УДК 517.5

А. Ф. Тедеев, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

О мультипликативных неравенствах в областях с некомпактной границей

Получены точные теоремы вложения мультипликативного типа для функций из пространств С. Л. Соболева, определенных в области $\Omega \subset R^n$, $n \geqslant 2$, с некомпактной границей. Основное требование к области — это условие изопериметрического типа.

Одержані точні теореми вкладення мультиплікативного типу для функцій із просторів С. Л. Соболєва, визначених у області $\Omega \subset R^n$, $n \geqslant 2$, з некомпактною границею. Головна вимога до області — це умова ізопериметричного типу.

1. Пусть $\Omega \subset R^n$, $h \geqslant 2$,— неограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$. Для удобства будем считать, что начало координат принадлежит Ω. Следуя [1], введем класс областей, удовлетворяющих глобально условию изопериметрического типа. Определим функцию сечения $l(v)$, $v > 0$, области Ω следующим образом. Обозначим через Q произвольное открытое подмножество Ω. Пусть $l(v) = \inf \mathrm{mes}_{n-1}(\partial Q \cap \Omega)$, где точная нижняя грань берется по всем Q таким, что $|Q| = v$ (здесь и далее $|\cdot| \equiv \mathrm{mes}_n(\cdot)$). Пусть функция $g(v)$, $v > 0$,— положительно монотонно не убывает и существует такое $\varepsilon_0 > 0$ ($\varepsilon_0 \leqslant 1/n$), что $\forall v > 0$ функция $v^{1-\varepsilon_0}/g(v)$ монотонно не убывает. Будем говорить, что Ω принадлежит классу $\mathcal{U}(g)$, если $\forall v > 0$ $l(v) \geqslant g(v)$. Через $W_p^2(\Omega)$, $p > 1$, обозначим пространство функций, полученное пополнением множества функций класса $C_0^\infty(R^n)$ по норме

$$\|f\|_{W_p^2(\Omega)} = \Big(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leqslant 2} |D^\alpha f|^p \, dx\Big)^{1/p},$$

а через $\widetilde{W}_p^2(\Omega)$ — замыкание множества $\widetilde{\mathscr{D}}$-функций класса $C_0^\infty(R^n)$, удовлетворяющих условию $\partial f/\partial\nu|_{\partial\Omega}=0$ по норме $W_p^2(\Omega)$ (здесь $\partial f/\partial\nu$ — производная по внешней нормали к $\partial\Omega$).

Пусть, далее,

$$\mathscr{P}_{\gamma,p}(v)=\int_0^v\frac{d\xi}{\xi}\int_0^\xi\frac{\theta^{\gamma(2-1/p)}}{(g(\theta))^{2\gamma}}\,d\theta,$$

$$\widetilde{\mathscr{P}}_p(v)=\int_0^v\frac{d\xi}{\xi}\int_0^\xi\frac{\theta^{1-1/p}}{g^2(\theta)}\,d\theta,$$

$$E_\theta=\int_\Omega|f|^\theta\,dx.$$

В дальнейшем через c_i, $i=1,2,\ldots$, будем обозначать положительные постоянные, величина которых для нас несущественна.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\Omega\in\mathscr{U}(g)$. Тогда для любой функции $f\in\widetilde{W}_p^2(\Omega)\cap\cap L_\beta(\Omega)$ справедливы следующие утверждения:*

а) если числа γ, p, β таковы, что $1<\gamma<p/(1-2\varepsilon_0 p)$, $p>1$, $0<\beta<\gamma$, $p<1/2\varepsilon_0$, то

$$\left(\int_\Omega|D^2f|^p\,dx\right)^{1/p}\geqslant c_1\frac{E_\gamma^{1/\gamma}}{\left(\mathscr{P}_{\gamma,p}\left(c_2E_\beta^{\frac{\gamma}{\gamma-\beta}}/E_\gamma^{\frac{\beta}{\gamma-\beta}}\right)\right)^{1/\gamma}};\tag{1}$$

б) если $p>1/2\varepsilon_0$, $\beta>0$, то

$$\left(\int_\Omega|D^2f|^p\,dx\right)^{1/p}\geqslant c_3E_\infty/\widetilde{\mathscr{P}}_p(c_4E_\beta/E_\infty^\beta).\tag{2}$$

Отметим, что неравенство типа (1) для функции из класса $W_2^1(\Omega)\cap L_1(\Omega)$ установлено в работе [1]. Если $g(v)=c_5v^{(n-1)/n}$, неравенства (1) и (2) приобретают вид неравенств Ниренберга — Гальярдо [2].

2. Перейдем к доказательству теоремы 1. Прежде всего докажем аналог неравенства Стеклова. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $\Omega\in\mathscr{U}(g)$, $A_f(\varepsilon)=\{x\in\Omega:f(x)>\varepsilon\}$. Тогда для любой функции $f\in\widetilde{D}$ и любого $\varepsilon>0$ справедливы неравенства*

$$\int_{\mathscr{A}_{|f|}(\varepsilon)}(|f(x)|-\varepsilon)^\gamma\,dx\leqslant c_6\mathscr{P}_{\gamma,p}(|\mathscr{A}_{|f|}(\varepsilon)|)\Big(\int_{\mathscr{A}_{|f|}(\varepsilon)}|\Delta f|^p\,dx\Big)^{\gamma/p}\tag{3}$$

при $1<\gamma<p/(1-2\varepsilon_0p)$, $p<1/2\varepsilon_0$,

$$\|f\|_{L_\infty(\mathscr{A}_{|f|}(\varepsilon))}\leqslant c_7\Big(\int_{\mathscr{A}_{|f|}(\varepsilon)}|\Delta f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}\widetilde{\mathscr{P}}_p(|\mathscr{A}_{|f|}(\varepsilon)|)+2\varepsilon\tag{4}$$

при $p>1/2\,\varepsilon_0$, где Δ — оператор Лапласа по переменным $x_1,\ldots,x_n$.

Доказательство. Пользуясь формулой интегрирования по множеству линии уровня функции $f(x)$ (см. например, [3, с. 40]), для любых $0<\lambda_1<\lambda_2$ имеем

$$\int_{\mathscr{A}_f(\lambda_1)\setminus\mathscr{A}_f(\lambda_2)}|Df(x)|\,dx=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\mathrm{mes}_{n-1}E(\lambda)\,d\lambda,$$

где $E(\lambda)=\{f=\lambda\}$. Отсюда получаем

$$g(|\mathscr{A}_f(\lambda_2)|)(\lambda_2-\lambda_1)\leqslant\int_{\mathscr{A}_f(\lambda_1)\setminus\mathscr{A}_f(\lambda_2)}|Df(x)|\,dx.\tag{5}$$

После возведения обоих частей неравенства (5) в степень γ и применения неравенства Гельдера получим

$$\frac{(g(|\mathcal{A}_f(\lambda_2)|))^{\gamma}(\lambda_2-\lambda_1)^{\gamma}}{|\mathcal{A}_f(\lambda_1)\setminus\mathcal{A}_f(\lambda_2)|^{\gamma/2}}\leqslant\Big(\int\limits_{\mathcal{A}_f(\lambda_1)\setminus\mathcal{A}_f(\lambda_2)}|\mathrm{D}f|^2\,dx\Big)^{\gamma/2}. \tag{6}$$

Учитывая граничное условие $\partial f/\partial\nu|_{\partial\Omega}=0$ и финитность $f(x)$ в R^n, а также равенство $|\mathrm{D}f|=-\partial f/\partial\nu$ на множестве $E(\lambda)$, где $\partial f/\partial\nu$ — производная по внутренней нормали, по формуле Грина имеем

$$\int\limits_{E(\lambda)}|\mathrm{D}f|\,ds=-\int\limits_{\mathcal{A}_f(\lambda)}\Delta f dx.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\mathcal{A}_f(\lambda_1)\setminus\mathcal{A}_f(\lambda_2)}|\mathrm{D}f|^2\,dx=\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2}\Big(\int\limits_{E(\lambda)}|\mathrm{D}f|\,ds\Big)d\lambda=-\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2}\Big(\int\limits_{\mathcal{A}_f(\lambda)}\Delta f dx\Big)d\lambda\leqslant$$

$$\leqslant(\lambda_2-\lambda_1)\int\limits_{\mathcal{A}_f(\lambda_1)}|\Delta f|\,dx. \tag{7}$$

Обозначим $\lambda_k=\inf\{\lambda:|\mathcal{A}_f(\lambda)|\leqslant 2^{-k}|\mathcal{A}_f(\varepsilon)|\}$. Очевидно, $\lambda_0=\varepsilon\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\leqslant\ldots\leqslant\lambda_k\leqslant\ldots$. Рассмотрим последовательность множеств D_k, удовлетворяющих условиям

$$\Omega\setminus B_f(\lambda_k)\supset\mathrm{D}_k\supset\mathcal{A}_f(\lambda_k),\quad|\mathrm{D}_k|=2^{-k}|\mathcal{A}_f(\varepsilon)|,$$
$$B_f(\lambda)=\{x\in\Omega:f(x)\leqslant\lambda\}.$$

Тогда

$$\lim_{\varkappa\to 0}|\mathcal{A}_f(\lambda_k+\varkappa)|=|\mathcal{A}_f(\lambda_k)|\leqslant|\mathrm{D}_k|\leqslant|\Omega\setminus B_f(\lambda_k)|=\lim_{\varkappa\to 0}|\mathcal{A}_f(\lambda_k-\varkappa)|. \tag{8}$$

Значит, из соотношений (7) и (8) получаем

$$\frac{(g(\lim\limits_{\varkappa\to 0}|\mathcal{A}_f(\lambda_k-\varkappa)|))^{\gamma}(\lambda_k-\lambda_{k-1})^{\gamma/2}}{\lim\limits_{\varkappa\to 0}|\mathcal{A}_f(\lambda_{k-1}+\varkappa)\setminus\mathcal{A}_f(\lambda_k-\varkappa)|^{\gamma/2}|\mathcal{A}_f(\lambda_{k-1}+\varkappa)|^{\gamma(p-1)/2p}}\leqslant$$

$$\leqslant\Big(\int\limits_{\mathcal{A}_f(\lambda_{k-1})}|\Delta f|^p\,dx\Big)^{\gamma/2p}. \tag{9}$$

Обозначим $v_k=2^{-k}|\mathcal{A}_f(\varepsilon)|$ $(v_0=|\mathcal{A}_f(\varepsilon)|)$. Тогда неравенство (9) принимает следующий вид:

$$\frac{(g(v_k))^{2\gamma}(\lambda_k-\lambda_{k-1})^{\gamma}}{|\mathrm{D}_{k-1}|^{\gamma+\gamma(p-1)/p}}\leqslant\Big(\int\limits_{\mathcal{A}_f(\varepsilon)}|\Delta f|^p\,dx\Big)^{\gamma/p}. \tag{10}$$

Пользуясь неравенством Буняковского, имеем

$$(\lambda_k-\lambda_0)^{\gamma}=\Big(\sum_{m=1}^{k}(\lambda_m-\lambda_{m-1})\Big)^{\gamma}\leqslant k^{\gamma-1}\sum_{m=1}^{k}(\lambda_m-\lambda_{m-1})^{\gamma}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\mathcal{A}_f(\varepsilon)}(f-\varepsilon)^{\gamma}\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{D_{k-1}\setminus D_k}(f-\varepsilon)^{\gamma}\,dx\geqslant v_0\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}(\lambda_k-\lambda_0)^{\gamma}\leqslant$$

$$\leqslant v_0\sum_{k=1}^{\infty}k^{\gamma-1}2^{-k}\sum_{m=1}^{k}(\lambda_m-\lambda_{m-1})^{\gamma}\leqslant v_0\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k-\lambda_{k-1})^{\gamma}\sum_{m=k}^{\infty}2^{-m}m^{\gamma-1}\leqslant$$

$$\leqslant v_0 \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^{\gamma-1} 2^{-m} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} k^{\gamma-1} (\lambda_k - \lambda_{k-1})^{\gamma} \leqslant c_8 v_0 \sum_{k=1}^{\infty} k^{\gamma-1} 2^{-k} (\lambda_k - \lambda_{k-1})^{\gamma}.$$

С учетом (10) отсюда получаем

$$\int\limits_{\mathcal{A}_f(\varepsilon)} (f-\varepsilon)^{\gamma}\, dx \leqslant c_8 \Big(\int\limits_{\mathcal{A}_f(\varepsilon)} |\Delta f|^p\, dx \Big)^{\gamma/p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k^{\gamma(2-1/p)+1} k^{\gamma-1}}{(g(v_k))^{2\gamma}}. \tag{11}$$

Пусть

$$\Phi(v) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{\gamma-1} (2^{-k} v)^{\gamma(2-1/p)+1}}{(g(2^{-k} v))^{2\gamma}}.$$

Поскольку функция $v^{1-\varepsilon_0}/g(v)$ монотонно не убывает, то найдется такое $N: 2^{-N} v_0 < \varkappa$, $g(v_k) \geqslant c_9 v_k^{1-\varepsilon_0}$ для $k \geqslant N$. Таким образом,

$$\frac{k^{\gamma-1} 2^{-k(\gamma(2-1/p)+1)}}{(g(v_k))^{2\gamma}} \leqslant c_{10} \frac{k^{\gamma-1} 2^{-k(1-\gamma/p+2\gamma\varepsilon_0)}}{v_0^{2\gamma(1-\varepsilon_0)}}.$$

Значит, функция $\Phi(v)$ определена для всех $v > 0$ (напомним, что $1 - \gamma/p + 2\gamma\varepsilon_0 > 0$). Пусть $k - 1 \leqslant \eta \leqslant k$. Тогда

$$\frac{k^{\gamma-1} 2^{-k(\gamma(2-1/p)+1)}}{(g(v 2^{-k}))^{2\gamma}} \leqslant \frac{(\eta+1)^{\gamma-1} 2^{-\eta(\gamma(2-1/p)+1)}}{(g(v 2^{-(\eta+1)}))^{2\gamma}}.$$

Следовательно,
$$\Phi(v) \leqslant \int_0^{\infty} \frac{(\eta+1)^{\gamma-1} (v 2^{-\eta})^{\gamma(2-1/p)+1}}{(g(2^{-(\eta+1)} v))^{2\gamma}}\, d\eta.$$

Сделаем замену переменных $v 2^{-(\eta+1)} = \zeta$. Тогда

$$\Phi(v) \leqslant c_{11} \int_0^{v} \frac{\left(\ln \frac{v}{\zeta}\right)^{\gamma-1} \zeta^{\gamma(2-1/p)}}{g^{2\gamma}(\zeta)}\, d\zeta \equiv c_{11} \Phi_1(v).$$

Легко установить справедливость оценки

$$\Phi_1(v) \leqslant c_{12} \mathcal{P}_{\gamma,p}(v). \tag{12}$$

Значит, из (11) и (12) получаем

$$\int\limits_{\mathcal{A}_f(\varepsilon)} (f-\varepsilon)^{\gamma}\, dx \leqslant c_{13} \Big(\int\limits_{\mathcal{A}_f(\varepsilon)} |\Delta f|^{\gamma}\, dx \Big)^{\gamma/p} \mathcal{P}_{\gamma,p}(|\mathcal{A}_f(\varepsilon)|). \tag{13}$$

Далее имеем

$$\int\limits_{\mathcal{A}_{|f|}(\varepsilon)} (|f|-\varepsilon)^{\gamma}\, dx = \int\limits_{\mathcal{A}_f(\varepsilon)} (f-\varepsilon)^{\gamma}\, dx + \int\limits_{\mathcal{A}_{-f}(\varepsilon)} (-f-\varepsilon)^{\gamma}\, dx.$$

В силу неравенства (13) отсюда находим

$$\int\limits_{\mathcal{A}_{|f|}(\varepsilon)} (|f|-\varepsilon)^{\gamma}\, dx \leqslant c_{13} \Big(\int\limits_{\mathcal{A}_f(\varepsilon)} |\Delta f|^p\, dx \Big)^{\gamma/p} \mathcal{P}_{\gamma,p}(|\mathcal{A}_f(\varepsilon)|) +$$

$$+ c_{13} \Big(\int\limits_{\mathcal{A}_{-f}(\varepsilon)} |\Delta f|^p\, dx \Big)^{\gamma/p} \mathcal{P}_{\gamma,p}(|\mathcal{A}_{-f}(\varepsilon)|) \leqslant 2 c_{13} \Big(\int\limits_{\mathcal{A}_{|f|}(\varepsilon)} |\Delta f|^p\, dx \Big)^{\gamma/p} \times$$

$$\times \mathcal{P}_{\gamma,p}(|\mathcal{A}_{|f|}(\varepsilon)|).$$

Следовательно, неравенство (3) доказано. Докажем неравенство (4). Пусть λ_k, $k = 0, 1, \ldots, D_k$ те же, что и при доказательстве неравенства (3).

Тогда, рассуждая так же, как в предыдущем случае, получаем

$$\lambda_k - \lambda_{k-1} \leqslant \frac{|D_{k-1}|^{2-1/p}}{g^2(v_k)} \Big(\int_{D_{k-1}} |\Delta f|^p \, dx \Big)^{1/p}. \tag{14}$$

Учитывая, что

$$\lambda_k - \varepsilon = \sum_{m=1}^{k} (\lambda_m - \lambda_{m-1}) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_m - \lambda_{m-1}),$$

из (14) имеем

$$\lambda_k - \varepsilon \leqslant \Big(\int_{\mathcal{A}_f(\varepsilon)} |\Delta f|^p \, dx \Big)^{1/p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k^{2-1/p}}{g^2(v_k)}. \tag{15}$$

Пусть

$$\widetilde{\Phi}(v) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v^{2-1/p} 2^{-k(2-1/p)}}{g^2(v 2^{-k})}.$$

В силу монотонности функции $v^{1-\varepsilon_0}/g(v)$ и того, что $p > 1/2\varepsilon_0$, функция $\tilde{\Phi}(v)$ определена для всех $v > 0$. Кроме того легко проверить, что

$$\widetilde{\Phi}(v) \leqslant c_{14} \int_0^v \frac{d\xi}{\xi} \int_0^{\xi} \frac{\theta^{1-1/p}}{g^2(\theta)} \, d\theta.$$

Значит, из (15) вытекает

$$\|f\|_{L_\infty(\mathcal{A}_f(\varepsilon))} \leqslant \varepsilon + c_{14} \Big(\int_{\mathcal{A}_f(\varepsilon)} |\Delta f|^p \, dx \Big)^{1/p} \widetilde{\mathcal{P}}_p(|\mathcal{A}_f(\varepsilon)|).$$

Отсюда легко показать, что

$$\|f\|_{L_\infty(\mathcal{A}_{|f|}(\varepsilon))} \leqslant 2\varepsilon + c_{15} \Big(\int_{\mathcal{A}_{|f|}(\varepsilon)} |\Delta f|^p \, dx \Big)^{1/p} \widetilde{\mathcal{P}}_p(|\mathcal{A}_{|f|}(\varepsilon)|).$$

Таким образом, лемма 1 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 1. Неравенства (1) и (2) достаточно доказать для функции из класса $\tilde{\mathcal{D}}$. Рассмотрим два случая. Случай $\beta \geqslant 1$, $\gamma < p/(1 - 2\varepsilon_0 p)$ Имеем

$$\int_{\Omega} |f|^\gamma \, dx = \int_{\mathcal{A}(\varepsilon)} |f|^\gamma \, dx + \int_{\Omega \setminus \mathcal{A}(\varepsilon)} |f|^\gamma \, dx \leqslant \int_{\mathcal{A}(\varepsilon)} |f|^\gamma \, dx + \varepsilon^{\gamma-\beta} \int_{\Omega \setminus \mathcal{A}(\varepsilon)} |f|^\beta \, dx,$$

$$\mathcal{A}(\varepsilon) \equiv \mathcal{A}_{|f|}(\varepsilon). \tag{16}$$

Поскольку

$$|\mathcal{A}(\varepsilon)| \leqslant \varepsilon^{-\beta} \int_{\mathcal{A}(\varepsilon)} |f|^\beta \, dx, \quad |f|^\gamma \leqslant c_{16}((|f| - \varepsilon)^\gamma + \varepsilon^\gamma),$$

то

$$\int_{\mathcal{A}(\varepsilon)} |f|^\gamma \, dx \leqslant c_{16} \Big(\int_{\mathcal{A}(\varepsilon)} (|f| - \varepsilon)^\gamma \, dx + \varepsilon^{\gamma-\beta} \int_{\mathcal{A}(\varepsilon)} |f|^\beta \, dx \Big). \tag{17}$$

Объединяя неравенства (16) и (17), получаем

$$E_\gamma \leqslant c_{17} \Big(\int_{\mathcal{A}(\varepsilon)} (|f| - \varepsilon)^\gamma \, dx + \varepsilon^{\gamma-\beta} E_\beta. \tag{18}$$

В силу леммы 1 из неравенства (18) получаем

$$E_\gamma \leqslant c_{18} (\mathcal{P}_{\gamma,p}(\varepsilon^{-\beta} E_\beta) J^{\gamma/p} + \varepsilon^{\gamma-\beta} E_\beta), \tag{19}$$

где

$$J = \int_{\Omega} |D^2 f|^p \, dx.$$

Обозначим $z = \varepsilon^{-\beta} E_\beta$ и определим z из условия

$$\mathcal{P}_{\gamma,p}(z)\, z^{\gamma-\beta/\beta} = J^{-\gamma/p} E_\beta^{\gamma/p}.$$

Тогда $z = \Psi_{-1}(J^{-\gamma/p} E_\beta^{\gamma/p})$, где $\Psi_{-1}(s)$ — обратная к $\Psi(v) = v^{(\gamma-\beta)/\beta}\mathcal{P}_{\gamma,p}(v)$ функция. Значит,

$$\varepsilon = E_\beta^{1/\beta}/(\Psi_{-1}(J^{-\gamma/p} E_\beta^{\gamma/\beta}))^{1/\beta}.$$

Если взять в правой части неравенства это значение ε, то будем иметь

$$E_\gamma \leqslant c_{19} \frac{E_\beta^{\gamma/\beta}}{(\Psi_{-1}(J^{-\gamma/p} E_\beta^{\gamma/\beta}))^{(\gamma-\beta)/\beta}}.$$

Отсюда элементарными преобразованиями получаем

$$J^{1/p} \geqslant c_{20} \frac{E_\gamma^{1/\gamma}}{\left(\mathcal{P}_{\gamma,p}\left(c_{21}\dfrac{E_\beta^{\gamma/(\gamma-\beta)}}{E_\gamma^{\beta/(\gamma-\beta)}}\right)\right)^{1/\gamma}}.$$

Следовательно, неравенство (1) доказано для случая $\beta \geqslant 1$, $\gamma < p/(1-2\varepsilon_0 p)$.

Случай $0 < \beta < 1$, $\gamma < p/(1-2\varepsilon_0 p)$.

Неравенство (1) при $\beta = 1$ примет вид

$$J^{1/p} \geqslant c_{22} \frac{E_\gamma^{1/\gamma}}{(\mathcal{P}_{\gamma,p}(c_{23} E_1^{\gamma/(\gamma-1)}/E_\gamma^{1/(\gamma-1)}))^{1/\gamma}}. \tag{20}$$

Далее, учитывая неравенство

$$E_1 \leqslant E_\beta^{\gamma-1/\gamma-\beta} E_\gamma^{1-\beta/\gamma-\beta}$$

и монотонность функции $\mathcal{P}_{\gamma,p}(v)$, из (20) находим искомое неравенство. Неравенство (1) доказано полностью. Точно так же доказывается неравенство (2). Теорема 1 доказана.

Оценим теперь промежуточную полунорму

$$\left(\int_\Omega |\mathrm{D}f|^p\, dx\right)^{1/p}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть Ω принадлежит классу $\mathcal{U}(g)$. Тогда для любой функции $f(x)$ из $\widetilde{W}_p^2(\Omega) \cap L_\beta(\Omega)$, $p > 1$, $\beta > 0$,*

$$\int_\Omega |\mathrm{D}f|^p\, dx \leqslant c_{23} J^{1/2} E_\beta^{p/2\beta} / \left(\widetilde{\mathcal{P}}_{-1}\left(\frac{c_{24} E_\beta^{p/\beta}}{J}\right)\right)^{p-\beta/2\beta}, \tag{21}$$

где $\widetilde{\mathcal{P}}_{-1}(\theta)$ — обратная к $\widetilde{\mathcal{P}}(s) = s^{p-\beta/\beta}\mathcal{P}_{p,p}(s)$ функция.

Доказательство. Рассуждения достаточно проводить для функций из класса $\widetilde{\mathcal{D}}$. Имеем

$$\int_\Omega f \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(|\mathrm{D}f|^{p-2} f_{x_i})\, dx = -\int_\Omega |\mathrm{D}f|^p\, dx.$$

Отсюда, применяя неравенство Гельдера, получаем

$$\int_\Omega |\mathrm{D}f|^p\, dx \leqslant c(p)\, E_p^{1/p} \left(\int_\Omega |\mathrm{D}f|^p\, dx\right)^{p-2/p} J^{1/p}.$$

Из последнего неравенства следует

$$\left(\int_\Omega |\mathrm{D}f|^p\, dx \leqslant c_{25} J^{1/2} E_p^{1/2}. \tag{22}$$

Оценим далее E_p из теоремы 1 (см. неравенство (1) при $\gamma = p$)

$$E_p \leqslant c_{26} \frac{E_\beta^{p/\beta}}{(\widetilde{\mathcal{P}}_{-1}(c_{27} E_\beta^{p/\beta}/J))^{(p-\beta)/\beta}};$$

отсюда и из оценки (22) следует искомое неравенство (21). Теорема доказана.

3. Целью этого пункта является получение весовых оценок типа (1) и (21). Будем предполагать, что Ω лежат в полупространстве $R_+^n = \{x \in R^n, x_1 > 0\}$. Рассмотрим следующий подкласс областей Ω из $\mathcal{U}(g)$. Обозначим $\Omega(R) = \Omega \cap \{|x| < R\}$, $v(R) = |\Omega(R)|$, $s(R) = \Omega \cap \{|x| = R\}$ $\forall R > 0$. Пусть $l(v(R)) = \mathrm{mes}_{n-1}\, s(R)$ $\forall R > 0$ и функция $g_1(v)$, $v > 0$, удовлетворяет тем же условиям, что и в функции класса $\mathcal{U}(g)$. Будем говорить, что Ω принадлежит классу $\mathcal{B}(g_1)$, если $\forall R > 0$

$$l(v(R)) \geqslant g_1(v(R)), \tag{23}$$

$$\frac{v}{R(v)} \leqslant c_{28} g_1(v) \quad \forall v > 0, \tag{24}$$

функция

$$\frac{V^{1-\widetilde{\varepsilon}_0}}{g_1(\varphi_{-1}(V)))^{1-k}(\varphi_{-1}(V))^k}, \quad \widetilde{\varepsilon}_0 = \frac{\varepsilon_0}{1 + k\varepsilon_0}, \tag{25}$$

монотонно не убывает $\forall V > 0$. Здесь $R(v)$ — обратная к $v(R)$ функция, а $\varphi_{-1}(V)$ — обратная к $\varphi(v) = v^{k+1}/(g_1(v))^k$ функция, k—целое положительное число. Обозначим

$$G(\theta) = (g_1(\varphi_{-1}(\theta)))^{1-k}(\varphi_{-1}(\theta))^k,$$

$$P_{\gamma,p}(s) = \int_0^s \frac{d\xi}{\xi} \int_0^\xi \frac{\theta^{\gamma(2-1/p)}}{(G(\theta))^{2\gamma}} d\theta,$$

$$J_{k,p} = \int_\Omega x_1^k |D^2 f|^p dx, \quad E_{k,\beta} = \int_\Omega x_1^k |f|^\beta dx.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $\Omega \in \mathcal{B}(g_1)$ и числа γ, p, β таковы, что $1 < \gamma < p/(1 - 2\widetilde{\varepsilon}_0 p)$, $p > 1$, $0 < \beta < \gamma$, $p < \frac{1}{2\widetilde{\varepsilon}_0}$. Тогда для любой функции $f(x) \in \widetilde{W}_p^2(\Omega)$, для которой конечны интегралы $J_{k,p}$, $E_{k,\beta}$, справедливы неравенства*

$$E_{k,\gamma}^{1/\gamma} \leqslant c_{29}(P_{\gamma,p}(c_{30} E_{k,\beta}^{\gamma/(\gamma-\beta)}/E_{k,\gamma}^{\beta/(\gamma-\beta)}))^{1/\gamma} J_{k,p}^{1/p}, \tag{26}$$

$$\int_\Omega |Df|^p x_1^k dx \leqslant c_{31} \frac{J_{k,p}^{1/2} E_{k,\beta}^{p/2\beta}}{(\widetilde{P}_{-1}(c_{32} E_{k,\beta}^{p/\beta}/J_{k,\beta}))^{p-\beta/2\beta}}, \tag{27}$$

где $\widetilde{P}_{-1}(\theta)$ — обратная к $\widetilde{P}(s) = s^{p-\beta/\beta} P_{p,p}(s)$ функция.

Доказательство. Пользуясь идеей работы [4, с. 410] (замечание 3), рассмотрим $y = (x, z) = (x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_k) \in R^{n+k}$. Пусть $\widetilde{f}(y) = f(x)$ для $x \in \Omega$. Проверим, что область $\widetilde{\Omega} = \{y \in R^{n+k}, x \in \Omega, 0 < z_i < x_1\}$ принадлежит классу $\mathcal{U}(\mathrm{const}\, G)$. Пусть $V(R) = \mathrm{mes}_{n+k}\{\widetilde{\Omega} \cap \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2 + z_1^2 + \ldots + z_k^2} < R\}$, $S(R) = \{\widetilde{\Omega} \cap \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2 + z_1^2 + \ldots + z_k^2} = R)\}$, $L(V(R)) = c_{32}\, \mathrm{mes}_{n+k-1} S(R)$ $\forall R > 0$. Нетрудно видеть, что

$$L(V(R)) \geqslant c_{33} g_1(v(R)) R^k, \quad V(R) = c_{34} R^k v(R). \tag{28}$$

Кроме того, $\frac{dv(R)}{dR} = l(v(R))$ и поэтому

$$R \leqslant \int_0^v \frac{d\tau}{g_1(\tau)} \leqslant \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{v}{g_1(v)}.$$

С другой стороны, из (24) следует

$$R \geqslant \frac{1}{c_{28}} \frac{v}{g_1(v)}.$$

Следовательно, из (28) получаем

$$c_{35}\varphi(v(R)) \leqslant V(R) \leqslant c_{36}\varphi(v(R)), \quad \forall R > 0,$$

$$L(V(R)) \geqslant c_{37}(g_1(\varphi_{-1}(V(R))))^{1-k}(\varphi_{-1}(V(R)))^k \equiv c_{37}G(V(R)) \quad \forall R > 0,$$

т. е. $\widetilde{\Omega}$ принадлежит классу $\mathcal{U}(c_{37}G)$. Отсюда следует, что имеют место оценки (1), (21) с $\Omega = \widetilde{\Omega}$, $f = \widetilde{f}$:

$$\left(\int_{\widetilde{\Omega}} |\mathrm{D}^2\widetilde{f}|^p \, dxdz\right)^{1/p} \geqslant c_{38} \frac{\left(\int_{\widetilde{\Omega}} |\widetilde{f}|^\gamma \, dxdz\right)^{1/\gamma}}{\left(P_{\gamma,p}\left(c_{39} \frac{\left(\int_{\widetilde{\Omega}} |\widetilde{f}|^\beta dxdz\right)^{\gamma/(\gamma-\beta)}}{\left(\int_{\widetilde{\Omega}} |\widetilde{f}|^\gamma \, dxdz\right)^{\beta/(\gamma-\beta)}}\right)\right)^{1/\gamma}}, \tag{29}$$

$$\int_{\widetilde{\Omega}} |\mathrm{D}\widetilde{f}|^p \, dxdz \leqslant c_{40} \frac{\left(\int_{\widetilde{\Omega}} |\mathrm{D}^2\widetilde{f}|^p \, dxdz\right)^{1/2} \left(\int_{\widetilde{\Omega}} |\widetilde{f}|^\beta \, dxdz\right)^{p/2\beta}}{\left(\widetilde{P}_{-1}\left(c_{41} \frac{\left(\int_{\widetilde{\Omega}} |\widetilde{f}|^\beta \, dxdz\right)^{p/\beta}}{\int_{\widetilde{\Omega}} |\mathrm{D}^2\widetilde{f}|^p \, dxdz}\right)\right)^{(p-\beta)/2\beta}}. \tag{30}$$

Но поскольку для $x \in \Omega$ $\widetilde{f}(y) = f(x)$, $|\mathrm{D}\widetilde{f}| = |\mathrm{D}f|$, $|\mathrm{D}^2 f| = |\mathrm{D}^2\widetilde{f}|$ и

$$\int_{\widetilde{\Omega}} |\widetilde{f}|^\gamma \, dxdz = \int_\Omega x_1^k |f|^\gamma \, dx, \quad \int_{\widetilde{\Omega}} |\mathrm{D}\widetilde{f}|^p \, dxdz = \int_\Omega x_1^k |\mathrm{D}f|^p \, dx,$$

$$\int_{\widetilde{\Omega}} |\mathrm{D}^2\widetilde{f}|^p \, dxdz = \int_{\widetilde{\Omega}} x_1^k |\mathrm{D}^2 f|^p \, dx,$$

то из неравенств (29) и (30) следуют искомые неравенства (25) и (26). Теорема 3 доказана.

Приведем пример. Пусть $\Omega \in \mathcal{B}(g_1)$ и

$$g_1(v) \geqslant c_{42} \min\{v^{1-\varepsilon_0}, v^{1-\alpha_0}\} \quad \forall v > 0, \quad 0 < \varepsilon_0 \leqslant 1/n, \quad 1/n \leqslant \alpha_0 < 1.$$

Тогда в условиях теоремы 3 справедливы соответственно неравенства

$$\int_\Omega x_1^k |f|^\gamma \, dx \leqslant c_{43} \max\{J_{k,p}^{\lambda_k(\varepsilon_0)} E_{k,\beta}^{\theta_k(\varepsilon_0)}, J_{k,p}^{\lambda_k(\alpha_0)} E_{k,\beta}^{\theta_k(\alpha_0)}\}, \tag{31}$$

$$\int_{\Omega} x_1^k \,|\,\mathrm{D}f\,|^p \, dx \leqslant c_{44} \max \{ J_{k,p}^{\varkappa_k(\varepsilon_0)} E_{k,p}^{\xi_k(\varepsilon_0)},\ J_{k,p}^{\varkappa_k(\alpha_0)} E_{k,\beta}^{\xi_k(\alpha_0)} \}, \tag{32}$$

где

$$\lambda_k(\tau) = \left(\frac{1}{\tau} + k\right)(\gamma - \beta)\Big/\left(2p\beta + \left(\frac{1}{\tau} + k\right)(p - \beta)\right),$$

$$\theta_k(\tau) = \frac{2\gamma p + \left(\frac{1}{\tau} + k\right)(p - \gamma)}{\left(2p\beta + \left(\frac{1}{\tau} + k\right)(p - \beta)\right)},$$

$$\varkappa_k(\tau) = \frac{p\beta + \left(\frac{1}{\tau} + k\right)(p - \beta)}{2p\beta + \left(\frac{1}{\tau} + k\right)(p - \beta)},$$

$$\xi_k(\tau) = \frac{p^2}{2p\beta + \left(\frac{1}{\tau} + k\right)(p - \beta)}.$$

При $\varepsilon_0 = \alpha_0 = 1/n$ неравенства (31) и (32) представляют собой известные неравенства типа Ниренберга — Гальярдо [2].

1. *Гущин А. К.* Об оценках решений краевых задач для параболического уравнения второго порядка // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1973.— **126**.— С. 5—45.
2. *Gagliardo E.* Ulterori proprieta di alcune classi di funzioni in piu variable // Ricerche di Mat.— 1959.— **8**.— P. 24—51.
3. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева.— Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.— 416 с.
4. *Adam's R. A.* Some integral inequalities with applications to the imbedding of Sobolev spaces defined over irregular domains // Trans. Amer. Math. Soc.— 1973.— **178**.— P. 401—429.

Получено 09.10.91