УДК 519.71

В. Г. Скобелев, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

Поиск на частично упорядоченных структурах

Разработаны общие методы поиска минимальных и тупиковых выигрышных операторов для класса источников, наделенных структурой частичного порядка. Показана применимость полученных результатов для решения задач теории экспериментов с автоматами и минимизации булевых функций.

Розроблені загальні методи пошуку мінімальних та тупикових виграшних операторів для класу джерел, наділених структурою часткового порядку. Показана застосовність одержаних результатів до розв'язку задач теорії експериментів з автоматами та мінімізації булевих функцій.

1. Введение. Теоретико-множественный подход дал возможность формулировать и решать задачи поиска в терминах операторов, действующих в пространстве ситуаций [1—3]. На этой основе созданы общие методы поиска. Те из них, которые построены при отсутствии ограничений на ситуации и операторы, получили название исчерпывающий поиск. Его большая сложность стимулировала разработку более эффективных, хотя и менее универсальных методов. Наиболее общими из них являются методы, основанные на оценивании. Они построены в предположении, что в пространстве ситуаций можно ввести оценочную функцию, т. е. легко вычислимую меру, характеризующую «расстояние» от любой ситуации до цели. Подход, основанный на оценивании, оказался бесполезным при решении многих фундаментальных задач дискретной математики. Причина этого состоит в следующем. Во-первых, требование существования оценочной функции является чрезвычайно сильным, о чем свидетельствует тот факт, что класс задач, для которых такие функции удалось построить, оказался весьма узким. Во-вторых, из-за отсутствия строгого определения оценочной функции не разрешимы проблемы их существования и конструктивного построения.

В настоящей статье аксиоматически определен достаточно широкий класс представлений, заведомо включающий в себя все те, которые обладают оценочными функциями. Разработаны ориентированные на этот класс общие методы поиска минимальных и тупиковых решений. Рассматривается детализация этих методов для решения задач теории экспериментов с автоматами и минимизации дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ), которые не могут быть решены с помощью оценочных функций. Предложенный подход основан на наделении пространства ситуаций структурой частичного порядка, позволяющего сравнивать «расстояния» от любых двух ситуаций до цели.

Понятия и обозначения работы такие же, как в статьях [4—7].

2. M - источник. Основным объектом исследования является источник. Для удобства пользования будем рассматривать его как систему объектов $\mathcal{G} = (S, \mathcal{F}, s_0, S^1)$, где S — множество ситуаций, $\mathcal{F}$ — конечное множество частичных отображний S в S, $s_0 \in S$ — начальная ситуация, а $S^1 \subseteq S \setminus \{s_0\}$ — множество конечных ситуаций.

Будем называть $\mathcal{F}$ множеством элементарных операторов, а $\mathcal{F}^+$ — множеством операторов. Для них будем использовать правую запись, т. е. действие оператора $f_1 \dots f_r \in \mathcal{F}^+ (r \geqslant 1)$ на ситуацию $s \in S$ определяется равенством $sf_1 \dots f_r = (\dots (sf_1) \dots) f_r$. Обозначим через $\mathcal{F}_s^+ (s \in S)$ множество всех таких операторов $f_1 \dots f_r \in \mathcal{F}^+ (r \geqslant 1)$, что $s \in \mathrm{Dom}\, f$ и $sf_1 \dots f_{i-1} \in \mathrm{Dom}\, f_i$ $(2 \leqslant i \leqslant r)$. При $F \in \mathcal{F}_s^+ (s \in S)$ выражение sF определяет ситуацию, в которую F переводит s; при $F \notin \mathcal{F}_s^+$ выражение sF не определено. Выигрышными операторами для $\mathcal{G}$ назовем операторы, переводящие s_0 в S^1. Длину $d(F)$ оператора $F \in \mathcal{F}^+$ определим как число элементарных операторов, составляющих F. Выигрышные операторы наименьшей длины *называются* минимальными. Обозначим через $\mathcal{L}^{\text{м}}(\mathcal{G})$ множество всех минимальных выигрышных операторов для $\mathcal{G}$ и сформулируем следующие задачи поиска.

Задача 1. Построить множество $\mathcal{L}^{\text{м}}(\mathcal{G})$.

Задача 2. Построить один, безразлично какой, элемент множества $\mathcal{L}^{\text{м}}(\mathcal{G})$.

Решение задачи 1 влечет и решение задачи 2: строим множество $\mathcal{L}^{\text{м}}(\mathcal{G})$ и выбираем из него произвольный элемент. Однако при этом решение задачи 2 существенно усложняется за счет построения множества $\mathcal{L}^{\text{м}}(\mathcal{G})$. Поэтому принципиальное значение имеет выделение ядра $\mathcal{L}_1^{\text{м}}(\mathcal{G})$ множества $\mathcal{L}^{\text{м}}(\mathcal{G})$, удовлетворяющего следующим условиям: 1) $\mathcal{L}_1^{\text{м}}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{L}^{\text{м}}(\mathcal{G})$; 2) построение $\mathcal{G}_1^{\text{м}}(\mathcal{G})$ осуществляется наименее сложно; 3) $\mathcal{L}_1^{\text{м}}(\mathcal{G}) \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}^{\text{м}}(\mathcal{G}) \neq \varnothing$. Таким образом, решение задачи 2 естественно сводится к решению следующей задачи.

Задача 3. Построить множество $\mathcal{L}_1^{\text{м}}(\mathcal{G})$.

Выигрышный оператор $f_1 \dots f_r \in \mathcal{F}^+$ $(r \geqslant 1)$ будем называть тупиковым, если оператор $f_1 \dots f_{i_1-1} f_{i_1+1} \dots f_{i_h-1} f_{i_h+1} \dots f_r$ не является выигрышным при всех $1 \leqslant i_1 < \dots < i_h \leqslant r$ $(h = 1, \dots, r-1)$. Обозначим через $\mathcal{L}^{\text{т}}(\mathcal{G})$ множество всех тупиковых выигрышных операторов для $\mathcal{G}$. Отметим, что для любого источника $\mathcal{G}$ справедливо включение $\mathcal{L}^{\text{м}}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{L}^{\text{т}}(\mathcal{G})$. Тупиковые выигрышные операторы и только они являются не избыточными решениями. Поэтому актуальной является следующая задача поиска.

Задача 4. Построить множество $\mathcal{L}^{T}(\mathcal{G})$.

Если множество $\mathcal{G}$ ситуаций источника $\mathcal{G}$ не наделено никакой структурой, то решение задач 1, 3 и 4 может быть получено только методом исчерпывающего поиска. Одной из наиболее общих теоретико-множественных структур является частичный порядок. Поэтому наделение множества S структурой частичного порядка не налагает больших ограничений на источник. Отметим, что в подавляющем большинстве конкретных задач такой порядок можно ввести. В [2] показано, что строение выигрышных операторов описывается в терминах множеств ситуаций, равноотстоящих от S^1. Следовательно, естественным является требование, чтобы частичный порядок на множестве S был согласован с множествами равностоящих ситуаций. Такой подход позволяет следующим образом определить один из наиболее общих классов структуризированных источников.

Определение 1. *Источник $\mathcal{G} = (S, \mathcal{F}, s_0, S^1)$ назовем M-источником, если на множестве S задано отношение частичного порядка «$\leqslant_S$», удовлетворяющее следующим условиям*: 1) *если $s_1 \in S^1$ и $s_2 \leqslant_S s_1$, то $s_2 \in S^1$*; 2) *если $s_1 \in \mathrm{Dom}\, f$ $(f \in \mathcal{F})$ и $s_2 \leqslant_S s_1$, то $s_2 \in \mathrm{Dom}\, f$*; 3) *если $s_2 \leqslant_S s_1$, то $s_2 f \leqslant_S s_1 f$ $(s_1, s_2 \in S,\ f \in F)$.*

Ограничения на отношение «$\leqslant_S$» определены в терминах элементарных операторов. Как показывает следующая теорема, отношение «$\leqslant_S$» является конгруэнцией и относительно множества $\mathcal{F}^+$.

Теорема 1. *Если $s_2 \leqslant_S s_1$ $(s_1, s_2 \in S)$, то*: 1) $\mathcal{F}^+_{s_2} \supseteq \mathcal{F}^+_{s_1}$; 2) $s_2 F \leqslant_S s_1 F$ *для любого* $F \in \mathcal{F}^+_{s_1}$.

Доказательство. Из равенства $\mathcal{F}^+_s = \bigcup\limits_{r=1}^{\infty} (\mathcal{F}^+_s \cap \mathcal{F}^r)$ $(s \in S)$ вытекает, что достаточно показать справедливость утверждения: если $s_2 \leqslant_S s_1$ $(s_1, s_2 \in S)$, то при всех $n \in N$ из $F \in \mathcal{F}^+_{s_1}$ и $d(F) = n$ следует, что $F \in \mathcal{F}^+_{s_2}$ и $s_2 F \leqslant_S s_1 F$. Докажем это утверждение индукцией по длине оператора.

1. Пусть $F \in \mathcal{F}^+_{s_1}$ и $d(F) = 1$. Тогда $F = f \in \mathcal{F}$. Так как $f \in \mathcal{F}^+_{s_1}$, то $s_1 \in \mathrm{Dom}\, f$. А так как $s_2 \leqslant_S s_1$, то в силу определения 1 $s_2 \in \mathrm{Dom}\, f$ (условие 2) и $s_2 f \leqslant_S s_1 f$ (условие 3), что и требовалось доказать.

2. Предположим, что утверждение справедливо для всех $F \in \mathcal{F}^+_{s_1}$ и $d(F) \leqslant r$.

3. Пусть $F \in \mathcal{F}^+_{s_1}$ и $d(F) = r + 1$. Тогда $F = F_1 f$, где $F_1 \in \mathcal{F}^r$, а $f \in \mathcal{F}$. Так как $F \in \mathcal{F}^+_{s_1}$, то $F_1 \in \mathcal{F}^+_{s_1}$ и $s_1 F_1 \in \mathrm{Dom}\, f$. Поскольку $F \in \mathcal{F}^+_{s_1}$ и $d(F_1) = r$,

то по предположению индукции из $s_2 \leqslant ss_1$ следует, что $F_1 \in \mathcal{F}^+_{s_2}$ и $s_2F_1 \leqslant ss_1F_1$. Так как $s_2F_1 \leqslant ss_1F_1$ и $s_1F_1 \in \mathrm{Dom}\, f$, то в силу определения 1 $s_2F_1 \in \mathrm{Dom}\, f$ (условие 2)) и $(s_2F_1) f \leqslant s(s_1F_1) f$ (условие 3)). Соотношение $s_2F_1 \in \mathrm{Dom}\, f$ означает, что $F = F_1 f \in \mathcal{F}^+_{s_2}$. А из $(s_2F_1) f \leqslant s(s_1F_1) f$ вытекает, что $s_2(F_1 f) \leqslant ss_1(F_1 f)$, т. е. $s_2F \leqslant ss_1F$, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Рассмотрим решение задач 1, 3 и 4 для M-источников. Алгоритмы построения выигрышных операторов будем формулировать, как это обычно принято, в терминах деревьев. С этой целью определим исходное дерево следующим образом.

Определение 2. *Деревом $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$ назовем корневое ориентированное дерево, вершины которого отмечены элементами из S, а дуги — элементами из $\mathcal{F}$ согласно следующему правилу: 1) корень отмечен элементом s_0; 2) из вершины с отметкой $s \in S$ выходит дуга с отметкой $f \in \mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда $s \in \mathrm{Dom}\, f$; эта дуга ведет в вершину с отметкой sf; 3) различные дуги, выходящие из одной и той же вершины, отмечены различными элементами множества $\mathcal{F}$.*

Дерево $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$ будем считать ранжированным, т. е. его вершины расположим в последовательных уровнях, начиная с 0-го. При этом единственной вершиной 0-го уровня является корень. Если расположенные в порядке их прохождения отметки дуг пути, идущего из корня в некоторую некорневую вершину, образуют последовательность $f_1, \ldots, f_r$, то будем говорить, что вдоль этого пути считывается оператор $F = f_1 \ldots f_r$. Из определения 2 непосредственно следует, что множество операторов, считываемых в $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$ вдоль путей, идущих из корня в некорневые вершины, совпадает с множеством $\mathcal{F}^+_{s_0}$. При этом вдоль различных таких путей считываются различные операторы. Если вдоль пути, идущего из корня в некорневую вершину считывается оператор F, то будем обозначать эту вершину через v_F; корень дерева $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$ обозначим через v_Λ, где Λ — пустой оператор.

3. Построение минимальных выигрышных операторов. Исследуем строение множества $\mathcal{L}^M(\mathcal{G})$ для M-источника $\mathcal{G}$.

Теорема 2. *Если $s_0F_1 \leqslant ss_0F_2$ $(F_1, F_2 \in \mathcal{F}^+_{s_0})$ и $d(F_1) < d(F_2)$, то $F_2F \notin \mathcal{L}^M(\mathcal{G})$ при любом $F \in \mathcal{F}^+_{s_0F_2}$.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. существует такой оператор $F \in \mathcal{F}^+_{s_0F_2}$, что $F_2F \in \mathcal{L}^M(\mathcal{G})$. Оператор F_2F является выигрышным. Следовательно, $s_0(F_2F) \in S^1$. В силу теоремы 1 из соотношений $s_0F_1 \leqslant ss_0F_2$ и $F \in \mathcal{F}^+_{s_0F_2}$ вытекает, что $F \in \mathcal{F}^+_{s_0F_1}$ и $(s_0F_1)F \leqslant s(s_0F_2)F$, т. е. $s_0(F_1F) \leqslant ss_0(F_2F)$. Так как $s_0(F_1F) \leqslant ss_0(F_2F)$ и $s_0(F_2F) \in S^1$, то в силу определения 1 $s_0(F_1F) \in S^1$ (условие 1)), т. е. F_1F — выигрышный оператор. По условию $d(F_1) < d(F_2)$. Поэтому

$$d(F_1F) = d(F_1) + d(F) < d(F_2) + d(F) = d(F_2F).$$

А так как F_1F и F_2F — выигрышные операторы и $d(F_1F) < d(F_2F)$, то $F_2F \notin \mathcal{L}^M(\mathcal{G})$. Полученное противоречие показывает, что предположение не верно. Следовательно, $F_2F \notin \mathcal{L}^M(\mathcal{G})$ при любом $F \in \mathcal{F}^+_{s_0F_2}$. Теорема доказана.

Из теоремы 2 и определения 2 непосредственно вытекает справедливость следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть v_{F_1} и v_{F_2} — такие вершины соответственно $d(F_1)$-го и $d(F_2)$-го уровней $(d(F_1) < d(F_2))$ дерева $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$, что $s_0F_1 \leqslant ss_0/F_2$. Тогда любой оператор, считываемый в $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$ вдоль пути, идущего из корня и проходящего через v_{F_2}, не принадлежит множеству $\mathcal{L}^M(\mathcal{G})$.*

Эта лемма дает возможность выделить поддерево дерева $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$, представляющее множество $\mathcal{L}^M(\mathcal{G})$.

Определение 3. *Деревом $\mathcal{D}^M_{\mathcal{G}}$ назовем поддерево дерева $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$, определяемое по правилу обрыва путей, в соответствии с которым вершина v_F эконечная (т. е. удаляются все достижимые из нее вершины), если выполнено* *хотя бы одно из следующих условий:* 1) *в каком-либо из предшествующих* $d(F)$*-му уровней находится такая вершина* v_{F_1}, *что* $s_0F_1 \leqslant ss_0F$; 2) *в* $d(F)$*-м уровне находится вершина, отмеченная элементом и з* S^1.

Пути в $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$, идущие из корня в вершины, отсутствующие в $\mathcal{D}^{\text{м}}_{\mathcal{G}}$, назовем усеченными, а пути $\mathcal{D}^{\text{м}}_{\mathcal{G}}$, идущие из корня в вершины, отмеченные элементами из S^1, — выигрышными.

Лемма 2. *Если оператор* $F \in \mathcal{F}^{+}_{s_0}$ *считывается вдоль пути, усеченного при построении* $\mathcal{D}^{\text{м}}_{\mathcal{G}}$, *то* $F \notin \mathcal{L}^{\text{м}}(\mathcal{G})$.

Доказательство. Пусть оператор $F \in \mathcal{F}^{+}_{s_0}$ считывается вдоль усеченного пути. Если путь усечен по условию 1 определения 3, то $F \notin \notin \mathcal{L}^{\text{м}}(\mathcal{G})$ в силу леммы 1. Предположим, что путь усечен по условию 2 определения 3. Тогда в $\mathcal{D}^{\text{м}}_{\mathcal{G}}$ имеется такая вершина v_{F_1}, что $d(F_1) < d(F)$ и $s_0F_1 \in S^1$. Так как F_1 — выигрышный оператор и $d(F_1) < d(F)$, то $F \notin \notin \mathcal{L}^{\text{м}}(\mathcal{G})$. Лемма доказана.

Теорема 3. $\mathcal{L}^{\text{м}}(\mathcal{G})$ *есть множество всех операторов, считываемых вдоль выигрышных путей.*

Доказательство. Возможны следующие два случая.

1. Пусть $\mathcal{L}^{\text{м}}(\mathcal{G}) = \varnothing$. Тогда ни один оператор не является выигрышным для $\mathcal{G}$. Поэтому ни одна вершина дерева $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$, а следовательно, и дерева $\mathcal{D}^{\text{м}}_{\mathcal{G}}$ не отмечена элементом из S^1. Это означает, что множество выигрышных путей пусто, что и требовалось доказать.

2. Пусть $\mathcal{L}^{\text{м}}(\mathcal{G}) \neq \varnothing$. В силу определения 2 множество всех операторов, считываемых в $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$ вдоль путей, идущих из корня в некорневые вершины, совпадает с множеством $\mathcal{F}^{+}_{s_0}$. Из леммы 2 вытекает, что операторы, считываемые вдоль усеченных путей, не являются минимальными выигрышными операторами. Следовательно, любой оператор $F \in \mathcal{L}^{\text{м}}(\mathcal{G})$ считывается в $\mathcal{D}^{\text{м}}_{\mathcal{G}}$ вдоль некоторого пути, идущего из корня. По условию 2 определения 3 все вершины, расположенные в первом из уровней, содержащем вершину с отметкой из S^1, оконечные. Поэтому высота дерева $\mathcal{D}^{\text{м}}_{\mathcal{G}}$ равна наименьшей из длин выигрышных операторов. А это означает, что $\mathcal{L}^{\text{м}}(\mathcal{G})$ является множеством всех операторов, считываемых в $\mathcal{D}^{M}_{\mathcal{G}}$ вдоль путей, идущих из корня в вершины с отметками из S^1, т. е. вдоль выигрышных путей, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Из теоремы 3 следует, что решение задачи 1 можно получить последовательным, поуровневым, построением дерева $\mathcal{D}^{\text{м}}_{\mathcal{G}}$. В процессе построения из восстановленного поддерева можно удалять все вершины, из которых достижимы лишь те оконечные вершины, которые стали такими в силу условия 1 определения 3. Это непосредственно вытекает из леммы 1. С учетом сказанного сформулируем следующий алгоритм решения задачи 1.

Алгоритм 1.

Шаг 1. Строим 0-й и 1-й уровни дерева $\mathcal{D}^{\text{м}}_{\mathcal{G}}$, $I = 1$.

Шаг 2. Все оконечные вершины I-го уровня, отметки которых не принадлежат S^1, отмечаем знаком «—».

Шаг 3. Если ни одна из вершин не отмечена знаком «—», то переход к шагу 8, иначе $J = I - 1$ и переход к шагу 4.

Шаг 4. Если $J = 0$, то переход к шагу 7, в противном случае — переход к шагу 5.

Шаг 5. Отмечаем знаком «—» все вершины J-го уровня, из которых достижимы лишь вершины $(J + 1)$-го уровня, отмеченные знаком «—».

Шаг 6. Если хотя бы одна вершина J-го уровня отмечена знаком «—», то $J = J - 1$ и переход к шагу 4, иначе переход к шагу 7.

Шаг 7. Удаляем все отмеченные знаком «—» вершины.

Шаг 8. Если в I-м уровне имеются вершины, не являющиеся оконечными, то переход к шагу 9, в противном случае — конец.

Шаг 9. Для каждой вершины I-го уровня строим все достижимые из нее вершины дерева $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$, расположенные в $(I+1)$-м уровне, $I = I + 1$, и переход к шагу 2.

Рассмотрим решение задачи 3. Так как $\mathcal{L}_1^{м}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{L}^{м}(\mathcal{G})$, то выделим поддерево дерева $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}^{м}$, представляющее множество $\mathcal{L}_1^{м}(\mathcal{G})$.

Определение 4. *i-Характеристическим ($i = 0, 1, \ldots$) множеством назовем любое минимальное по мощности подмножество V_i вершин i-го уровня дерева $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}^{м}$, такое, что для любой вершины v_F i-го уровня дерева $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}^{м}$ существует такая вершина $v_{F_1} \in V_i$, что $s_0F_1 \leqslant_S s_0F$.*

Из определений 1 — 4 непосредственно следует, что при всех $i = 0$, 1, ... множество вершин $(i+1)$-го уровня дерева $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}^{м}$, достижимых из V_i, всегда содержит некоторое $(i+1)$-характеристическое множество V_{i+1} (в этом случае будем говорить, что V_i порождает V_{i+1}). В силу теоремы 1 если $\mathcal{L}^{м}(\mathcal{G}) \neq \varnothing$, то всегда существует оператор $F \in \mathcal{L}^{м}(\mathcal{G})$, считываемый в $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}^{м}$ вдоль пути, идущего из корня и проходящего при всех $i = 0, 1, \ldots$ ..., $d(F)$ через вершину i-характеристического множества. Следовательно, поддерево дерева $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}^{м}$, образованное порождающими друг друга множествами $V_0, V_1, \ldots$, представляют множество $\mathcal{L}_1^{м}(\mathcal{G})$ как множество всех операторов, считываемых вдоль путей, идущих из корня в вершины с отметками из S^1. Таким образом, решение задачи 3 может быть получено с помощью следующего алгоритма.

Алгоритм 2.

Шаг 1. Строим 0-й и 1-й уровни дерева $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}^{м}$. Находим 1-характеристическое множество V_1, $I = 1$.

Шаг 2. Отмечаем знаком «—» все вершины I-го уровня, не принадлежащие V_I, и все принадлежащие V_I оконечные вершины, отметки которых не принадлежат S^1.

Шаг 3. Если ни одна из вершин не отмечена знаком «—», то переход к шагу 4.

Шаг 4. Если $J = 0$, то переход к шагу 7, иначе переход к шагу 5.

Шаг 5. Отмечаем знаком «—» все вершины J-го уровня, из которых достижимы лишь вершины $(J+1)$-го уровня, отмеченные знаком «—».

Шаг 6. Если хотя бы одна вершина J-го уровня отмечена знаком «—», то $J = J - 1$ и переход к шагу 4, иначе переход к шагу 7.

Шаг 7. Удаляем все отмеченные знаком «—» вершины.

Шаг 8. Если в I-м уровне имеются вершины, не являющиеся оконечными, то переход к шагу 9, в противном случае — конец.

Шаг 9. Для каждой вершины I-го уровня строим все достижимые из нее вершины дерева $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}^{м}$, расположенные в $(I+1)$-м уровне. Находим множество V_{I+1}, $I = I + 1$, и переход к шагу 2.

В отличие от множества $\mathcal{L}^{м}(\mathcal{G})$ ядро $\mathcal{L}_1^{м}(\mathcal{G})$ определяется не однозначно. Все многообразие ядер можно получить варьированием i-характеристических множеств, конструируемых в разультате работы алгоритма 2.

4. Построение тупиковых выигрышных операторов. Исследуем строение множества $\mathcal{L}^{т}(\mathcal{G})$ для M-источника $\mathcal{G}$.

Теорема 4. *Если для оператора $F \in \mathcal{F}_{s_0}^{+}$ существует такое представление $F = F_1F_2$ ($F_1, F_2 \in \mathcal{F}^{+}$), что $s_0F_1 \leqslant_S s_0F$, то $FF_3 \notin \mathcal{L}^{т}(\mathcal{G})$ при любом $F_3 \in \mathcal{F}_{s_0F}^{+}$.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. существует такой оператор $F_3 \in \mathcal{F}_{s_0F}^{+}$, что $FF_3 \in \mathcal{L}^{т}(\mathcal{G})$. В силу теоремы 1 из соотношений $s_0F_1 \leqslant_S s_0F$ и $F_3 \in \mathcal{F}_{s_0F}^{+}$ вытекает, что $F_3 \in \mathcal{F}_{s_0F_1}^{+}$ и $(s_0F_1)F_3 \leqslant_S (s_0F)F_3$, т. е. $s_0(F_1F_3) \leqslant_S s_0(FF_3)$. Так как $FF_3 \in \mathcal{L}^{т}(\mathcal{G})$, то FF_3 — выигрышный оператор. Следовательно, $s_0(FF_3) \in S^1$. В силу условия 1 определения 1 из соотношений $s_0(F_1F_3) \leqslant_S s_0(FF_3)$ и $s_0(FF_3) \in S^1$ следует, что оператор F_1F_3 является выигрышным. Итак, в результате удаления оператора F_2 из выигрышного оператора $FF_3 = F_1F_2F_3$ получен выигрышный оператор. Это означает, что

$FF_3 \notin \mathcal{L}^T(\mathcal{G})$. Полученное противоречие показывает, что предположение не верно. Следовательно, $FF_3 \notin \mathcal{L}^T(\mathcal{G})$ при любом $F_3 \in \mathcal{F}^+_{S_0F}$. Теорема доказана.

Из теоремы 4 и определения 2 непосредственно вытекает справедливость следующей леммы.

Лемма 3. *Пусть v_{F_1} и v_F $(d(F_1) < d(F))$ — такие вершины дерева $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$, что v_{F_1} лежит на пути, идущем из корня в v_F. Если $s_0F_1 \leqslant_S s_0F$, то любой оператор, считываемый в $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$ вдоль пути, идущего из корня и проходящего через v_F, не принадлежит множеству $\mathcal{L}^T(\mathcal{G})$.*

Эта лемма дает возможность выделить следующее поддерево дерева $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$.

Определение 5. *Деревом $\mathcal{D}^T_{\mathcal{G}}$ назовем поддерево дерева $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$, определяемое по правилу обрыва путей, в соответствии с которым вершина v_F оконечная, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:* 1) *на пути, идущем из корня в v_F, находится такая вершина v_{F_1} $(d(F_1) < d(F))$, что $s_0F_1 \leqslant_S s_0F$;* 2) *вершина v_F отмечена элементом из S^1.*

Пути в $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$, идущие из корня в вершины, отсутствующие в $\mathcal{D}^T_{\mathcal{G}}$, назовем усеченными.

Лемма 4. *Если оператор $F \in \mathcal{F}^+_{s_0}$ считывается вдоль пути усеченного при построении $\mathcal{D}^T_{\mathcal{G}}$, то $F \notin \mathcal{L}^T(\mathcal{G})$.*

Доказательство. Пусть оператор $F \in \mathcal{F}^+_{s_0}$ считывается вдоль усеченного пути. Если путь усечен по условию 1 определения 5, то $F \notin \mathcal{L}^T(\mathcal{G})$ в силу леммы 3. Предположим, что путь усечен по условию 2 определения 5. Тогда для F существует такое представление $F = F_1F_2$ $(F_1, F_2 \in \mathcal{F}^+)$, что $s_0F_1 \in S^1$. Так как в результате удаления F_2 из F получается выигрышный оператор, то $F \notin \mathcal{L}^T(\mathcal{G})$. Лемма доказана.

В силу леммы 4 множество $\mathcal{L}$ выигрышных операторов, считываемых в $\mathcal{D}^T_{\mathcal{G}}$ вдоль путей, идущих из корня в вершины, отмеченные элементами из S^1, содержит множество $\mathcal{L}^T_{\mathcal{G}}$. Эти множества, однако, могут не совпадать, т. е. возможно строгое включение $\mathcal{L}^T(\mathcal{G}) \subset \mathcal{L}$. Поэтому возникает проблема выделения $\mathcal{L}^T(\mathcal{G})$ из множества $\mathcal{L}$. Ее решение можно получить методом решета. Расположим элементы множества $\mathcal{L}$ в порядке возрастания их длин и обозначим через $\mathcal{L}^{эт}$ множество «эталонов», т. е. тех операторов, для которых установлена принадлежность множеству $\mathcal{L}^T(\mathcal{G})$. Процесс просеивания осуществляется в соответствии со следующим алгоритмом.

Алгоритм 3.

Шаг 1. $\mathcal{L}^T(\mathcal{G}) = \mathcal{L}^M(\mathcal{G})$, $\mathcal{L}^{эт} = \mathcal{L}^M(\mathcal{G})$, $\mathcal{L} = \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}^M(\mathcal{G})$.

Шаг 2. Если $\mathcal{L} \neq \varnothing$, то переход к шагу 3, иначе конец.

Шаг 3. Выбрать очередной оператор $F \in \mathcal{L}$, $\mathcal{L} = \mathcal{L} \setminus \{F\}$.

Шаг 4. Построить множество $\mathcal{L}_F$ выигрышных операторов, которые могут быть получены из F в результате вычеркивания элементарных операторов.

Шаг 5. Если $\mathcal{L}_F = \varnothing$, то переход к шагу 9, иначе переход к шагу 6.

Шаг 6. Если $\mathcal{L}_F \cap \mathcal{L}^{эт} = \varnothing$, то переход к шагу 8, иначе переход к шагу 7.

Шаг. 7. $\mathcal{L}^{эт} = \mathcal{L}^{эт} \cup (\mathcal{L}_F \setminus \mathcal{L}^{эт})$ и переход к шагу 10.

Шаг 8. $\mathcal{L}^{эт} = \mathcal{L}^{эт} \cup \mathcal{L}_F$ и переход к шагу 10.

Шаг 9. $\mathcal{L}^{эт} = \mathcal{L}^{эт} \cup \{F\}$ и переход к шагу 10.

Шаг 10. $\mathcal{L}^T(\mathcal{G}) = \mathcal{L}^{эт}$ и переход к шагу 2.

Корректность алгоритма 3 непосредственно вытекает из включения $\mathcal{L}^M(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{L}^T(\mathcal{G})$ и из определения тупикового оператора.

Таким образом, решение задачи 4 для произвольного M-источника $\mathcal{G}$ разбивается на два этапа. На первом этапе строится дерево $\mathcal{D}^T_{\mathcal{G}}$. Его построение можно осуществить с помощью алгоритма 1, если понятие «оконечная вершина» понимать в соответствии с определением 5. На втором этапе к дереву $\mathcal{D}^T_{\mathcal{G}}$ применяется алгоритм 3.

Решение задачи 4 существенно упрощается за счет наделения M-источника дополнительной структурой. Важный класс таких M-источников определяется следующими двумя условиями: 1) $f_1 f_2 = f_2 f_1$ для всех $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$; 2) $f^2 = f$ для всех $f \in \mathcal{F}$. Эти условия означают, что $\mathcal{F}$ является порождающим множеством коммутативной полугруппы, у которой каждый элемент — идемпотент. В этом случае множество выигрышных операторов, представленных деревом $\mathcal{D}^{\tau}_{\mathcal{G}}$, в точности совпадает с множеством $\mathcal{L}^{\tau}(\mathcal{G})$.

5. Построение экспериментов с автоматами. В [4, 5] рассматривались задачи построения минимальных распознающих (т. е. диагностических, установочных и возвратных) слов для слабоинициального конечного автомата (A, Q_0), где $A = (Q, X, Y, \delta, \lambda)$ и $Q_0 \subseteq Q$. С этой целью были построены два типа M-источников: прямые и обратные.

Построение прямых M-источников осуществляется следующим образом. Пусть $\mathcal{H}$ — множество всех таких $H \subset \mathcal{B}(Q)$, что: 1) $|h| \geqslant 2$ для всех $h \in H$; 2) если $h_1, h_2 \in H$, то $h_1 \not\subset h_2$ и $h_2 \not\subset h_1$; 3) $\sum\limits_{h \in H} |h| \leqslant |Q_0|$. На множестве $\mathcal{H}$ определяется следующее отношение частичного порядка: $H_1 \leqslant_{\mathcal{H}} H_2$ тогда и только тогда, когда для каждого $h_1 \in H_1$ существует такое $h_2 \in H_2$, что $h_1 \subseteq h_2$; M-источники $\mathcal{G}^g$ и $\mathcal{G}^y$ определяются следующим образом: $\mathcal{G}^g = (\mathcal{H}, X, \{Q_0\}, \varnothing)$, где Hx $(H \in \mathcal{H}, x \in X)$ не определено, если x — преемник H' для H содержит кратное σ-множество, иначе $Hx = \{h \in H' \mid |h| \geqslant 2$ и $h \not\subset h'$ для всех $h' \in H'\}$; $\mathcal{G}^y = (\mathcal{H}, X, \{Q_0\}, \varnothing)$, где $Hx = \{h \in H(x, Y) \mid |h| \geqslant 2$ и $h \not\subset h'$ для всех $h' \in H(x, Y)\}$ $(H \in \mathcal{H}, x \in X)$, где $H(x, Y) = \left(\bigcup\limits_{h' \in H} \{h'(x, y) \mid y \in Y\}\right) \setminus \{\varnothing\}$, а $h'(x, y) = \{\delta(q, x) \mid q \in h'$ и $\lambda(q, x) = y\}$. Выбор в качестве множества ситуаций $\mathcal{B}(Q)$, а в качестве частичного порядка на нем — отношения включения множеств дает возможность построить M-источник $\mathcal{G}^b = (\mathcal{B}(Q), X, Q_0, \mathcal{B}^1)$, где $\mathcal{B}^1 = \{h \in \mathcal{B}(Q) \mid |h| = 1\}$ и $hx = \{\delta(q, x) \mid q \in h\}$ $(h \in \mathcal{B}(Q), x \in X)$. Источники $\mathcal{G}^g$, $\mathcal{G}^y$ и $\mathcal{G}^b$ представляют, соответственно, множества диагностических, установочных и возвратных слов.

Построение обратных M-источников осуществляется следующим образом. Пусть Π — множество всех разбиений множества Q, 1 и 0 — единичное и нулевое разбиения.

Определив на Π обычное для разбиений отношение частичного порядка «$\leqslant_{\Pi}$», построим M-источник $\mathcal{F}^g = (\Pi, X, 1, \Pi^1_g)$, где $\Pi^1_g = \{\pi \in \Pi \mid \pi|_{Q_0} = 0|_{Q_0}\}$, а $\pi x = \pi_1 (\pi, \pi_1 \in \Pi, x \in X)$, где $q \equiv q'(\pi_1)$ тогда и только тогда, когда $\delta(q, x) \equiv \delta(q', x)(\pi)$ и $\lambda(q, x) = \lambda(q', x)$. А определив на Π обратное отношение «$\leqslant^{-1}_{\Pi}$», построим M-источник $\mathcal{F}^b = (\Pi, X, 0, \Pi^1_b)$ где $\Pi^1_b = \{\pi \in \Pi \mid \pi|_{Q_0} = 1|_{Q_0}\}$, а $\pi x = \pi_1 (\pi, \pi_1 \in \Pi, x \in X)$, где $q \equiv q'(\pi_1)$ тогда и только тогда, когда $\delta(q, x) \equiv \delta(q', x)(\pi)$. Выберем в качестве множества ситуаций множество $\mathcal{U}$ всех фактор-разбиений множества Q и зададим на нем следующее отношение частичного порядка: $u_1 \leqslant_{\mathcal{U}} u_2$ тогда и только тогда, когда для всех $q, q' \in Q$, если $q, q' \in \operatorname{Dom} \tau_1$ для некоторого $\tau_1 \in u_1$ и $q \not\equiv q'(\tau_1)$, то существует такое $\tau_2 \in u_2$, что $q, q' \in \operatorname{Dom} \tau_2$ и $q \not\equiv q'(\tau_2)$. Это дает возможность построить M-источник $\mathcal{F}^y = (\mathcal{U}, X, \{0\}; \mathcal{U}^1)$, где $\mathcal{U}^1 = \{u \in \mathcal{U} \mid u|_{Q_0} = \{\tau \mid |\tau| = 1\}$, а $ux = \left(\bigcup\limits_{\tau \in u} \{\tau(x, y) \mid y \in Y\}\right) \setminus \{\varnothing\}$, где $\tau(x, y)$ — разбиение множества $\{q \in Q \mid \lambda(q, x) = y$ и $\delta(q, x) \in \operatorname{Dom} \tau\}$, определяемое следующим образом: $q \equiv q'(\tau(x, y))$ тогда и только тогда, когда $\delta(q, x) \equiv \delta(q', x)(\tau)$. Источники $\mathcal{F}^g$, $\mathcal{F}^y$ и $\mathcal{F}^b$ представляют соответственно множества диагностических, установочных и возвратных слов, записанных в обратном порядке.

Разработанный в настоящей статье подход дает возможность строить не только минимальные, но и тупиковые распознающие слова, а также кратные и условные эксперименты.

6. Минимизация ДНФ. Пусть $f \in P_2(n)$, $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in N_f$ — фиксированная точка, а $\mathcal{K}$ — множество всех элементарных конъюнкций. Определим на $\mathcal{K}$ следующий частичный порядок: $K_1 \leqslant_{\mathcal{K}} K_2$ $(K_1, K_2 \in \mathcal{K})$ тогда и только тогда, когда $N_{K_1} \supseteq N_{K_2}$. Рассмотрим M-источник $\mathcal{G} = (\mathcal{K}, \mathcal{F}, K_0,$

$\mathcal{K}^1$), где $K_0 = x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n}$, $\mathcal{K}^1$ — множество, состоящее из всех простых импликант функции f, покрывающих точку $\tilde{\sigma}$, и из всех тех конъюнкций, которые могут быть получены из них в результате вычеркивания букв, $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$, где $Kf_i = K_1 (K \in \mathcal{K}, f_i \in \mathcal{F})$, а $K_1 = K$, если в K не входит буква x_i и $K_1 = K'K''$, если $K = K' x_i^{\sigma_i} K''$. Множество $\mathcal{L}^T(\mathcal{G})$ представляет собой множество всех простых импликант, покрывающих точку $\tilde{\sigma}$, а $\mathcal{L}^M(\mathcal{G})$ является множеством всех простых импликант минимального ранга. Отметим, что $\mathcal{F}$ является порождающим множеством коммутативной полугруппы, в которой каждый элемент — идемпотент. Предложенные в [6—8] алгоритмы построения простых импликант по сути дела представляют собой варианты методов, разработанных в настоящей статье для решения задач 1, 3 и 4.

1. *Бенерджи Р.* Теория решения задач.— М. : Мир, 1972.— 224 с.
2. *Нильсон Н.* Искусственный интеллект.— М. : Мир, 1973.— 270 с.
3. *Нильсон Н.* Принципы искусственного интеллекта.— М. : Радио и связь, 1985.— 376 с.
4. *Скобелев В. Г.* Алгоритмы и сложность распознавания внутренних состояний конечного автомата // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1981.— № 7.— С. 71—74.
5. *Скобелев В. Г.* Методы построения минимальных диагностических слов для автомата и сложность их реализации //Автоматика и телемеханика.— 1981.— № 6.— С. 162—169.
6. *Скобелев В. Г.* Управляемость и наблюдаемость для булевых функций и их композиций // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1987.— № 7.— С. 65—67.
7. *Скобелев В. Г.* Комбинаторные алгоритмы построения дизъюнктивной нормальной формы (ДНФ) // Там же.— 1989.— № 2.— С. 72—75.
8. *Скобелев В. Г.* Об одном методе минимизации булевых функций // Кибернетика.— 1989. — № 5.— С. 44—48.

Получено 09.10.91

УДК 517.5

А. Ф. Тедеев, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

О мультипликативных неравенствах в областях с некомпактной границей

Получены точные теоремы вложения мультипликативного типа для функций из пространств С. Л. Соболева, определенных в области $\Omega \subset R^n$, $n \geqslant 2$, с некомпактной границей. Основное требование к области — это условие изопериметрического типа.

Одержані точні теореми вкладення мультиплікативного типу для функцій із просторів С. Л. Соболєва, визначених у області $\Omega \subset R^n$, $n \geqslant 2$, з некомпактною границею. Головна вимога до області — це умова ізопериметричного типу.

1. Пусть $\Omega \subset R^n$, $h \geqslant 2$,— неограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$. Для удобства будем считать, что начало координат принадлежит Ω. Следуя [1], введем класс областей, удовлетворяющих глобально условию изопериметрического типа. Определим функцию сечения $l(v)$, $v > 0$, области Ω следующим образом. Обозначим через Q произвольное открытое подмножество Ω. Пусть $l(v) = \inf \operatorname{mes}_{n-1} (\partial Q \cap \Omega)$, где точная нижняя грань берется по всем Q таким, что $|Q| = v$ (здесь и далее $|\cdot| \equiv \operatorname{mes}_n(\cdot)$). Пусть функция $g(v)$, $v > 0$,— положительно монотонно не убывает и существует такое $\varepsilon_0 > 0$ $(\varepsilon_0 \leqslant 1/n)$, что $\forall v > 0$ функция $v^{1-\varepsilon_0}/g(v)$ монотонно не убывает. Будем говорить, что Ω принадлежит классу $\mathcal{U}(g)$, если $\forall v > 0$ $l(v) \geqslant g(v)$. Через $W_p^2(\Omega)$, $p > 1$, обозначим пространство функций, полученное пополнением множества функций класса $C_0^\infty(R^n)$ по норме

$$\|f\|_{W_p^2(\Omega)} = \Big(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leqslant 2} |D^\alpha f|^p \, dx\Big)^{1/p},$$