УДК 517.9

С. Ф. Коляда (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЧУТЛИВІСТЬ ЛІ – ЙОРКА ТА ІНШІ КОНЦЕПЦІЇ ХАОСУ

This is a survey article on the theory of chaos of a topological dynamical system given by a continuous selfmap of a compact metric space.

Наведено стислий огляд з теорії хаосу для топологічних динамічних систем, що задаються неперервними відображеннями на компактних метричних просторах.

Термін *хаос* по відношенню до динамічної системи, що задається неперервним відображенням, уперше використали T. Li та J. Yorke [1]. Сьогодні означень, що асоціюються з цим терміном, настільки багато, що досить часто в математиків слово *хаос* викликає певну іронічну посмішку. Існує дуже багато підходів (означень) до того, що означає для деякого відображення бути хаотичним; деякі з них працюють суттєво лише на спеціальних просторах. Незважаючи на те, що хтось може сказати: „Скільки авторів, стільки й означень", основою всіх концепцій, як правило, є ідея непередбачуваності поведінки всіх чи багатьох траєкторій, чи хоча б однієї, коли позиція точки з цілої траєкторії розглядається з певною похибкою (нестійкість чи чутлива залежність від початкових умов — терміни, що, як правило, використовуються для опису цього феномену). Оскільки мова йтиме про топологічну динаміку, то ми не будемо розглядати концепції, що вимагають гладкості відображення, як і майже не використовуватимемо такі міро-теоретичні поняття, як ергодичність. Робота є стислим оглядом з теорії хаосу, написана в основному на базі препринту [2] та статті [3] і, звичайно, не охоплює всі її аспекти.

1. Про концепції хаосу для неперервних відображень відрізка. Поява праці [1] стимулювала дослідження одновимірних відображень, теорія яких на даний час розвинута досить суттєво в багатьох аспектах (див. [4 – 7]). Зупинимось коротко на деяких із тих моментів теорії хаосу для неперервних відображень відрізка, що мають безпосереднє відношення до загального випадку, який ми будемо розглядати пізніше (детальніше див. [7 – 9]).

1.1. Поява слова хаос у математичній літературі по відношенню до відображення. Слово *хаос* T. Li та J. Yorke використали, не надавши йому формального означення. У праці [1] вони пишуть: „ ... У цій роботі ми аналізуємо ситуацію, в якій послідовність $\{F^n(x)\}$ є не періодичною і може називатись „хаотичною" ...". Основний математичний результат роботи, зокрема, стверджує: нехай неперервне відображення $f \in C(I)$, де I — відрізок прямої, має періодичну точку періоду 3, тоді: 1) f має періодичну точку будь-якого періоду $k = 1, 2, \ldots$; 2) існує незліченна підмножина $S \subset I$, що не містить періодичних точок і задовольняє такі умови:

а) для довільних двох різних точок $x \neq y \in S$ $\liminf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0$, але $\limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0$;

б) для довільних точок $x \in S$ та періодичної $p \in I$ $\limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(p)| > 0$.

Насправді на той час на Заході не знали, що перша частина результату T. Li та J. Yorke є лише частковим випадком більш загальної теореми, яку довів більш ніж за 10 років до цього О. М. Шарковський (зараз відомої як теорема Шарковського). Нагадаємо коротко про неї. Розглянемо такий порядок (Шарковського) на множині $\mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$:

$$3 \succ 5 \succ 7 \succ \dots \succ 2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \succ \dots \succ 4 \cdot 3 \succ 4 \cdot 5 \succ 4 \cdot 7 \succ \dots \succ \dots$$

$$\dots \succ 2^n \cdot 3 \succ 2^n \cdot 5 \succ 2^n \cdot 7 \succ \dots \succ \dots \succ 2^\infty \succ \dots \succ 2^n \succ \dots \succ 4 \succ 2 \succ 1.$$

Нехай для $t \in \mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$ $S(t) = \{k \in \mathbb{N} : t \succeq k\}$[1] ($S(2^\infty)$ — позначення для множини $\{1, 2, 4, \dots, 2^k, \dots\}$) і для $f \in C(I)$ $\mathrm{P}(f)$ — множина періодів його періодичних точок.

Теорема Шарковського [10–12]. *Для будь-якого $f \in C(I)$ існує $t \in \mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$ з $\mathrm{P}(f) = S(t)$. І навпаки, для довільного $t \in \mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$ існує $f \in C(I)$ з $\mathrm{P}(f) = S(t)$.*

Якщо $\mathrm{P}(f) = S(t)$, то говорять, що f має *тип* t. Коли говорять про типи, то розглядають їх впорядкованими за порядком Шарковського. Так, деколи відображення $f \in C(I)$ називають топологічно хаотичним, якщо його тип є більшим ніж 2^∞ (у даному випадку це еквівалентно додатності топологічної ентропії f, див. [4, с. 231]).

1.2. Хаос Лі – Йорка, одновимірний випадок. Як ми вже відмічали, означення хаосу Лі – Йорка для неперервних відображень відрізка було базисно зафіксовано в [1]. Легко бачити, що в незліченній множині S щонайбільше для однієї точки $x \in S$ може існувати періодична точка $p \in I$ така, що $\limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(p)| = 0$. Тобто, іншими словами, умову б) можна відкинути і розглядати хаос Лі – Йорка лише як існування незліченної множини S з властивістю а).

Пізніше було також доведено, що властивість хаотичності за Лі – Йорком мають всі неперервні відображення відрізка, тип яких є більшим ніж 2^∞, деякі неперервні відображення відрізка, тип яких 2^∞ (див. [13, 14]), та знайдено інші еквівалентні означення [15]. Нарешті, в [16] показано, що відображення $f \in C(I)$ є хаотичним за Лі – Йорком тоді і тільки тоді, коли існують дві точки $x, y \in I$ такі, що $\liminf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0$, але $\limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0$ (у цьому випадку множину $\{x, y\}$ називають двоточково скрамбленою (scrambled) множиною).

Зокрема, якщо $f \in C(I)$ є топологічно транзитивним (тобто має скрізь щільну траєкторію), то воно є і хаотичним за Лі – Йорком. Зворотне не є справедливим (оскільки хаос Лі – Йорка дозволяє, щоб відображення f було, скажімо, сталим на деякому підінтервалі в I).

1.3. Сильно хаотичні відображення відрізка. Насправді концепція хаотичності Лі – Йорка не встановлює обмежень на те, наскільки „малим" може бути хаос. Щоб якось позбутись цього, було запропоновано декілька підходів.

A. Lasota (див. роботу [17] його учня J. Piorek) запропонував розглядати властивість хаотичності, сильнішу за ту, що розглядали T. Li та J. Yorke. Хоча відрізок має розмірність 1, існує двовимірний аспект цього хаосу.

Для відображення $f \in C(I)$ означимо наступні площинні множини:

$$L(f) = \{(x, y) \in I^2 : \liminf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0 \quad \text{і} \quad \limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0\}.$$

[1] Символ $\succeq$ використовуємо у звичайному розумінні.

Згідно з A. Lasota $f \in C(I)$ називають сильно хаотичним (generic chaotic), якщо множина $L(f)$ є резидуальною в I^2. Аналогічно, будемо говорити, що f є щільно хаотичною, якщо $L(f)$ є щільною в I^2 (див. також означення сильного та щільного ε-хаосу в [18], що є насправді еквівалентними до сильного хаосу).

У роботі [18] знайдено декілька умов, еквівалентних до сильного хаосу на відрізку (див. також [9]). Наприклад, показано, що існує лише „маленька" відмінність між сильним хаосом і транзитивністю, хоча ці два поняття взагалі не еквівалентні між собою (з топологічної транзитивності випливає сильний хаос, транзитивне відображення завжди сур'єктивне, але існують сильно хаотичні відображення, які є як завгодно близькими до деякого сталого відображення). У роботі [19] показано, що в деякому класі відображень, який містить всі кусково-монотонні відображення, поняття щільного та сильного хаосу збігаються (приклад щільно хаотичних відображень, які не є сильно хаотичними, див. у [18]).

У роботі [20] доведено, що за умови континуум-гіпотези відображення $f \in C(I)$, $I = [0,1]$, є бітранзитивним (його друга ітерація f^2 є топологічно транзитивним відображенням) тоді і тільки тоді, коли існує деяка незліченна екстремально скрамблена множина для f, тобто деяка незліченна множина S така, що для довільних $x, y \in S$, $x \neq y$, $\liminf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0$, але $\limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 1$. (Зауважимо, що 1 є довжиною I.)

Ми завершили досить стислий аналіз певної частини теорії хаосу для відображень відрізка (детальніше див. [9]) і переходимо до загальної ситуації.

2. Про різні концепції хаосу для топологічних динамічних систем. Протягом усього пункту *(топологічна) динамічна система* (X, T) є парою, де X — нетривіальний компактний (метричний) простір із метрикою ρ, а $T : X \to X$ — неперервне відображення, як правило, сюр'єктивне, якщо не вказано інше. Як завжди, умова компактності X є суттєвою, а умова сюр'єктивності T є важливою і може бути отримана, завдяки компактності, заміною X його найбільшою T-інваріантною підмножиною, коли це потрібно.

2.1. Транзитивність та чутливість. Часто інтуїтивно здається, що нестабільність асоціюється з хаосом, але комп'ютерні картинки в багатьох відомих прикладах хаосу показують скоріш очевидну його стабільність. Розглянемо атрактор Лоренца. Коли один параметр є фіксованим, віртуально будь-які числові зміни показують ту саму картину. З таким прикладом, як мотивацією, вивчати хаос більш природно на системах, де більшість точок блукає по всьому простору. Такими є топологічно транзитивні системи. Для застосувань результати використовуються на спеціальних підсистемах, як, наприклад, атрактор. У цьому підпункті наведемо огляд базисних фактів із транзитивності та відповідних ідей (детальніше див., наприклад, [8, 21, 22]).

Систему (X, T) називають *топологічно транзитивною* (тут і далі просто „T є транзитивним"), якщо для довільної пари відкритих множин $U, V \subset X$ існує додатне ціле n таке, що $U \cap T^{-n}V \neq \emptyset$.

Перш ніж нагадати низку еквівалентних умов транзитивності, введемо деякі важливі поняття.

Для заданої підмножини $A \subset X$ позначимо

$$T_{\#}A = \cap_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A) \quad \text{та} \quad T^{\#}A = \cup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A).$$

Звідси $T_{\#}A$ складається з таких точок в A, ціла орбіта яких належить A, в той час як $T^{\#}A$ складається з тих точок в X, орбіта яких перетинає A. Тому $T^{\#}(T_{\#}A)$ є множиною точок, орбіти яких попадають в A, в той час як $T_{\#}(T^{\#}A)$ є множиною точок, орбіти яких зустрічають A нескінченно часто. Будемо, дотримуючись контексту, розглядати орбіту як деяку послідовність чи як підмножину, і навіть коли відображення є оберненим, будемо використовувати термін *орбіта* точки x, посилаючись на $\{T^n(x) : n \geq 0\}$, що часто називається *позитивною орбітою*. Нарешті, якщо $B \subset X \times X$, будемо писати $T_{\#}B$ та $T^{\#}B$ для $(T \times T)_{\#}B$ та $(T \times T)^{\#}B$ відповідно. Очевидно, якщо A є замкненою, то $T_{\#}A$ теж є замкненою, а якщо A є відкритою, то $T^{\#}A$ теж є відкритою.

Нагадаємо, що через $\omega_T(x)$ позначають ω-граничну множину точки x. Точку x називають *рекурентною*, якщо $x \in \omega_T(x)$. Для множин A та B з X ми означимо *множину моментів попадання* (або *множину моментів візитів*)

$$n(A, B) = \{n \geq 0 : A \cap T^{-n}B \neq \emptyset\}.$$

Зауважимо, що оскільки T є сюр'єктивним і неперервним, прообраз непорожньої відкритої підмножини є непорожньою відкритою підмножиною.

Повертаючись до транзитивності, нагадаємо наступний відомий результат (див. [8, 21]).

Твердження 1. *Для динамічної системи (X, T) наступні умови є еквівалентними:*

1. *T є топологічно транзитивним.*

2. *Для довільної пари непорожніх відкритих підмножин U та V в X множина моментів попадання $n(U, V)$ є нескінченною.*

3. *Для довільної непорожньої відкритої підмножини U в X відкрита підмножина $T^{\#}U$ скрізь щільна в X.*

4. *Для деякої точки $x \in X$ орбіта x скрізь щільна в X.*

5. *Множина $\mathrm{Trans}(T) = \{x \in X : \omega_T(x) = X\}$ є G_δ-щільною підмножиною в X.*

Систему називають *мінімальною*, якщо кожна точка має скрізь щільну орбіту чи, що еквівалентно, якщо $\mathrm{Trans}(T) = X$.

Взагалі, підмножина A з X називається (строго) *інваріантною*, якщо $T(A) = A$. Якщо A є замкненою, непорожньою, інваріантною підмножиною, то $(A, T|A)$ називають асоційованою *підсистемою*. *Мінімальна підмножина* з X є замкненою, непорожньою, інваріантною підмножиною такою, що асоційована підсистема є мінімальною. Зрозуміло, що (X, T) є мінімальною тоді і тільки тоді, коли вона не допускає власної, замкненої, інваріантної підмножини. Таким чином, мінімальні множини — в точності замкнені, непорожні, інваріантні підмножини, що є мінімальними по відношенню до порядку включення.

Точку $x \in X$ називають *мінімальною*, якщо вона належить до мінімальної підмножини. В цьому випадку $\omega_T(x)$ є єдиною мінімальною підмножиною, що містить x. Нехай $\mathrm{Min}(T)$ позначає множину мінімальних точок у просторі X. Із леми Цорна випливає, що будь-яка замкнена, непорожня, інваріантна множина містить у собі мінімальну підмножину, тому $\mathrm{Min}(T)$ ніколи не є порожньою.

Безумовно, (X, T) є мінімальною тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Min}(T) = \mathrm{Trans}(T) = X$, інакше, $\mathrm{Min}(T) \cap \mathrm{Trans}(T) = \emptyset$. Якщо (X, T) є транзитивною, але не мінімальною, то множина $X \setminus \mathrm{Trans}(T)$ скрізь щільна в X (див. [8, 21, 23, 24]).

Позначимо через $\mathrm{Per}(T)$, можливо, порожню множину всіх періодичних точок для T. Очевидно, періодична точка є мінімальною, і тому $\mathrm{Per}(T) \subset \mathrm{Min}(T)$. Якщо система є транзитивною і X є скінченним, то X являє собою одну періодичну орбіту. Якщо система є транзитивною і простір X є нескінченним, то вона не містить ізольованих точок.

Нагадаємо, що пару (x, y) в $X \times X$ називають *проксимальною (proximal)*, якщо $\liminf_{n\to\infty} \rho(T^n(x), T^n(y)) = 0$, і *асимптотичною*, якщо $\lim_{n\to\infty} \rho(T^n(x), T^n(y)) = 0$. Пара, що не є проксимальною, називається *дистальною (distal)*.

Концепції, які ми вивчаємо, використовують різні відношення на X, що є підмножинами з $X \times X$. Наприклад: $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$, $V_\varepsilon = \{(x, y) : \rho(x, y) < \varepsilon\}$, $\bar{V}_\varepsilon = \{(x, y) : \rho(x, y) \le \varepsilon\}$. Для довільних підмножини $R \subset X \times X$ та точки $x \in X$ пишемо $R(x) = \{y : (x, y) \in R\}$. Так, $V_\varepsilon(x)$ (чи $\bar{V}_\varepsilon(x)$) є відкритим (відповідно замкненим) шаром радіуса ε з центром у точці x.

Використаємо ці позначення для означень множин проксимальних та асимптотичних пар:

$$\mathrm{Prox}(T) = \{(x, y) : \liminf_{n\to\infty} \rho(T^n(x), T^n(y)) = 0\} = \cap_{\varepsilon>0} T^{\#} V_\varepsilon =$$

$$= \{(x, y) : \omega_{T\times T}(x, y) \cap \Delta \neq \emptyset\},$$

$$\mathrm{Asym}_\varepsilon(T) = T^{\#}(T_{\#} \bar{V}_\varepsilon),$$

$$\mathrm{Asym}(T) = \{(x, y) : \lim_{n\to\infty} \rho(T^n(x), T^n(y)) = 0\} =$$

$$= \cap_{\varepsilon>0} \mathrm{Asym}_\varepsilon(T) = \{(x, y) : \omega_{T\times T}(x, y) \subset \Delta\}.$$

Пара (x, y) належить до $\mathrm{Asym}_\varepsilon(T)$ тоді і тільки тоді, коли її орбіта $T \times T$ з часом належить до $\bar{V}_\varepsilon$. Тобто існує $n \ge 0$ таке, що $\rho(T^i(x), T^i(y)) \le \varepsilon$ для всіх $i \ge n$. Звідси очевидно випливає, що пара є асимптотичною тоді і тільки тоді, коли вона належить до $\mathrm{Asym}_\varepsilon(T)$ для всіх додатних ε.

Множину $\mathrm{Prox}(T)(x)$ називають *проксимальною кліткою* для точки x. Вона складається з тих точок, що є проксимальними до x. Точка x називається *дистальною*, якщо $\mathrm{Prox}(T)(x) = \{x\}$. Систему (X, T) називають *дистальною*, коли кожна точка в X є дистальною.

Одна з основних теорем топологічної динаміки — теорема Ауслендера — стверджує, що будь-яка проксимальна клітка містить мінімальну точку [25, 26]. Звідси, зокрема, випливає, що дистальна точка є завжди мінімальною.

З іншого боку, систему (X, T) називають *проксимальною*, коли всі пари є проксимальними, тобто $\mathrm{Prox}(T)(x) = X$ для всіх $x \in X$. Нетривіальна мінімальна система ніколи не є проксимальною. Більш того, динамічна система (X, T) є проксимальною тоді і тільки тоді, коли вона має нерухому точку, що є єдиною мінімальною підмножиною в X [3].

Для системи (X, T) точка $x \in X$ є стійкою в сенсі Ляпунова, якщо залежність орбіти від початкової позиції є неперервною в точці x. Це можна більш просто означити, використавши T-розширення метрики ρ

$$\rho_T(x,y) = \sup\ \{\rho(T^n(x), T^n(y)) : n \geq 0\}$$

для $x, y \in X$. Очевидно, ρ_T є метрикою на X і

$$\rho_T(x,y) = \max[\ \rho(x,y),\ \rho_T(T(x), T(y))\ ].$$

Використавши ці метрики, означимо *діаметр* та T-*діаметр* для $A \subset X$:

$$\mathrm{diam}(A) = \sup\ \{\rho(x,y) : x, y \in A\}, \quad \mathrm{diam}_T(A) = \sup\ \{\rho_T(x,y) : x, y \in A\}.$$

Зауважимо, що використовуючи термін „відкрита множина", ми будемо посилатись на оригінальну ρ-топологію.

Точку $x \in X$ називають *стійкою за Ляпуновим*, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що з $\rho(x,y) < \delta$ випливає $\rho_T(x,y) \leq \varepsilon$. Ця умова показує, що послідовність ітерацій $\{T^n : n \geq 0\}$ є одностайно неперервною в точці x. Таку точку також називають *точкою одностайної неперервності*.

Як і раніше, позначимо відповідні поточкові множини:

$$\mathrm{Eq}_\varepsilon(T) = \bigcup\ \{U \subset X : U \text{ є відкритою з } \mathrm{diam}_T(U) \leq \varepsilon\},$$

$$\mathrm{Eq}(T) = \cap_{\varepsilon > 0}\ \mathrm{Eq}_\varepsilon(T).$$

$\mathrm{Eq}(T)$ є множиною точок одностайної неперервності. Якщо $\mathrm{Eq}(T) = X$, тобто кожна точка є точкою одностайної неперервності, то дві метрики ρ та ρ_T є топологічно еквівалентними і тому, внаслідок компактності простору, рівномірно еквівалентними. Таку систему називають *одностайно неперервною*. Іншими словами, (X, T) є одностайно неперервною, якщо послідовність $\{T^n : n \geq 0\}$ є рівномірно одностайно неперервною.

Множина $\mathrm{Eq}(T)$ є G_δ-множиною. Якщо $\mathrm{Eq}(T)$ скрізь щільна в X, то систему називають *майже одностайно неперервною*. У випадку, коли $\mathrm{Eq}_\varepsilon(T) = \emptyset$ для деякого $\varepsilon > 0$, говорять, що система показує *чутливу залежність від початкових умов* чи, більш просто, (X, T) є *чутливою*.

Може статись, що $\mathrm{Eq}_\varepsilon(T) \neq \emptyset$ для всіх додатних ε, а перетин $\mathrm{Eq}(T)$ є порожнім. Цього не може бути, коли система є транзитивною. Наведемо теорему та наслідки з [3], серцевиною доведення яких є теорема Аусландера–Йорка з [27] і деякі результати E. Glasner та B. Weiss [28], E. Akin, J. Auslander та K. Berg [29].

Теорема 1. *Нехай (X, T) — топологічно транзитивна система. Тоді точно один із наступних випадків має місце.*

1. *Існує точка одностайної неперервності для системи. Тоді точки одностайної неперервності є в точності транзитивними точками, тобто $\mathrm{Eq}(T) = \mathrm{Trans}(T)$, і система майже одностайно неперервна. Відображення T є гомеоморфізмом, і обернена система (X, T^{-1}) є майже одностайно неперервною. Більш того, система є рівномірно жорсткою (rigid); це означає, що деяка підпослідовність $\{T^n : n = 0, 1, \ldots\}$ збігається до тотожного відображення.*

2. *Система не має точок одностайної неперервності. Тоді система є чутливою, тобто існує $\varepsilon > 0$ таке, що $\mathrm{Eq}_\varepsilon(T) = \emptyset$.*

***Наслідок* 1.** *Якщо (X, T) є мінімальною динамічною системою, то вона в точності або чутлива, або одностайно неперервна.*

Наслідок 2. *Якщо (X, T) — майже одностайно неперервна транзитивна система, то всі асимптотичні пари є діагональними, тобто* $\mathrm{Asym}(T) = \Delta$.

2.2. Топологічний хаос та хаос Лі – Йорка. За аналогією з одновимірним випадком пару точок $\{x, y\} \subset X$ будемо називати парою Лі – Йорка, якщо

$$\liminf_{n\to\infty} \varrho(T^n x, T^n y) = 0, \quad \text{але} \quad \limsup_{n\to\infty} \varrho(T^n x, T^n y) > 0.$$

Таким чином, пара $\{x, y\}$ є парою Лі – Йорка тоді і тільки тоді, коли вона є проксимальною, але не асимптотичною. Множини дистальних, Лі – Йорка та асимптотичних пар утворюють розбиття на X^2.

Розглянемо означення хаосу для топологічних динамічних систем, що базується на парах Лі – Йорка. Множина $S \subseteq X$ називається *скрамбленою (scrambled)* чи *Лі – Йорка*, якщо будь-які пари різних точок $\{x, y\} \subseteq S$ є парами Лі – Йорка. Систему (X, T) називають *хаотичною за Лі – Йорком* (чи говорять, що має місце *хаос Лі – Йорка*), якщо X містить деяку незліченну скрамблену множину.

Розглянемо наступні хаотичні властивості систем, що базуються на складності покриттів — позитивність топологічної ентропії та розсіювання.

Топологічну ентропію відображення $T \in C(X)$ введено в [30] як один із інваріантів топологічної спряженості. Розглянемо топологічну динамічну систему (X, T). Нехай для довільного скінченного покриття $\mathcal{C}$ компактного простору X $\mathcal{N}(\mathcal{C})$ буде мінімальною потужністю деякого підпокриття з $\mathcal{C}$. *Функцією топологічної складності* скінченного покриття $\mathcal{C}$ для (X, T) є неспадна функція

$$c_T(\mathcal{C}, n) = \mathcal{N}(\mathcal{C}^n),$$

де $\mathcal{C}^n = \mathcal{C} \bigvee T^{-1}\mathcal{C} \bigvee \ldots \bigvee T^{-(n-1)}\mathcal{C}$. Експоненціальний ріст цієї функції є топологічною ентропією покриття $\mathcal{C}$, а *топологічна ентропія* системи (X, T), $h(X, T)$ визначається як супремум топологічних ентропій скінченних відкритих покриттів (див. [30]).

Наведемо одне з означень, яке введене R. Bowen та Є. І. Дінабургом (див., наприклад, [31]) і є еквівалентним до оригінального. Нехай (X, ϱ) є компактним метричним простором, а T — неперервне відображення з X в себе. Множину E з X називають *(n, ε)-розділеною*, якщо для будь-яких двох різних точок $x, y \in E$ існує $0 \le j < n$ з $\varrho(T^j(x), T^j(y)) > \varepsilon$. Нехай $s_n(T, \varepsilon)$ — максимально можлива потужність деякої (n, ε)-розділеної підмножини в X. Тоді (топологічна) ентропія для T визначається як

$$h(T) = \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log s_n(T, \varepsilon) .$$

Ми бачимо, що топологічна ентропія презентує експоненціальний ріст числа орбітальних відрізків, які можна розрізняти з досить хорошою, але скінченною точністю, і є кількісною мірою хаотичності системи. Динамічну систему (X, T) називають *топологічно хаотичною*, якщо її топологічна ентропія є додатною.

Динамічну систему (X, T) будемо називати системою, що *розсіює*, якщо будь-яке скінченне покриття $\mathcal{C}$, що складається з не скрізь щільних відкритих множин, має необмежену складність, тобто $c_T(\mathcal{C}, n) \to \infty$, та *2-розсіює*, якщо така сама умова справедлива для 2-множинних покриттів [32].

У роботі [33] доведено таку теорему.

Теорема 2. *Якщо топологічна динамічна система (X, T) має додатну топологічну ентропію, то вона хаотична за Лі–Йорком.*

Тим самим розв'язано відому проблему про існування проксимальних, але не асимптотичних пар точок (тобто пар Лі–Йорка) в системах із додатною ентропією.

Необхідно відмітити, що в системах із додатною ентропією необхідно наявні не лише пари Лі–Йорка, а й асимптотичні пари [34]. Більш того, очевидно, що коли система мінімальна, то в ній обов'язково є дистальні пари. Таким чином, мінімальні системи з додатною ентропією мають всі види пар точок — дистальні, асимптотичні та Лі–Йорка.

Звичайно, щоб розуміти хаос Лі–Йорка, слід також знати, що означає відсутність пар Лі–Йорка в системі. Розглянемо системи без пар Лі–Йорка, тобто такі динамічні системи, для яких будь-яка пара точок є чи асимптотичною, чи дистальною. Їх називають *майже дистальними*, оскільки множина асимптотичних пар у цьому випадку є множиною першої категорії. Більшість їх властивостей можна отримати двома шляхами. Один полягає в застосуванні класичної теорії напівгруп Елліса до обернених майже дистальних систем і використанні так званих натуральних розширень для доведення цих властивостей для необернених систем. При цьому деякі доведення є простими і красивими, а інші — незручними. Інший метод ґрунтується на новому адаптованому до необерненого випадку варіанті теорії напівгруп Елліса. Наприклад, у роботі [33] встановлено, що будь-яка транзитивна майже дистальна система є мінімальною.

2.3. ***Чутливість Лі–Йорка.*** Різні концепції хаосу поділяють спільну ідею неможливості прогнозування динаміки внаслідок дивергенції близьких орбіт. Відмінність в означеннях починається з різної інтерпретації цієї дивергенції. Ми вже розглянули дві популярні ідеї, а зараз зупинимося на концепції з [3], що пов'язує їх.

Як ми відмічали в попередньому підпункті, при вивченні відображень відрізка T. Li та J. Yorke запропонували вважати „дивергентними" пари (x, y), які є проксимальними, але не асимптотичними. Тобто

$$\liminf_{n\to\infty} \rho(T^n(x), T^n(y)) = 0, \quad \text{але} \quad \limsup_{n\to\infty} \rho(T^n(x), T^n(y)) > 0.$$

Систему називають хаотичною за Лі–Йорком, якщо вона містить незліченну скрамблену множину, тобто множину $A \subset X$ таку, що будь-які дві різні точки з A задовольняють цю умову Лі–Йорка.

Ідею *чутливості* з роботи D. Ruelle та F. Takens [35] в топологічну динаміку ввели J. Auslander та J. Yorke [27] і пізніше популяризував R. Devaney [36]. Нагадаємо, що систему (X, T) називають чутливою, якщо існує $\varepsilon > 0$ таке, що будь-яка $x \in X$ є границею точок $y \in X$ таких, що $\rho(T^n(x), T^n(y)) > \varepsilon$ для деякого додатного n.

Перш ніж говорити про концепцію, що пов'язує чутливість та хаос Лі–Йорка, наведемо більш вишуканий результат для чутливих динамічних систем, ніж теорема 2, що має місце без умови транзитивності. Він базується на аргументах [37] (див. також [3]).

Теорема 3. *Для динамічної системи (X, T) наступні умови є еквівалентними:*

1. *Система є чутливою.*
2. *Існує додатне ε таке, що $\mathrm{Asym}_\varepsilon(T)$ є множиною першої категорії в $X \times X$.*

3. *Існує додатне ε таке, що для будь-якого $x \in X$ $\mathrm{Asym}_\varepsilon(T)(x)$ є множиною першої категорії в X.*

4. *Існує додатне ε таке, що будь-яка $x \in X$ є граничною точкою доповнення $\mathrm{Asym}_\varepsilon(T)(x)$, тобто $x \in \overline{X \setminus \mathrm{Asym}_\varepsilon(T)(x)}$.*

5. *Існує додатне ε таке, що множина пар*

$$\{(x,y) \in X \times X : \limsup_{n\to\infty} \rho(T^n(x), T^n(y)) > \varepsilon\}$$

є скрізь щільною в $X \times X$.

Цікаво також відмітити, що множина $\mathrm{Asym}_\varepsilon(T)$ завжди містить не лише діагональні точки. Одна з класичних теорем Готшалка – Хедлунда [38] (просте доведення знайдено J. King [39]) стверджує, що якщо (X,T) є оберненою системою з нескінченним X, то для довільного $\varepsilon > 0$ завжди існує пара (x,y) різних точок таких, що $\rho(T^k(x), T^k(y)) \le \varepsilon$ для всіх додатних k.

На підставі цих результатів в [3] запропоновано концепцію, що з'єднує чутливість із версією хаосу Лі – Йорка.

Динамічну систему (X,T) називають *чутливою за Лі – Йорком*, якщо існує додатне ε таке, що довільна точка $x \in X$ є границею точок з $\mathrm{Prox}(T)(x) \setminus \mathrm{Asym}_\varepsilon(T)(x)$, тобто $x \in \overline{\mathrm{Prox}(T)(x) \setminus \mathrm{Asym}_\varepsilon(T)(x)}$. Іншими словами, систему називають чутливою за Лі – Йорком, якщо існує $\varepsilon > 0$ таке, що будь-яка точка $x \in X$ є границею точок $y \in X$ таких, що пара (x,y) є проксимальною, але їх орбіти час від часу віддалені хоча б на ε.

Теорема 4 [3]. *Якщо динамічна система (X,T) є чутливою за Лі – Йорком, то вона є і чутливою. Якщо ж (X,T) є чутливою і для будь-якої точки $x \in X$ проксимальна клітка* $\mathrm{Prox}(T)(x)$ *скрізь щільна в X, то (X,T) є і чутливою за Лі – Йорком.*

***Зауваження* 1.** Насправді в другій частині умову „$\mathrm{Prox}(T)(x)$ скрізь щільна для всіх $x \in X$" можна замінити більш слабкою „для всіх $x \in X$ $\mathrm{Prox}(T)(x)$ скрізь щільна в деякому околі x, чи, що еквівалентно, кожна точка належить до внутрішності замикання її проксимальної клітки".

Як ми вже знаємо, динамічна система (X,T), яка має нерухому точку, що є єдиною мінімальною підмножиною системи, є проксимальною. Далі ми побачимо, що якщо ця система є чутливою, то вона є і чутливою за Лі – Йорком. Слід зауважити, що чутливість Лі – Йорка є строго сильнішою за чутливість. Наприклад, існують мінімальні дистальні системи, що не є одностайно неперервними. За наслідком 1 такі системи чутливі. Оскільки дистальність означає, що $\mathrm{Prox} = \Delta$, дистальна система не може бути чутливою за Лі – Йорком.

2.4. Слабко перемішуючі системи. Ми будемо використовувати багато властивостей, які є строго сильнішими за транзитивність. Дві транзитивні точки x, y для системи (X,T) називають *незалежними*, якщо (x,y) є транзитивною точкою в прямому добутку системи $(X,T)^2 = (X \times X, T \times T)$ (тут $T \times T$ означається як $(T \times T)(x,y) = (T(x), T(y))$).

Динамічну систему (X,T) (чи відображення T) називають *топологічно слабко перемішуючою*, чи просто *слабко перемішуючою*, якщо прямий добуток $(X,T)^2$ є транзитивною динамічною системою, тобто якщо в системі існують хоча б дві незалежні точки. Але можна сказати і більше: якщо відображення T є слабко перемішуючим, то множина моментів попадання $n(U,V)$ містить в собі як завгодно довгі відрізки, і скінченний добуток копій T є також транзитивною системою [40]. Слабко перемішуючі системи є хорошим класом тестових систем для будь-якого топологічного означення хаосу.

Нагадаємо, що систему (X,T) (чи відображення T) називають *топологічно перемішуючою*, чи просто *перемішуючою*, якщо для довільної пари відкритих множин U та V в X існує $k \geq 1$ таке, що для довільного $n \geq k$ $T^{-n}(V) \cap U \neq \emptyset$, тобто множина моментів попадання $n(U,V) = [k, \infty)$. Прямий добуток довільного степеня перемішуючої системи $(X,T)^m$, $m \geq 1$, є транзитивною системою.

Відображення T називають *тотально транзитивним*, якщо T^n є транзитивним для всіх $n \geq 1$. Якщо $n \in \mathbb{N}$ і T^n є транзитивним, тоді і T є транзитивним. Обернене є невірним.

Імплікації між різними умовами на транзитивність є такими:

$$\text{Перемішування} \Longrightarrow \text{Слабке перемішування} \Longrightarrow \text{Тотальна транзитивність} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \text{Транзитивність}.$$

Всі імплікації в діаграмі елементарно перевіряються, за винятком того факту, що слабко перемішуючі відображення є тотально транзитивними (доведення див. у [22]).

Незважаючи на існування достатньої кількості відображень, що є слабко перемішуючими, але не перемішуючими (див., наприклад, [29, 41–43]), такі приклади для деяких класів динамічних систем досить складно отримати.

Насправді для слабко перемішуючих систем існує більш вишукана властивість. Лема Фюрстенберга про перетин говорить, що для слабко перемішуючих систем набір підмножин в $\mathbb{N}$: $\{n(U,V) \cap [k,\infty) : U, V$ непорожні відкриті в X і $k \geq 0\}$ генерує фільтр, який будемо позначати через $\mathcal{F}$ (див. [44, с. 87]). Позначимо через $k\mathcal{F}$ дуальну сім'ю $\{A : A \cap B \neq \emptyset$ для всіх $B \in \mathcal{F}\}$. Дуальна сім'я $k\mathcal{F}$ задовольняє так звану *властивість Рамсея*: якщо деяке скінченне об'єднання підмножин з $\mathbb{N}$ належить до $k\mathcal{F}$, то одна з цих підмножин також належить до $k\mathcal{F}$. Зауважимо, що якщо $A \in k\mathcal{F}$ і $B \in \mathcal{F}$, то $A \cap B$ є нескінченною, оскільки $B \cap [k,\infty) \in \mathcal{F}$ для всіх $k > 0$. Завдяки насамперед цій властивості має місце така теорема.

Теорема 5 [3]. *Якщо* (X,T) *є слабко перемішуючою динамічною системою, то для всіх* $x \in X$ *проксимальна клітка* $\mathrm{Prox}(T)(x)$ *є скрізь щільною (резидуальною) підмножиною в* X.

Наслідок **3.** *Довільна нетривіальна слабко перемішуюча система* (X,T) *є чутливою за Лі–Йорком.*

Для мінімальної системи має місце така теорема.

Теорема 6 [3]. *Для мінімальної динамічної системи* (X,T) *наступні умови є еквівалентними:*

1. *Система* (X,T) *є слабко перемішуючою.*
2. *Для довільного* $x \in X$ *проксимальна клітка* $\mathrm{Prox}(T)(x)$ *скрізь щільна в* X.
3. *Для деякого* $x \in X$ *проксимальна клітка* $\mathrm{Prox}(T)(x)$ *скрізь щільна в* X.
4. $\mathrm{Prox}(T)$ *скрізь щільна в* $X \times X$.

Слід зауважити, що на відміну від слабко перемішуючих систем чутливі системи можуть мати одностайно неперервні (нетривіальні) фактори. Насправді справедливою є така теорема.

Теорема 7 [3]. *Якщо система (X, T) є чутливою (чи чутливою за Лі–Йорком), то система-добуток $(X \times Y, T \times S)$ є чутливою (відповідно чутливою за Лі–Йорком) для довільної динамічної системи (Y, S).*

Зауважимо, що якщо розглянути нетривіальну, слабко перемішуючу систему (X, T) і взяти її прямий добуток із довільною мінімальною системою (Y, S), то система-добуток буде транзитивною (див. [32]) і, за попередніми результатами, чутливою за Лі–Йорком. Якщо (X, T) є нетривіальною слабко перемішуючою і мінімальною, а (Y, S) є дистальною, то система-добуток є мінімальною і чутливою за Лі–Йорком.

2.5. Властивості, споріднені чутливості Лі–Йорка, та відкриті питання. У статті [33] введено визначення просторово-часового хаосу без певного аналізу. Динамічну систему (X, T) називають *просторово-часово хаотичною*, якщо кожна точка є границею точок, що є проксимальними, але не асимптотичними до неї. Тобто для всіх $x \in X$

$$x \in \overline{\operatorname{Prox}(T)(x) \setminus \operatorname{Asym}(T)(x)}.$$

З означення видно, що з чутливості Лі–Йорка випливає просторово-часовий хаос. З іншого боку, остання властивість є строго слабкішою.

Коротко проаналізуємо відомі факти та нагадаємо деякі відкриті питання з [3].

Теорема 8 [3]. *Припустимо, що динамічна система (X, T) задовольняє наступні умови:*

1) *система є нескінченною та транзитивною;*
2) *будь-яка точка є рекурентною;*
3) *будь-яка мінімальна точка є періодичною.*

Тоді система є просторово-часово хаотичною.

***Наслідок* 4.** *Припустимо, що для не мінімальної, транзитивної динамічної системи (X, T) кожна точка є або транзитивною, або періодичною. Тоді система є просторово-часово хаотичною.*

Зауважимо, що приклади таких систем є в [24].

***Наслідок* 5.** *Припустимо, що не мінімальна, транзитивна динамічна система (X, T) є майже одностайно неперервною і кожна її мінімальна точка є періодичною. Тоді система є просторово-часово хаотичною, але не чутливою за Лі–Йорком.*

Приклади не мінімальних, майже одностайно неперервних систем побудовано в [28, 29]. Там також показано, що не мінімальні, транзитивні системи зі скрізь щільною множиною мінімальних точок є чутливими. Так, можна розглянути довільну не мінімальну, майже одностайно неперервну систему і стиснути замикання множини мінімальних точок до однієї точки. Результатом буде не мінімальна, майже одностайно неперервна система з нерухомою точкою як єдиною мінімальною підмножиною. Майже одностайно неперервна, просторово-хаотична система не є мінімальною, оскільки мінімальні майже одностайно неперервні системи є одностайно неперервними, а тому дистальними. Оскільки для такої системи $\operatorname{Prox} = \Delta$, то вона не просторово-часово хаотична.

***Запитання* 1.** Чи є просторово-часовий хаос еквівалентним до чутливості Лі–Йорка для мінімальних систем?

Система (X,T) є хаотичною за Лі – Йорком, якщо вона містить деяку незліченну скрамблену множину. Існують системи, що є хаотичними за Лі – Йорком, але містять дистальні точки. Якщо x є дистальною точкою, тобто $\mathrm{Prox}(T)(x) = \{x\}$, то очевидно, що така система не просторово-часово хаотична, а тому і не чутлива за Лі – Йорком.

Наприклад, J. Auslander [25] будує фактор-відображення $\pi : (X,T) \to (Y,S)$ (тобто таке неперервне відображення $\pi : X \to Y$, що $S \circ \pi = \pi \circ T$), де система (Y,S) одностайно неперервна, а π є майже взаємно однозначним, тобто для скрізь щільної множини точок $x \in X$ $\pi^{-1}(\{\pi(x)\}) = \{x\}$. Такі точки є дистальними. З іншого боку, для інших точок $y \in Y$ $\pi^{-1}(y)$ є незліченною множиною. Всі точки з однієї множини є проксимальними, оскільки відображення є майже взаємно однозначним. Побудова є такою, що там немає не діагональних асимптотичних пар, і система є хаотичною за Лі – Йорком. Зворотне питання є відкритим.

***Запитання* 2.** Чи всі чутливі за Лі – Йорком системи є хаотичними за Лі – Йорком?

Неперервне відображення $\pi : X \to Y$ називають *майже відкритим*, якщо π-образ довільної непорожньої відкритої підмножини в X має непорожню внутрішність в Y. Це є еквівалентним умові, що прообраз будь-якої множини першої категорії в Y є множиною першої категорії в X. Наприклад, майже взаємно однозначне відображення є майже відкритим. J. Auslander [25] довів, що фактор-відображення $\pi : (X,T) \to (Y,S)$ між двома мінімальними системами є майже відкритим[2]. Якщо $\pi : (X,T) \to (Y,S)$ — майже відкрите фактор-відображення, а (Y,S) є чутливою, то (X,T) теж є чутливою [3].

Існують слабко перемішуючі системи (X,T), що є рівномірно жорсткими (це означає, що деяка підпослідовність $\{T^n : n = 0,1,...\}$ збігається до тотожного відображення). E. Glasner та B. Weiss показали, що довільна така система розширюється до деякої майже одностайно неперервної транзитивної системи [28]. Тому умова, що відображення π є майже відкритим, є необхідною.

***Запитання* 3.** Якщо $\pi : (X,T) \to (Y,S)$ — майже відкрите фактор-відображення, а (Y,S) — чутлива за Лі – Йорком система, то чи є (X,T) також чутливою за Лі – Йорком? Або в частковому випадку, якщо $\pi : (X,T) \to (Y,S)$ є фактор-відображенням між двома мінімальними системами і (Y,S) — чутлива за Лі – Йорком система, то чи є (X,T) також чутливою за Лі – Йорком?

Навіть послаблена версія цього запитання ще є відкритою.

***Запитання* 4.** Якщо $\pi : (X,T) \to (Y,S)$ — фактор-відображення між двома мінімальними системами і (Y,S) — нетривіальна перемішуюча система, то чи є (X,T) чутливою за Лі – Йорком?

Наші попередні конструкції для побудови чутливості за Лі – Йорком використовують лише слабке перемішування, зворотне запитання також є відкритим.

***Запитання* 5.** Чи кожна чутлива за Лі – Йорком мінімальна система має нетривіальний слабко перемішуючий фактор?

---

[2]Нагадаємо, що для мінімальної системи (X,T) на довільному компактному хаусдорфовому просторі відображення T може не бути гомеоморфізмом, але є майже відкритим. Якщо T — відкрите відображення, то воно є необхідно бієктивним, а тому є гомеоморфізмом, тобто система є оберненою [45].

3. Порівняння різних концепцій хаосу. Будемо використовувати декілька важливих сімей транзитивних систем. Нагадаємо їх означення та деякі відомі факти. Нехай (X, T) є транзитивною системою. Будемо називати систему (X, T):

1) F-*системою*, якщо вона тотально транзитивна і множина періодичних точок скрізь щільна в X;

2) P-*системою*, якщо множина періодичних точок скрізь щільна в X;

3) ToP-*системою*, якщо вона не мінімальна і будь-яка точка з X є або транзитивною, або періодичною;

4) M-*системою*, якщо вона не мінімальна і множина мінімальних точок $\mathrm{Min}(T)$ скрізь щільна в X;

5) ToM-*системою*, якщо вона не мінімальна і будь-яка точка з X є або транзитивною, або мінімальною;

6) E-*системою*, якщо вона має T-інваріантну ймовірнісну міру на X, що є додатною на кожній непорожній відкритій підмножині.

Відомо, що (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (4) $\Longrightarrow$ (6) (див. [28]). Звичайно, очевидним є також те, що (3) $\Longrightarrow$ (2) та (5) $\Longrightarrow$ (4) (див. [24]).

Динамічну систему (X, T) називають *ергодичною системою*, якщо вона має ергодичну T-інваріантну міру μ на X з повним носієм (тобто $\operatorname{supp}\mu = X$); *синдетичною (syndetic) системою*, якщо для довільної непорожньої відкритої множини U в X множина моментів повернення $n(U, U)$ є синдетичною (тобто $n(U, U)$ має рівномірно обмежені щілини в $\mathbb{Z}^+$).

Один із прикладів в [46] показує, що E-система не обов'язково ергодична (насправді, приклад є P-системою). Будь-яка мінімальна система є ергодичною та синдетичною системою (див. [28, 47]).

Відомо, що довільна необернена транзитивна система або не мінімальна E-система (зокрема, M-система) є чутливою (див. [28, 29]).

Нещодавно було доведено, що транзитивні системи з непорожньою множиною періодичних точок (зокрема, P-системи) є хаотичними за Лі – Йорком [37].

Розглянемо системи, що мають властивість специфікації, (SP-системи), які ввів R. Bowen. Говорять, що система (X, f) задовольняє *строгу властивість специфікації* чи називається SSP-*системою*, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує ціле $M(\varepsilon)$ таке, що для довільного $k \geq 2$, для довільних k точок $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$, для довільних цілих $a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \ldots < a_k \leq b_k$ з $a_i - b_{i-1} \geq M(\varepsilon)$, $2 \leq i \leq k$, і для будь-якого цілого p з $p \geq M(\varepsilon) + b_k - a_1$ існує точка $x \in X$ з $f^p(x) = x$ така, що $\varrho(f^n(x), f^n(x_i)) \leq \varepsilon$ для $a_i \leq n \leq b_i$, $1 \leq i \leq k$. Говорять, що (X, f) задовольняє *властивість специфікації* чи є SP-*системою*, якщо наведені вище умови справедливі для $k = 2$. D. Ruelle також увів у розгляд системи, що мають *слабку властивість специфікації*: означення те саме, що й для строгої, за винятком того, що x не обов'язково повинна бути періодичною (як наслідок немає умов для p).

Хоча ці умови виглядають досить сильними, є багато прикладів таких систем. Більш того, будь-яка SP-система є топологічно перемішуючою і з додатною топологічною ентропією (див. [48]).

Система (X, T) *сильно хаотична*, якщо множина пар Лі – Йорка містить у собі G_δ-щільну підмножину в $X \times X$ (див. [18]). Характеризація сильно хаотичних відображень відрізка з [18] в повній мірі не переноситься на загальний випадок (див. [49]). Довільна сильно хаотична система (не обов'язково транзитивна) є хаотичною за Лі–Йорком [37].

Цікавим виявляється результат співставлення хаотичності Лі–Йорка та чутливості: з жодної не випливає інша. Системи Штурма є найпростішим прикладом мінімальних майже дистальних систем, що є чутливими. Нехай Y — коло, а S_α — поворот на ірраціональне число $\alpha \in Y$. Закодуємо орбіти з (Y, S_α) відповідно до замкненого покриття $\mathcal{C} = \{[0, 1-\alpha], [1-\alpha, 1]\}$ на Y. Позначимо через X замкнену множину всіх нескінченних в обидві сторони $\mathcal{C}$-ідентифікаторів та нехай σ буде зсувом на ній. Усі точки з Y мають лише один $\mathcal{C}$-ідентифікатор в X, за винятком точки 0 та всіх точок з її орбіти, кожна з яких має два імені. З іншого боку, ми задаємо неперервне відображення $\varphi\colon X \to Y$, що шле нескінченне ім'я до точки з Y та $S_\alpha \circ \varphi = \varphi \circ \sigma$.

Легко перевірити, що для $x \neq y \in Y$ пара (x, y) є дистальною, якщо не виконується рівність $\varphi(x) = \varphi(y)$; в іншому випадку (x, y) є асимптотичною під дією σ та σ^{-1}: (X, σ) є скінченно-до-одного асимптотичним розширенням ізометрії (Y, S_α).

З іншого боку, існують розсіюючі системи, що є хаотичними за Лі–Йорком, але не чутливими [50]. Нагадаємо також, що оскільки довільні не чутливі мінімальні системи є одностайно неперервними, то в мінімальному випадку очевидно, що хаотичні за Лі–Йорком системи є також чутливими.

Як ми вже знаємо, (слабке) перемішування є досить сильною хаотичною властивістю. У кожній слабко перемішуючій системі існує незліченна множина, тобто така, що кожна пара різних точок є незалежною (див. [51] та основну теорему з [52]). Слабко перемішуючі системи, як ми вже показали, є сильно (а також за Лі–Йорком) хаотичними та чутливими (за Лі–Йорком). Жодна з обернених імплікацій не має місця. Системи Штурма є чутливими не будучи слабко перемішуючими. Слабке перемішування не випливає з сильного хаосу навіть за умови транзитивності. Такі приклади можна знайти навіть для відображень відрізка (довільне транзитивне, але не бітранзитивне відображення має таку властивість) [18]. Наведемо ще один такий приклад. Нехай (X, T) — повний зсув на 2 літерах, а (Y, S) — ірраціональний поворот на одиничному колі; нехай (Z, R) — фактор для $(X \times Y, T \times S)$, що отримується зі згортання всіх елементів вигляду (x_0, y), де x_0 — нерухома точка на 0. Легко перевірити, що (Z, R) є транзитивною, але не слабко перемішуючою системою і має скрізь щільну множину пар Лі–Йорка з модулем $\delta > 0$, що є G_δ-щільною; з іншого боку, оскільки (Z, R) містить нерухому точку, то є хаотичною за Лі–Йорком [37].

Система є розсіюючою тоді і тільки тоді, коли її прямий добуток із довільною мінімальною системою є транзитивним відображенням [32]. Слабко перемішуючі системи є розсіюючими; розсіювання є строго слабкішим за слабке перемішування [50], але ці дві властивості є еквівалентними в мінімальному випадку [32].

Із розсіювання (точніше, навіть 2-розсіювання) випливає транзитивність [32], хаос Лі–Йорка та сильний хаос [37]. З іншого боку, як ми вже відмічали, існують розсіюючі системи, що не є чутливими [50].

Якщо система (X, T) є транзитивною, але не чутливою, T має властивість рівномірної строгості [28, 29]. З цього випливає, що T є гомеоморфізмом і має нульову ентропію. Тому будь-яка топологічно хаотична (тобто з додатною топологічною ентропією) транзитивна система має чутливу залежність від початкових умов.

Мінімальні розсіюючі системи є слабко перемішуючими, а тому і хаотичними в багатьох сенсах. Існує багато прикладів слабко перемішуючих систем із нульовою ентропією (наприклад, довільна строго ергодична система, що є міро-теоретично слабко перемішуючою і має простий спектр) і навіть мінімальних, рівномірно жорстких систем [41]. Звичайно, топологічний хаос є іншим досить строгим поняттям хаотичності. Як ми відмічали, топологічно хаотичні системи є хаотичними за Лі – Йорком.

Постає питання: які системи є перемішуючими і одночасно топологічно хаотичними? Звичайно, відповідь ми знаємо: це, скажімо, SP-системи. Насправді, J. Bobok підказав автору більш природний приклад таких систем, що знову ж таки виникає з властивостей певного класу транзитивних відображень відрізка.

Систему (X, T) будемо називати (строго) *топологічно розтягуючою* (чи говорити, що вона має властивість розтягування), якщо для довільної непорожньої відкритої множини $U \subset X$ існує додатне ціле n таке, що $T^n(U) = X$. Очевидно, що розтягуючі системи є топологічно перемішуючими, а щоб переконатися в їх топологічній хаотичності, слід вказати так звану (топологічну) підкову для деякої ітерації відображення. Очевидно також, що розтягуючі системи належать класу редукованих систем (систем, для яких існує власна замкнена підмножина $A \subsetneq X$ така, що $T(A) = X$), тому ніколи не є мінімальними динамічними системами (див. [45]).

Підсумуємо взаємозв'язок між означеннями хаосу для транзитивних динамічних систем (інші імплікації не мають місця, за винятком тих, які можна отримати, використовуючи транзитивну властивість імплікації).

$$\begin{tikzcd}
\text{Перемішування} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Слабке перемішування} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{Розсіювання} \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{Розтягування} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[dd, Rightarrow] & \text{Чутливість Лі – Йорка} \arrow[d, Rightarrow] \arrow[ddr, dotted, Rightarrow, "?"] & \text{Сильний хаос} \arrow[dd, Rightarrow] \\
 & \text{Чутливість} & \\
\text{Топологічний хаос} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[rr, Rightarrow] & & \text{Хаос Лі – Йорка}
\end{tikzcd}$$

Якщо динамічна система є мінімальною, то, як нам вже відомо, деякі з означень хаосу є еквівалентними. Більш точно, у класі мінімальних динамічних систем поняття слабкого перемішування, розсіювання, сильного хаосу та щільного хаосу Лі – Йорка є еквівалентними. У діаграмі, що наводиться нижче, підсумовано взаємозв'язки між хаотичними системами, описаними вище для мінімального випадку (більш того, ми додали щільний хаос Лі – Йорка, тобто такий хаос Лі – Йорка, коли скрамблена множина скрізь щільна у просторі).

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{Перемішування} \arrow[d, Rightarrow] & \\
\text{Слабке перемішування} \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{Розсіювання} \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{Сильний хаос} \arrow[d, Leftrightarrow] \\
\text{Чутливість} & \text{Чутливість Лі – Йорка} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[d, dotted, "?"] & \text{Щільний хаос Лі – Йорка} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[dl, Rightarrow] \\
 & \text{Хаос Лі – Йорка} \arrow[ul, Rightarrow] & \\
 & \text{Топологічний хаос} \arrow[u, Rightarrow] &
\end{tikzcd}
$$

У таблиці наведено деякі класи транзитивних динамічних систем та їх належність (позначена як $\subsetneq$) до множин хаотичних систем, що описані в наведених вище діаграмах, чи непорожній перетин (позначений як $\cap$) з ними: *1* — топологічно хаотичні; *2* — топологічно перемішуючі; *3* — слабко перемішуючі; *4* — розсіюючі; *5* — сильно хаотичні; *6* — хаотичні за Лі – Йорком; *7* — чутливі за Лі – Йорком; *8* — чутливі. Знак ? означає, що автор нічого не знає про взаємозв'язок.

Клас динамічних систем	1	2	3	4	5	6	7	8
SP-системи	$\subsetneq$	$\subsetneq$	$\subsetneq$	$\subsetneq$	$\subsetneq$	$\subsetneq$	$\subsetneq$	$\subsetneq$
F-системи	$\cap$	$\subsetneq$	$\subsetneq$	$\subsetneq$	$\subsetneq$	$\subsetneq$	$\subsetneq$	$\subsetneq$
P-системи	$\cap$	$\cap$	$\cap$	$\cap$	$\cap$	$\subsetneq$	?	$\subsetneq$
M-системи	$\cap$	$\cap$	$\cap$	$\cap$	$\cap$	?	?	$\subsetneq$
ToP-системи	$\cap$	?	?	?	?	$\subsetneq$	?	$\subsetneq$
ToM-системи	$\cap$	?	?	?	?	?	?	$\subsetneq$

Якщо розглядати динамічні системи на певному фіксованому просторі, відповідні дослідження, можливо, будуть більш деталізованими. Нагадаємо, як приклад, що для відображень відрізка багато з наведених означень хаосу збігаються та існують досить цікаві дослідження. Більш того, можна розглядати взаємозв'язок між різними концепціями хаосу для загальних (не тільки транзитивних) неперервних відображень. Для порівняння наведемо відповідну частину діаграми для неперервних динамічних систем на відрізку з [9].

$$
\begin{tikzcd}
 & SP\text{-система} \arrow[r, Leftrightarrow] & F\text{-система} \arrow[d, Leftrightarrow] \\
\text{Тотальна транзитивність} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{Слабке перемішування} \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{Перемішування} \\
\text{Транзитивність} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dd, Leftrightarrow] & \text{Сильний хаос} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
 & & \text{Топологічний хаос} \arrow[d, Rightarrow] \\
P\text{-система} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Чутливість} \arrow[ur, Rightarrow] & \text{Хаос Лі – Йорка}
\end{tikzcd}
$$

Насамкінець зауважимо, що питання хаотичності чи простоти даної системи скоріш за все філософське. Як ми бачили, в одному сенсі система може бути хаотичною, а в іншому — простою. Тому з математичної точки зору всі концепції хаосу цікаві насамперед для подальшого дослідження властивостей динамічних систем.

Наведемо ще один спосіб порівняння систем, який започаткував H. Furstenberg [40]. Він увів у теорію динамічних систем поняття несумісності систем, використавши ідею, що дві несумісні системи не повинні мати спільних факторів.

Дві топологічні динамічні системи (X, T) та (Y, S) називають *несумісними*, якщо не існує власної замкненої $(T \times S)$-інваріантної підмножини прямого добутку $X \times Y$ з проекціями X та Y на дві координати; таку множину називають *об'єднуючою*. Нагадаємо, що коли дві системи є несумісними, тоді хоча б одна з них є мінімальною.

Наведемо ще один факт з [33]: будь-яка транзитивна майже дистальна система є несумісною з усіма розсіюючими системами (зокрема, з усіма слабко перемішуючими системами). Більш детальні і нові дослідження систем, що є несумісними з мінімальними, викладено в [53].

1. *Li T. Y., Yorke J. A.* Period three implies chaos // Amer. Math. Mon. – 1975. – **82**. – P. 985 – 992.
2. *Kolyada S.* On spatiotemporal chaos. – Bonn, 2002. – 15 p. – (Preprint / Max-Planck-Institut für Mathematik; 02.26).
3. *Akin E., Kolyada S.* Li – Yorke sensitivity // Nonlinearity. – 2003. – **16**. – P. 1421 – 1433.
4. *Alseda L., Llibre J., Misiurewicz M.* Combinatorial dynamics and entropy in dimension one. – River Edge, NJ: World Sci. Publ., 1993 (Second ed. – 2000. – xvi+415 p.).
5. *Block L., Coppel W. A.* Dynamics in one dimension // Lect. Notes Math. – Berlin: Springer, 1992. – **1513**. – viii+249 p.
6. *de Melo W., van Strien S. J.* One-dimensional dynamics. – Berlin: Springer, 1993. – xiv+605 p.

7. *Шарковский А. Н., Коляда С. Ф., Сивак А. Г., Федоренко В. В.* Динамика одномерных отображений. – Киев: Наук. думка, 1989. – 216 с.
8. *Kolyada S., Snoha L.* Some aspects of topological transitivity — a survey // Grazer Math. Ber., Bericht. – 1997. – **334**. – P. 3–35.
9. *Ruette S.* Chaos for continuous interval maps — a survey of relationship between the various sorts of chaos. – 2003. – 123 p. – Preprint. – (Web address–http: //www.math.u-psud.fr/ ruette/abstracts/abstract-chaos-int.html).
10. *Шарковский А. Н.* Сосуществование циклов для непрерывных отображений прямой в себя // Укр. мат. журн. – 1964. – **16**, № 1. – С. 61–71.
11. *Шарковский А. Н.* О циклах и структуре непрерывного отображения // Там же. – 1965. – **17**, № 1. – С. 104–111.
12. *Sharkovkii A. N.* Coexistence of cycles of a continuous map of the line into itself // J. Tolosa. Int. J. Bifurc. Chaos Appl. Sci. Engrg. – 1995. – **5**, № 5. – P. 1263–1273. (Transl. from the Russian [Ukr. Mat. Zh. – 1964. – **16**, № 1. – P. 61–71].)
13. *Smítal J.* Chaotic functions with zero topological entropy // Trans. Amer. Math. Soc. – 1986. – **297**. – P. 269–282.
14. *Fedorenko V. V., Sharkovkii A. N., Smítal J.* Characterizations of weakly chaotic maps of the interval // Proc. Amer. Math. Soc. – 1990. – **110**. – P. 141–148.
15. *Janková K., Smítal J.* A characterization of chaos // Bull. Austral. Math. Soc. – 1986. – **34**. – P. 283–292.
16. *Kuchta M., Smítal J.* Two point scrambled set implies chaos // Eur. Conf. Iteration Theory (ECIT 87). – Singapore: World Sci. Publ., 1989. – P. 427–430.
17. *Piorek J.* On the generic chaos in dynamical systems // Univ. Iagel. Acta Math. – 1985. – **25**. – P. 293–298.
18. *Snoha L.* Generic chaos // Comment. math. Univ. carol. – 1990. – **31**. – P. 793–810.
19. *Snoha L.* Dense chaos // Ibid. – 1992. – **33**. – P. 747–752.
20. *Bruckner A. M., Thakyin Hu.* On scrambled sets for chaotic functions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1987. – **301**. – P. 289–297.
21. *Akin E.* The general topology of dynamical systems // Grad. Stud. Math. – Providence: Amer. Math. Soc., 1993. – **1**. – x+261 p.
22. *Banks J.* Regular periodic decompositions for topologically transitive maps // Ergod. Theory and Dynam. Syst. – 1997. – **17**. – P. 505–529.
23. *Kinoshita S.* On orbits of homeomorphisms // Colloq. math. – 1958. – **6**. – P. 49–53.
24. *Downarowicz T., Ye X.* When every point is either transitive or periodic // Ibid. – 2002. – **93**. – P. 137–150.
25. *Auslander J.* Minimal flows and their extensions // North-Holland Math. Stud. – Amsterdam: Elsevier-Sci. Publ., 1988. – **153**. – xii+265 p.
26. *Ellis R.* A semigroup associated with a transformation group // Trans. Amer. Math. Soc. – 1960. – **94**. – P. 272–281.
27. *Auslander J., Yorke J.* Interval maps, factors of maps and chaos // Tohoku Math. J. – 1980. – **32**. – P. 177–188.
28. *Glasner E., Weiss B.* Sensitive dependence on initial conditions // Nonlinearity. – 1993. – **6**. – P. 1067–1075.
29. *Akin E., Auslander J., Berg K.* When is a transitive map chaotic? // Convergence in Ergodic Theory and Probability (Columbus, OH, 1993). – 1996. – **5**. – P. 25–40.
30. *Adler R., Konheim A., McAndrew J.* Topological entropy // Trans. Amer. Math. Soc. – 1965. – **114**. – P. 309–319.
31. *Walters P.* An introduction to ergodic theory // Grad. Texts Math. – 1982. – **79**. – ix+250 p.
32. *Blanchard F., Host B., Maass A.* Topological complexity // Ergodic Theory and Dynam. Syst. – 2000. – **20**. – P. 641–662.
33. *Blanchard F., Glasner E., Kolyada S., Maass A.* On Li–Yorke pairs // J. reine und angew. Math. – 2002. – **547**. – P. 51–68.
34. *Blanchard F., Host B., Ruette S.* Asymptotic pairs in positive–entropy systems // Ergod. Theory and Dynam. Syst. – 2002. – **22**. – P. 671–686.
35. *Ruelle D., Takens F.* On the nature of turbulence // Communs Math. Phys. – 1971. – **20** (and **23**). – P. 167–192 (and 343–344).
36. *Devaney R.* Chaotic dynamical systems. – 2nd edn. – New York: Addison-Wesley, 1989.
37. *Huang W., Ye X.* Devaney's chaos or 2–scattering implies Li–Yorke chaos // Topology and Appl. – 2002. – **117**. – P. 259–272.
38. *Gottschalk W., Hedlund G.* Topological dynamics. – Providence: Amer. Math. Soc., 1955. – vii+151 p.
39. *King J. L.* A map with topological minimal self-joinings in the sense of del Junco // Ergod. Theory and Dynam. Syst. – 1990. – **10**. – P. 745–761.

40. *Furstenberg H.* Disjointness in ergodic theory, minimal sets and a problem in diophantine approximation // Math. Syst. Theory. – 1967. – **1**. – P. 1–55.
41. *Glasner S., Maon D.* Rigidity in topological dynamics // Ergod. Theory and Dynam. Syst. – 1989. – **9**. – P. 309–320.
42. *Jiménez López V., Snoha L.* Stroboscopical property in topological dynamics // Topology and Appl. – 2003. – **129**. – P. 301–316.
43. *Crannell A.* A chaotic, non-mixing subshift // Discrete Contin. Dynam. Systems. – 1998. – **1**. – P. 195–202.
44. *Akin E.* Recurrence in topological dynamics: Furstenberg families and Ellis actions. – New York: Plenum, 1997. – x+265 p.
45. *Kolyada S., Snoha L., Trofimchuk S.* Noninvertible minimal maps // Fund. math. – 2001. – **168**. – P. 141–163.
46. *Weiss B.* Topological transitivity and ergodic measures // Math. Syst. Theory. – 1971. – **5**. – P. 71–75.
47. *Glasner E., Weiss B.* Locally equicontinuous dynamical systems // Colloq. math. – 2000. – **84/85**. – P. 345–361.
48. *Denker M., Grillenberger C., Sigmund K.* Ergodic theory on compact spaces // Lect. Notes Math. – Berlin: Springer, 1976. – **527**. – iv+360 p.
49. *Murinova E.* Generic chaos in metric spaces // Acta Univ. M. Belii Ser. Math. – 2000. – **8**. – P. 43–50.
50. *Akin E., Glasner E.* Residual properties and almost equicontinuity // J. Anal. Math. – 2001. – **84**. – P. 243–286.
51. *Iwanik A.* Independent sets of transitive points // Dynam. Syst. and Ergod. Theory. – 1989. – **23**. – P. 277–282.
52. *Mycielski J.* Independent sets in topological algebras // Fund. math. – 1964. – **55**. – P. 139–147.
53. *Huang W., Ye X.* Dynamical systems disjoint from any minimal system. – 2003. – 29 p. – Preprint.

Одержано 19.03.2004