-замкнутые множества $A_1, \ldots, A_m$ такие, что $f(A_1) = A_2$, $f(A_2) = A_3, \ldots, f^{m-1}(A_m) = A_1$.*

Доказательство. Занумеруем элементы множества X натуральными числами: $X = \{x_n : n < \omega\}$. Рассмотрим орбиту $\{x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)\}$ элемента x_0. Выберем открыто-замкнутую окрестность U_0 элемента x_0 такую, что множества $U_0, f(U_0), \ldots, f^{m-1}(U_0)$ дизъюнктны, и положим

$$A_1^0 = U_0, \quad A_2^0 = f(U_0), \ldots, A_m^0 = f^{m-1}(U_0), \quad X_0 = A_1^0 \cup \ldots \cup A_m^0.$$

Далее, в последовательности $\{x_n : n < \omega\}$ ищем первый элемент, который не принадлежит множеству X_0. Не умаляя общности, пусть это будет x_1. Выбираем открыто-замкнутую окрестность $U_1 \subset X \setminus X_0$ элемента x_1 такую, что множества $U_1, f(U_1), \ldots, f^{m-1}(U_1)$ дизъюнктны, и полагаем

$$A_1^1 = A_1^0 \cup U_1, \quad A_2^1 = A_2^0 \cup f(U_1), \ldots, A_m^1 = A_m^0 \cup f^{m-1}(U_1),$$

$$X_1 = A_1^1 \cup \ldots \cup A_m^1.$$

Продолжая таким образом, построим возрастающие последовательности множеств $\{A_1^n : n < \omega\}, \ldots, \{A_m^n : n < \omega\}$, объединения которых $A_1 = \bigcup\{A_1^n : n<\omega\}, \ldots, A_m = \bigcup\{A_m^n : n<\omega\}$ и будут требуемыми множествами.

Доказательство теоремы **1.** Пусть F — полугруппа слов в алфавите $\mathbb{Z}(m+1)$ с пустым словом ε, L_n — множество всех слов из F длины n, S_j^n — множество всех слов из L_n, в которых первые j букв нулевые, а остальные ненулевые,

$$0 \le j \le n, \quad S_n^n = \{\theta_n\}, \quad S_n = \bigcup\{S_j^n : j \le n\}, \quad S = \bigcup\{S_n : n<\omega\}.$$

Подстановка g на $\mathbb{Z}(m+1)$ естественно индуцирует подстановку на F. Будем обозначать ее также g. Очевидно, что все множества S_j^n, S_n, L_n, S инвариантны относительно g и орбиты всех непустых слов из F, отличных от θ_n, m — элементы. Пусть s — произвольное слово из F. Если $s \in S$, то положим $s' = \varepsilon$, $s^* = s$. Если же $s \in F\backslash S$, то s однозначно раскладывается в произведение $s_1 \ldots s_{k+1}$, где

$$s_1 \in S_{j_1}^{n_1}, \ldots, s_{k+1} \in S_{j_{k+1}}^{n_{k+1}}, \quad 0 \le j_1 < n_1, \quad 0 < j_2 < n_2, \ldots,$$
$$0 < j_k < n_k, \quad 0 < j_{k+1} \le n_{k+1}.$$

В этом случае положим $s' = s_1 \ldots s_k$, $s^* = \theta_{n_1+\ldots+n_k} s_{k+1}$.

Пусть $X = \{e, x_1, x_2, \ldots\}$. Каждому слову $s \in F$ сопоставим непустое открыто-замкнутое подмножество $X(s) \subseteq X$ и точку $x(s) \in X(s)$ такие, что $X(\varepsilon) = X$, $x(\varepsilon) = e$ и для каждого $n \ge 1$ выполняются следующие условия:

$1)_n$ для каждого $s \in S_{n+1}$ множества $X(s-1)$, $i \le m$, образуют разбиение $X(s)$, $x(s0) = x(s)$,

$2)_n$ для всех $s \in S_{n-1}$, $y \in X(\theta_n)$ произведения $x(s)y$ определены и $f(x(s)y) = f(x(s))f(y)$,

$3)_n$ для каждого $s \in S_n$ $f(X(s)) = X(g(s))$, $f(x(s)) = x(g(s))$,

$4)_n$ для каждого $s \in L_n$ $X(s) = x(s')X(s^*)$, $x(s) = x(s')x(s^*)$,

$5)_n$ $x_n \in \{x(s) s \in L_n\}$.

Выберем открыто-замкнутую инвариантную (относительно f) окрестность единицы U_1 такую, что $x_1 \notin U_1$. Тогда множество $X\backslash U_1$ также открыто-замкнуто и инвариантно. Согласно лемме 3 его можно разбить на открыто-замкнутые подмножества $A_1, \ldots, A_m$ такие, что $f(A_1) = A_1$, $f(A_2) = A_3, \ldots, f(A_m) = A_1$. Выберем элемент $a \in A_1$ такой, что $x_1 \in O(a)$. Положим

$$X(0) = U_1, \quad X(1) = A_1, \quad X(2) = A_2, \ldots, X(m) = A_m,$$

$$x(0) = e, \quad X(1) = a, \quad X(2) = f(a), \ldots, x(m) = f^{m-1}(a).$$

Фиксируем $n \ge 1$ и предположим, что уже определены $X(s), x(s)$ для всех $s \in \bigcup\{L_j : j \le n\}$, причем выполняются условия $1_j - 5_j$ для всех $j \le n$. Определим $X(s), x(s)$ для $s \in L_{n+1}$.

Покажем, что в условиях $1_n - 5_n$ можно S заменить на L:

1) $x(s0) = x((s0)')x((s0)^*) = x(\bar{s})x(\theta_n) = x(s)e = x(s)$ ($\bar{s}$ — слово, полученное из s удалением нулевого хвоста),

$$X(s0) = x((s0)')X((s0)^*) = x(s)X(\theta_n) = x(s')x(s^*)X(\theta_n) = x(s')X(s^*0),$$

$$X(si) = x((si)')X((si)^*) = x(s')X(s^*i), \quad 1 \le i \le m;$$

2) $f(x(s)y) = f(x(s')x(s^*)y) = f(x(s'))f(x(s^*)y) = f(x(s'))f(x(s^*))f(y) = f(x(s')x(s^*))f(y) = f(x(s))f(y)$;

3) $f(x(s)) = f(x(s')x(s^*)) = f(x(s'))f(x(s^*)) = x(g(s'))x(g(s^*)) = x(g(s))$.

Рассмотрим разбиение множества X множествами $X(s)$, $s \in L_n$. Одно из них, скажем $X(s_0)$, содержит x_{n+1}. Поскольку $X(s_0) = x(s_0')X(s_0^*)$, то существует $y_{n+1} \in X(s_0^*)$ такой, что $x_{n+1} = x(s_0')y_{n+1}$. Выберем открыто-замкнутую инвариантную окрестность единицы U_{n+1} такую, что для всех $s \in S_n$, $y \in U_{n+1}$ произведения $x(s)y$ определены, $f(x(s)y) = f(x(s))f(y)$, $x(s)U_{n+1} \subset X(s)$ и $y_{n+1} \notin x(s_0^*)U_{n+1}$, если $y_{n+1} \ne x(s_0^*)$.

Разберемся вначале с множеством $X(\theta_n)$. Разобьем множество $X(\theta_n) \setminus U_{n+1}$ на открыто-замкнутые подмножества $B_1, \dots, B_m$ такие, что $f(B_1) = B_2$, $f(B_2) = B_3, \dots, f(B_m) = B_1$ (лемма 3). Выберем элемент $b \in B_1$ такой, что $y_{n+1} \in O(b)$, если $s_0^* = \theta_n$. Положим

$$X(\theta_n 0) = U_{n+1}, \quad X(\theta_n 1) = B_1, \quad X(\theta_n 2) = B_2, \dots, X(\theta_n m) = B_m,$$

$$x(\theta_n 0) = e, \quad x(\theta_n 1) = b, \quad x(\theta_n 2) = f(b), \dots, x(\theta_n m) = f^{m-1}(b).$$

Пусть теперь p — произвольное слово из S_n, отличное от θ_n, $O(p)$ — его орбита. Разобьем множество $X(p) \setminus x(p)U_{n+1}$ произвольно на открыто-замкнутые подмножества $C_1, \dots, C_m$ и выберем элементы $c_1 \in C_1, \dots, c_m \in C_m$ такие, что $y_{n+1} \in O(c_1) \cup \dots \cup O(c_m)$, если $y_{n+1} \in \bigcup\{O(x) \colon x \in X(p) \setminus x(p)U_{n+1}\}$. Положим

$$X(p0) = x(p)U_{n+1}, \quad X(p1) = C_1, \dots, X(pm) = C_m,$$

$$x(p0) = x(p), \quad x(p1) = c_1, \dots, x(pm) = c_m.$$

Для $s \in O(p) \setminus \{p\}$ $X(s), x(s)$ определим условием 3_{n+1}.

После того, как $X(s), x(s)$ определены для всех $s \in S_{n+1}$, определим $X(s)$, $x(s)$ для всех $s \in L_{n+1} \setminus S_{n+1}$ условием 4_{n+1}. Заметим, что если $x_{n+1} \notin \{x(s) \colon s \in L_n\}$, то $x_{n+1} = x(s_0')y_{n+1} = x(s_0')x(s_0^* i) = x(s_0 i)$ для некоторого $i \ne 0$.

Из условия 5_n следует, что построенное отображение $F \ni s \mapsto x(s) \in X$ сурьективно. Оно индуцирует биекцию $h \colon X \to \bigoplus_{\omega} \mathbb{Z}(m+1)$ ($h(x(s))$ получается из s приписыванием нулевого хвоста).

Поскольку множества $X(s), X(s0), X(s00), \dots$ — окрестности точки $x(s)$, то биекция h непрерывна. Условия 1, 2 следуют из 4_n, 3_n, в частности, h — изоморфизм. Если X счетного характера, то последовательность $X(\theta_1)$, $X(\theta_2), \dots$ можно сделать базой окрестностей единицы и тогда h будет гомеоморфизмом.

2. Основные результаты. Топологическое пространство называется разложимым ($\aleph_0$-разложимым), если его можно разбить на два (на $\aleph_0$) плотных подмножества. Отметим следующие простые утверждения о разложимости.

1. Непрерывный инъективный образ разложимого ($\aleph_0$-разложимого) пространства разложим ($\aleph_0$-разложим).

2. Замыкание разложимого ($\aleph_0$-разложимого) подпространства разложимо ($\aleph_0$-разложимо).

3. Если однородное пространство содержит разложимое ($\aleph_0$-разложимое) подпространство, то оно и само разложимо ($\aleph_0$-разложимо).

Первые два утверждения очевидны, третье легко следует из леммы Куратовского — Цорна, утверждения 2 и однородности.

Теорема 2. *Пусть* (X, τ) *— счетная недискретная регулярная локальная левотопологическая группа,* f *— нетривиальный однородный автоморфизм на* (X, τ) *конечного порядка. Тогда существует разбиение множества* X *на счетное число подножеств, плотных в любой недискретной топологии* τ' *на* X *такой, что*

1) (X, τ') *— локальная левотопологическая группа,*

2) f *— непрерывное отображение в топологии* τ',

3) *каждая окрестность единицы в топологии* τ' *нетривиально пересекает каждую окрестность единицы в топологии* τ.

Доказательство. Пусть m — порядок автоморфизма f, $h: X \to \bigoplus_{\omega} \mathbb{Z}(m+1)$ — непрерывный изоморфизм, предоставляемый теоремой 1. Для каждого элемента $x \in X$ через $\delta(x)$ обозначим количество пар соседних элементов в последовательности ненулевых координат $h(x)$, отличных от пар (a, a), где $a \in \{1, \ldots, m\}$.

Заметим что для любого $x \in X$ $\delta(x) = \delta(f(x))$ и для любых $x, y \in X$ таких, что $r(h(x)) + 1 < l(h(y))$,

$$\delta(xy) = \begin{cases} \delta(x) + \delta(y), & \text{если } \rho(x) = \lambda(y), \\ \delta(x) + \delta(y) + 1, & \text{если } \rho(x) \neq \lambda(y), \end{cases}$$

где $\lambda(x)$, $\rho(x)$ — первая и последняя ненулевые координаты $h(x)$. Следовательно, для любых $x, y \in X$ таких, что $r(h(x)) + 1 < l(h(y))$, существует $i < m$ такое, что

$$\delta\left(xf^i(y)\right) = \delta(x) + \delta(y), \qquad \delta\left(xf^{i+1}(y)\right) = \delta(x) + \delta(y) + 1,$$

Положим

$$X_n = \left\{x \in X: \delta(x) \neq 0,\ \delta(x) \equiv 2^n (\mathrm{mod}\ 2^{n+1})\right\}.$$

Иными словами, X_n — множество всех таких $x \in X$, что $\delta(x) \neq 0$ и разложение числа $\delta(x)$ на простые множители содержит n 2-ек. Очевидно, что множества X_n образуют разбиение множества $X \setminus \{x \in X, \delta(x) = 0\}$. Покажем, что каждое X_n плотно в (X, τ'). Рассмотрим произвольный элемент $x \in X$ и окрестность единицы U в топологии τ'. Пложим $k = 2^{n+1} - 1$ и выберем в U элементы $x_1, \ldots, x_k$ такие, что

1) $r(h(x)) + 1 < l(h(x_1))$, $r(h(x_j)) + 1 < l(h(x_{j+1}))$,

2) $y_1, \ldots, y_k \in U$ для любых $y_j \in O(x_j) = \left\{x_j, f(x_j), \ldots, f^{m-1}(x_j)\right\}$.

Тогда среди элементов $xy_1 \ldots xy_k \in xU$, где $y_j \in O(x_j)$, обязательно имеется элемент из X_n.

Из леммы 2 и теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Если на счетной недискретной регулярной локальной левотопологической группе существует нетривиальный автоморфизм конечного порядка, то она* $\aleph_0$*-разложима.*

Дисперсионным характером точки в топологическом пространстве называется наименьшая из мощностей баз ее окрестностей.

И. В. Протасов доказал, что каждую несчетную абелеву группу можно разбить на счетное число подмножеств, плотных в любой недискретной групповой топологии несчетного дисперсионного характера. Следовательно, каждая $\aleph_0$-неразложимая абелева группа имеет счетный дисперсионный характер [4]. Отсюда, из леммы 1 и из следствия 1 вытекает справедливость такого утверждения.

Следствие 2. *В классе абелевых и в классе счетных периодических групп каждая недискретная* $\aleph_0$*-неразложимая группа содержит открытую счетную булеву подгруппу.*

Вопрос 1. Верно ли, что каждую несчетную группу можно разбить на счетное число подмножеств, плотных в любой недискретной групповой топологии несчетного дисперсионного характера ?

Вопрос 2. Верно ли, что каждая счетная недискретная $\aleph_0$-неразложимая группа содержит открытую булеву подгруппу ?

Группа называется абсолютно разложимой (абсолютно $\aleph_0$-разложимой), если ее можно разбить на два (на $\aleph_0$) подмножества, плотные в любой недискретной групповой топологии.

Следствие 3. *Каждая счетная абелева группа с конечным числом элементов порядка* 2 *абсолютно* $\aleph_0$*-разложима.*

Доказательство. Пусть G — произвольная счетная абелева группа с конечным числом элементов порядка 2. Снабдим ее какой-то групповой предкомпактной топологией τ. Пусть X — подмножество из (G, τ) всех элементов порядков $\neq 2$, f — отображение на X, заданное правилом $x \mapsto -x$. Применим к локальной левотопологической группе X и однородному автоморфизму f на X 2-го порядка теорему 2. Получим разбиение X на счетное число подмножеств. Каждое из этих подмножеств плотно в (G, τ') для любой недискретной групповой топологии τ' на G. Для этого достаточно доказать, что каждая окрестность нуля в топологии τ' нетривиально пересекает каждую окрестность нуля в топологии τ. Допустим противное: для некоторых окрестностей нуля U, U' в топологиях τ, τ' соответственно $U \cap U' = \{0\}$. Выберем окрестности нуля V, V' в топологиях τ, τ' такие, что $V - V \subseteq U$, $V' - V' \subseteq U'$. Тогда для любых различных $a, b \in V'$ $(a + V) \cap (b + V) = \emptyset$ (если бы это было не так, то имели бы $(V' - V') \cap (V - V) \neq \{0\}$). Следовательно, τ не предкомпактна.

Вопрос 3. Существует ли бесконечная (счетная) группа с конечным числом элементов порядка 2, не являющаяся абсолютно $\aleph_0$-разложимой ?

1. *Comfort W. W., van Mill J.* Groups with only resolvable group topologies // Proc. Amer. Math. Soc. – 1994. – **120**, № 3. – P. 687 – 696.
2. *Малыхин В. И.* Экстремально несвязные и близкие к ним группы // Докл. АН СССР. – 1975. – **220**, № 1. – С. 27 – 30.
3. *Протасов И. В.* Абсолютно разложимые группы // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 3. – С. 383 – 392.
4. *Протасов И. В.* Разбиения прямых произведений групп // Там же. – 1997. – **49**, № 10. – С. 1385 – 1395.
5. *Протасов И. В.* Абсолютная разложимость группы рациональных чисел // Там же. – 1996. – **48**, № 12. – С. 1953 – 1956.
6. *Зеленюк Е. Г.* Конечные группы в $\beta\mathbb{N}$ тривиальны. – Киев, 1996. – 12 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; № 96.3).

Получено 05.11.96