УДК 517.9

А. А. Костиков, инж. (Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

Термодиффузионная задача Стефана при наличии конвекции

Рассмотрена термодиффузионная задача Стефана с учетом конвективных движений в жидкой фазе. Доказана разрешимость этой задачи в пространствах гладких функций.

Розглянута термодифузійна задача Стефана з урахуванням конвективних рухів у рідкій фазі. Доведена розв'язність цієї задачі в просторах гладких функцій.

Настоящая работа посвящена изучению процессов кристаллизации двухкомпонентных сред в том случае, когда распространение тепла связано не только с теплопроводностью, но и с конвективным переносом, всегда присутствующим в жидкой фазе вещества. Рассматриваемая задача включает в себя как двухфазную термодиффузионную задачу Стефана, так и начально-краевую задачу для системы Навье — Стокса, описывающей движение вязкой несжимаемой жидкости в нецилиндрической области. При изучении задачи учитывается скачок плотности вещества на границе раздела фаз. В работе доказывается существование решения задачи в классах гладких функций. При исследовании используется методика, развитая в работах [1, 2], которая использует традиционные для задач с уравнениями в частных производных приемы. Исследование части задачи, связанной с системой Навье — Стокса, основано на использовании результатов работ [3, 4].

Используемые в работе пространства гладких функций определены в [5, с. 349]. Кроме того используется пространство $\hat{H}^{l,l/2}(\Omega_T)$ с конечной нормой $|||u(x,t)|||^{(l)}_{\Omega_T} = |u|^{(l)}_{\Omega_T} + |u_t|^{(l-1)}_{\Omega_T}$, где $l > 2$ — нецелое число.

1. Пусть Ω_0 — заданная область в R^3, граница которой состоит из двух замкнутых связных гладких поверхностей Γ_0^+ и Γ_0^-, не имеющих самопересечений. Пусть, далее, Γ_0 — гладкая замкнутая поверхность, лежащая внутри Ω_0, такая, что Γ_0^- лежит внутри ограниченной области, границей которой является Γ_0 Поверхность Γ_0 разбивает Ω_0 на две подобласти Ω_0^+ и Ω_0^-, которые в начальный момент времени $t = 0$ заняты жидкой и твердой фазами соответственно. Будем обозначать $\Omega_t^{\pm}$ область, занятую жидкой (твердой) фазой в момент времени t. Заметим, что в процессе кристаллизации происходит изменение границы Γ_0^+, что связано с тем, что жидкая и твердая фазы имеют разные плотности. Граница Γ_0^- в процессе кристаллизации остается неизменной. Задача состоит в нахождении областей Ω_t^+ и Ω_t^- (т. е. границ Γ_t^+ и Γ_t), занимаемых твердой и жидкой фазами соответственно в момент времени $t \in [0, T]$, вектора скорости $\vec{v}(x, t)$, давления $p(x, t)$, концентрации примеси $c(x, t)$, распределений температур твердой и жидкой фаз $u^+(x, t)$ и $u^-(x, t)$ по условиям

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\,\nabla_x)\vec{v} + \nabla_x p = \nu\,\nabla_x^2 \vec{v} + \vec{f}(u^+, c), \quad (x, t) \in D_T^+, \tag{1}$$

$$\nabla_x \cdot \vec{v} = 0 \text{ в } D_T^+, \tag{2}$$

$$\vec{v}(x, 0) = \vec{v}_0(x), \quad T(\vec{v}, p)\vec{n} = -p_0(x, t)\vec{n} \text{ на } \Gamma_t^+, \tag{3}$$

$$v_n = -\left(1 - \frac{\rho^-}{\rho^+}\right)\mathcal{D}_n, \quad v_\tau = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_t; \tag{4}$$

$$\frac{\partial u^+}{\partial t} + (\vec{v}\nabla_x)u^+ - a_+^2\nabla_x^2 u^+ = 0 \text{ в } D_T^+, \tag{5}$$

$$\frac{\partial u^-}{\partial t} - a_-^2\nabla_x^2 u^- = 0 \text{ в } D_T^-, \tag{6}$$

$$u^\pm(x, 0) = u_0^\pm(x), \quad u^\pm(x, t) = b^\pm(x, t) \text{ на } \Gamma_t^+ \cup \Gamma_0^-, \tag{7}$$

$$\varkappa\rho^+\mathscr{D}_n = k^-\frac{\partial u^-}{\partial n} - k^+\frac{\partial u^+}{\partial n} \text{ на } \Gamma_t, \tag{8}$$

$$u^+ = u^- = T_k - qc \text{ на } \Gamma_t, \tag{9}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (\vec{v}\nabla_x)c - \gamma\nabla_x^2 c = 0, \qquad (x, t)\in D_T^+, \tag{10}$$

$$c(x, 0) = c_0(x), \quad c(x, t) = g(x, t) \text{ на } \Gamma_t^+, \tag{11}$$

$$-\alpha\frac{\partial c}{\partial n} = c(1-R)\mathscr{D}_n \text{ на } \Gamma_t. \tag{12}$$

Здесь $D_T^\pm = \{(x, t): x\in\Omega_t^\pm,\ t\in[0, T]\}$, $\vec{n}$ — нормаль к Γ_t, направленная в сторону Ω_t^+, T_k, q, $\varkappa$, ρ^+, ρ^-, α, R, ν, γ — положительные константы, $T(\vec{v}, p)$ — тензор напряжений с элементами $T_{ij} = -\delta_{ij}p + \nu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$, $\mathscr{D}_n$ — скорость движения фронта кристаллизации в направлении нормали $\vec{n}$, v_n и v_τ — нормальная и тангенциальная составляющие $\vec{v}$. Если $\Phi(x, t)$ — уравнение поверхности Γ_t, то $\mathscr{D}_n = -\Phi_t/|\nabla_x\Phi|$. Относительно свободной поверхности Γ_t^+ предположим, что она образована при всех t одними и теми же частицами, т. е. если $\Phi^+(x, t) = 0$ — уравнение Γ_t^+, то $(\Phi_t^+(x, t) + \vec{v}\nabla_x\Phi^+(x, t))|_{\Phi^+(x,t)=0} = 0$. Условия (1), (2) — это система уравнений Навье — Стокса, для которой условия (3), (4) задают начальное и граничное условия, при этом предполагается, что $\nabla_x\vec{v}_0 = 0$ в Ω_0^+, $\vec{f}(u^+, c)$ моделирует влияние неравномерного распределения температуры и концентрации примеси на движение жидкости.

Уравнения (5), (6) описывают перенос тепла с учетом конвекции в жидкой фазе. Условия (7) задают начальное распределение и граничные значения температуры на границах Γ_t^+ и Γ_0^-. Соотношение (8) представляет собой условие Стефана на границе раздела фаз, а (9) является дополнительным соотношением, вытекающим из предположения фазового равновесия на границе раздела фаз. Уравнение (10) описывает перенос примеси в жидкой фазе, условия (11) задают начальное и граничное значение для концентрации, условие (12) является следствием уравнения неразрывности для одного из веществ смеси. Будем предполагать, что

$$\vec{f}(u^+, c)\in C^1(R^2), \quad \vec{v}_0(x)\in H^{2+\alpha}(\Omega_0^+),$$

$$p_0(x, t), \quad p_{0x_i}(x, t)\in H^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(R^3\times[0, T]),$$

$$u_0^\pm(x)\in H^{4+\alpha}(\bar{\Omega}_0^\pm), \quad b^\pm(x, t)\in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(R_3\times[0, T]),$$

$$g(x, t)\in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(R_3\times[0, T])$$

и выполняются условия

$$b^+(x, t) > b_0^+, \quad k^-\frac{\partial u_0^-}{\partial n} - k^+\frac{\partial u_0^+}{\partial n}\Big|_{\Gamma_0} \geqslant a_0 > 0,$$

$$c_0(x)\geqslant \mu_0>0,\quad b_0^+=\max(T_k-qc_0(x))|_{\Gamma_0^+}, \tag{13}$$

$$b_0^-=\min(T_k-qc_0(x))|_{\Gamma_0^-},\quad b^-(x,t)<b_0^-.$$

Предполагаются также выполненными условия согласования до первого порядка включительно, которые вытекают как необходимые из предложения существования гладкого решения и формулируются аналогично [5, с. 363, с. 268].

Теорема 1. *При сделанных выше предположениях задача* (1)—(12) *имеет решение*

$$u^{\pm}\in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\bar D_T^{\pm}),\quad \vec v\in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\bar D_T^+),$$

$$\nabla_x p\in H^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar D_T^+),\quad c\in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\bar D_T^+)$$

при достаточно малых $0<T<T_0$, *где* T_0 *зависит от данных задачи. Границы* Γ_t^+ *и* Γ_t *описываются функциями, принадлежащими классам* $H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}$ *и* $\hat H^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}$.

2. Для доказательства разрешимости задачи (1)—(12) сведем ее к задаче в фиксированной области. Для этого воспользуемся отображениями, приведенными в [6]. Обозначим через $\omega=(\omega_1,\omega_2)$ некоторые координаты на Γ_0, $x(\omega)$ — соответствующую точку в R^3, $\vec n(\omega)$ — нормаль к Γ_0, направленную в сторону жидкой фазы. Аналогичные параметры для поверхности Γ_0^+ будем обозначать $\omega'\doteq(\omega_1',\omega_2')$, $x(\omega')$, $\vec n(\omega')$. Пусть $\gamma_0>0$ таково, что поверхности $\{x=x(\omega)\pm 2\vec n(\omega)\gamma,\ 0<\gamma<\gamma_0\}$, $\{x=x(\omega')+2\vec n(\omega')\gamma,\ 0<\gamma<\gamma_0\}$ не имеют самопересечений и не пересекаются с Γ_0, $\Gamma_0^{\pm}$. В окрестностях Γ_0 и Γ_0^+ введем координаты (ω,λ) и (ω',λ') в соответствии с равенствами

$$x(\omega,\lambda)=x(\omega)+\lambda\vec n(\omega),\quad x(\omega',\lambda')=x(\omega')+\lambda'\vec n(\omega').$$

Пусть $\rho(\omega,t)$ — некоторая функция из класса $\hat H^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(\Gamma_0\times[0,T])$ такая, что $\rho(\omega,0)=0$, $|\rho(\omega,t)|^{(3+\alpha)}_{\Gamma_0\times[0,T]}\leqslant\gamma_0$. Функция $\rho(\omega,t)$ обозначает расстояние по нормали $\vec n(\omega)$ от поверхности Γ_0 к Γ_t.

Будем считать, что γ_0 настолько мало, что отображения $X^1:\Gamma_0\times\times[-\gamma_0,\gamma_0]\to R^3$ и $X^2:\Gamma_0^+\times[0,\gamma_0]\to R^3$, определяемые правилами $(\omega,\lambda)\to\to\omega+\lambda\vec n(\omega)$ и $(\omega',\lambda')\to\omega'+\lambda'\vec n(\omega')$, являются регулярными и взаимно однозначными. Пусть образы при этих отображениях есть

$$N_0=\{x(\omega,\lambda):(\omega,\lambda)\in\Gamma_0\times[-\gamma_0,\gamma_0]\},$$

$$N_0'=\{x(\omega',\lambda'):(\omega',\lambda')\in\Gamma_0^+\times[0,\gamma_0]\}.$$

Введем функцию $\Phi_\rho(x,t)=\lambda(x)-\rho(\omega(x),t)$, $t\in[0,T]$, тогда поверхность Γ_t определяется уравнением $\Phi_\rho(x,t)=0$. Пусть (x,t) и (ξ,t) — две системы координат в пространстве $R^3\times[0,T]$, а $\chi_0(\lambda)$ — срезающая функция, принадлежащая $C_0^\infty(R^1)$, такая, что $\chi_0(\lambda)=1$ при $|\lambda|\leqslant\gamma_0/4$, $\chi(\lambda)==0$ при $|\lambda|\geqslant 3\gamma_0/4$, $|\chi_0(\lambda)|\leqslant(4/3)\gamma_0^{-1}$. Рассмотрим отображение $l_{\rho,v}$, определяемое следующей формулой:

$$x=l_{\rho,v}(\xi,t)=\begin{cases} x(\omega(\xi))+\vec n_0(\omega(\xi))(\lambda(\xi)+\chi_0(\lambda(\xi))\rho(\omega(\xi),t)),\\ \qquad(\xi,t)\in N_0\times[0,T],\\ \xi,\ (\xi,t)\in(R^3\setminus(N_0\cup N_0'))\times[0,T],\\ \xi+\chi_0(\lambda'(\xi))\int\limits_0^t\vec v(\xi,\tau)\,d\tau,\quad(\xi,t)\in N_0'\times[0,T].\end{cases} \tag{14}$$

Легко видеть, что при таком отображении области $Q_T^{\pm} = \Omega_0^{\pm} \times [0, T]$, $\Gamma_{0T} = \Gamma_0 \times [0, T]$, $\Gamma_{0T}^{+} = \Gamma_0^{+} \times [0, T]$ переходят в области $D_T^{\pm}$, Γ_t, Γ_t^{+}. После замены переменных (14) задача сведется к нахождению функций $u^{\pm}$, $\vec{v}$, c, ρ, определенных в фиксированной области.

3. Рассмотрим задачу (5)—(12) с фиксированным $\vec{v}$. При фиксированном $\vec{v}(\xi, t)$ задачу, полученную из (5)—(12) после замены (14), запишем в виде

$$\Phi_{\vec{v}}(u^{+}, u^{-}, \rho, c) = 0. \tag{15}$$

Докажем разрешимость этой задачи и непрерывную зависимость решения от $\vec{v}$.

Схема доказательства подобна изложенной в [2]. Введем функции $w^{\pm}(\xi, t) \in H^{4+\alpha, \frac{4+\alpha}{2}}(\bar{Q}_T^{\pm})$, $s(\xi, t) \in H^{4+\alpha, \frac{4+\alpha}{2}}(\bar{Q}_T^{+})$, $\sigma(\omega, t) \in \hat{H}^{4+\alpha, \frac{4+\alpha}{2}}(\Gamma_{0T})$ такие, что

$$w^{\pm}(\xi, 0) = u_0^{\pm}(\xi), \quad \frac{\partial w^{\pm}}{\partial t}(\xi, 0) = u^{(1)\pm}(\xi), \quad s(\xi, 0) = c_0(\xi),$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = c^{(1)}(\xi), \quad \sigma(\omega, 0) = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t}(\omega, 0) = \rho^{(1)}(\omega), \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \rho^{(2)}(\omega),$$

где $u^{(1)\pm}$ определяются из уравнения теплопроводности, $\rho^{(1)}$ и $\rho^{(2)}$ — из условия Стефана, $c^{(1)}$ — из уравнения диффузии. Вводя новые функции $\delta v^{\pm} = u^{\pm} - w^{\pm}$, $\delta\rho = \rho - \sigma$, $\delta c = c - s$, получим задачу с нулевыми начальными данными. Обозначим

$$\mathcal{H}_{\psi} \equiv \underset{0}{H}^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\bar{Q}_T^{+}) \times \underset{0}{H}^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\bar{Q}_T^{-}) \times \underset{0}{H}^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\bar{Q}_T^{+}) \times$$
$$\times \underset{0}{\hat{H}}^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_{0T}),$$

$$\mathcal{H}_{\mathcal{F}} \equiv \underset{0}{H}^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T^{+}) \times \underset{0}{H}^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T^{-}) \times \underset{0}{H}^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T^{+}) \times \underset{0}{H}^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_{0T}^{+}) \times$$
$$\times \underset{0}{H}^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_{0T}^{-}) \times \underset{0}{H}^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_{0T}) \times \underset{0}{H}^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_{0T}) \times$$
$$\times \underset{0}{H}^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}(\Gamma_{0T}) \times \underset{0}{H}^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}(\Gamma_{0T}), \quad \Gamma_{0T} = \Gamma_0 \times [0, T],$$
$$\Gamma_{0T}^{\pm} = \Gamma_0^{\pm} \times [0, T].$$

После линеаризации задача (15) может быть переписана в следующей форме:

$$A\psi = \mathcal{F}(\psi, \vec{v}), \quad \psi = (\theta^{+}, \theta^{-}, m, \delta\rho), \quad m = \delta c - (\nabla c, \delta l_{\delta\rho}),$$

$$\theta^{\pm} = \delta v^{\pm} - (\nabla w^{\pm}, \delta l_{\delta\rho}), \quad \delta l_{\delta\rho} = \frac{\partial \xi}{\partial \lambda}(\omega, \lambda)\chi_0(\lambda)\rho(\omega, t),$$

где линейный оператор A и нелинейный оператор $\mathcal{F}$ действуют из $\mathcal{H}_{\psi}$ в $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$. Обозначим

$$B_d = \{\vec{v}(\xi, t) \in H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\bar{Q}_T^{+}) : |\vec{v}|_{Q_T^{+}}^{(2+\alpha)} \leqslant d\}.$$

Справедлива следующая теорема

Т е о р е м а 2. *Для каждого $\vec{v}(\xi, t) \in B_d$ существует единственное решение $(\theta^{+}, \theta^{-}, m, \delta\rho)$ задачи (15) и оператор $H : B_d \to H_{\psi}$ является непрерывным.*

Нетрудно доказать, что $\mathscr{F}(\psi, \vec{v})$ удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\|\mathscr{F}(0, \vec{v})\|_{\mathscr{H}_{\mathscr{F}}} \leqslant cT^{\beta/2},$$

$$\|\mathscr{F}(\psi_2, \vec{v}) - \mathscr{F}(\psi_1, \vec{v})\|_{\mathscr{H}_{\mathscr{F}}} \leqslant c(T^{\beta/2} + h(r))\|\psi_2 - \psi_1\|_{\mathscr{H}_\psi}, \tag{16}$$

$$\|\mathscr{F}(\psi, \vec{v}_1) - \mathscr{F}(\psi, \vec{v}_2)\|_{\mathscr{H}_{\mathscr{F}}} \leqslant c|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|^{(2+\alpha)}_{Q_T^+}, \qquad \beta > 0 \tag{17}$$

для ψ_1, $\psi_2 \in B_r$, где B_r — шар в пространстве $\mathscr{H}_\psi$ с центром в нуле, $h(r) \to 0$ для $r \to 0$. При наличии оценок (16) доказательство теоремы 2 по существу сводится к доказательству существования ограниченного оператора A^{-1}.

Доказательство обратимости оператора A сводится к изучению некоторых модельных задач.

4. Рассмотрим следующую модельную задачу:

$$\frac{\partial\theta^\pm}{\partial t} - a_\pm^2 \nabla^2\theta^\pm = f_1^\pm(z, t) \text{ в } D_T^{3\pm},$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} - \gamma\nabla^2 m = f_2(z, t) \text{ в } D_T^{3+},$$

$$\theta^\pm + A^\pm\delta\rho + qm = f_3^\pm(z', t), \tag{18}$$

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} - k^- \frac{\partial\theta^-}{\partial z_3} + k^+ \frac{\partial\theta^+}{\partial z_3} + \sum_{i=1}^{2} d_i \delta\rho_{z_i} = f_4(z', t),$$

$$\mu\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \alpha\frac{\partial m}{\partial z_3} - \sum_{i=1}^{2} g_i\delta\rho_{z_i} = f_5(z', t), \quad (z', t) \in R_T^2,$$

где $D_T^{3\pm} = \{(z, t): z' \in R^2,\ t \in [0, T],\ z = (z', z_3),\ \pm z_3 > 0\}$,

$$R_T^2 = \{(z', t): z' \in R^2,\ t \in [0, T]\},\ \vec{d} = (d_1, d_2),\ \vec{g} = (g_1, g_2).$$

Функции $f_1^\pm$, f_2, $f_3^\pm$, f_4, f_5 являются финитными и $f_1^\pm \in \underset{0}{H}^{\alpha,\alpha/2}$, $f_2 \in \underset{0}{H}^{\alpha,\alpha/2}$, $f_3^\pm \in \underset{0}{H}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}$, f_4, $f_5 \in \underset{0}{H}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}$. Не теряя общности, можно предполагать, что $f_1^\pm$, f_2, $f_3^\pm = 0$. Обозначим через $\tilde{f}(\lambda, z_3, p)$ преобразование Фурье по переменной z' и преобразование Лапласа по t функции $f(z', z_3, t)$.

Применяя интегральные преобразования к (18), получаем

$$\widetilde{\delta\rho}\,(1 + ((i\lambda D_1 + A_1\sqrt{(p + a_+^2\lambda^2)/a_+^2} + B_1\sqrt{(p + a_-^2\lambda^2)/a_-^2})\,\tilde{K}_1)/\tilde{R}(\lambda, p) +$$
$$+ ((i\lambda D_2 + A_2\sqrt{(p + a_+^2\lambda^2)/a_+^2} + B_2\sqrt{(p + a_-^2\lambda^2)/a_-^2})\,\tilde{K}_2)/\tilde{R}(\lambda, p)) =$$
$$= \frac{k^+q\sqrt{(p + a_+^2\lambda^2)/a_+^2} + k^-q\sqrt{(p + a_-^2\lambda^2)/a_-^2}}{\tilde{M}(\lambda, p)\,\tilde{R}(\lambda, p)}\,\tilde{f}_5 + \frac{\alpha\sqrt{(p + \gamma\lambda^2)/\gamma}}{\tilde{M}(\lambda, p)\,\tilde{R}(\lambda, p)}\,\tilde{f}_4.$$

Здесь

$$\tilde{R}(\lambda, p) = p + A_0\sqrt{(p + a_+^2\lambda^2)/a_+^2} + B_0\sqrt{(p + a_-^2\lambda^2)/a_-^2} + i\lambda D_0, \tag{19}$$

$$\tilde{K}_1(\lambda, p) = p/(\tilde{M}(\lambda, p)\,(a_-\sqrt{(p + \gamma\lambda^2)} + \sqrt{\gamma}\sqrt{p + a_-^2\lambda^2})),$$

$$\tilde{K}_2(\lambda, p) = p/(\tilde{M}(\lambda, p)\,(a_-\sqrt{p + \gamma\lambda^2} + \sqrt{\gamma}\sqrt{p + a_-^2\lambda^2})),$$

$$\widetilde{M}(\lambda, p) = \alpha \sqrt{(p+\gamma\lambda^2)/\gamma} + k^+ q\mu \sqrt{(p + a_+^2\lambda^2)/a_+^2} + k^- q\mu \sqrt{(p + a_-^2\lambda^2)/a_-^2},$$

A_0, B_0, A_1, A_2, B_1, B_2, D_0 — положительные константы.

Операторы $\widetilde{M}(\lambda, p)$, $\widetilde{K}_1(\lambda, p)$, $\widetilde{K}_2(\lambda, p)$, $\widetilde{R}(\lambda, p)$ изучены в [1, 2]. Используя свойства этих операторов, легко показать, что оператор в левой части (19) представляется в виде суммы единичного и вполне непрерывного операторов. Используя теорию вполне непрерывных операторов, доказываем следующую лемму

Лемма 1 *Задача* (18) *имеет единственное решение в упомянутых пространствах и справедлива следующая оценка*:

$$|\theta^+|_{D_T^{3+}}^{(2+\alpha)} + |\theta^-|_{D_T^{3-}}^{(2+\alpha)} + |m|_{D_T^{3+}}^{(2+\alpha)} + \|\|\delta\rho\|\|_{R_T^2}^{(2+\alpha)} \leqslant$$

$$\leqslant c(T)\,(|f_1^+|_{D_T^{3+}}^{(\alpha)} + |f_1^-|_{D_T^{3-}}^{(\alpha)} + |f_2|_{D_T^{3+}}^{(\alpha)} + |f_3^-|_{R_T^2}^{(2+\alpha)} +$$

$$+ |f_4|_{R_T^2}^{(1+\alpha)} + |f_5|_{k_T^2}^{(1+\alpha)} + |f_3^+|_{R_T^2}^{(2+\alpha)}).$$

Используя разрешимость модельной задачи, легко доказать обратимость оператора A путем построения регуляризатора [5]. Для доказательства теоремы перепишем соотношение (15) в форме

$$\psi = A^{-1}\mathcal{F}(\psi, \vec{v}) = G_{\vec{v}}\psi.$$

Оценки (16) показывают, что оператор G является сжимающим в шаре B_r. Следовательно, задача (15) имеет решение. Непрерывность оператора H следует из (17). Теорема 2 доказана.

4. Для доказательства теоремы 1 воспользуемся методом последовательных приближений. Вначале полагаем $\vec{v} = \vec{v}_0(x)$ и решаем задачу (5)—(12) с фиксированным $\vec{v}$. Разрешимость этой задачи доказана выше. После этого, заменяя $u^\pm$, c, ρ решением задачи (5)—(12), решаем задачу (1)—(4), являющуюся начально-краевой задачей для системы уравнений Навье — Стокса.

Доказательство разрешимости (1)—(4) подобно приведенному в [3]. Затем, используя новое значение $\vec{v}$, снова решаем задачу (5)—(12) и т. д. Доказательство сходимости этого процесса аналогично приведенному в [3] (см. доказательство теоремы 5).

1. *Базалий Б. В.* Задача Стефана // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1986.— **11**.— С. 3—7.
2. *Базалий Б. В.*, *Дегтярев С. П.* О классической разрешимости многомерной задачи Стефана при конвективном движении вязкой несжимаемой жидкости // Мат. сб.— 1987.— **132**, № 1.— С. 3—19.
3. *Солонников В. А.* Разрешимость задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1977.— **41**, № 6.— С. 1388—1424.
4. *Солонников В. А.* О дифференциальных свойствах решения первой краевой задачи для нестационарной системы уравнений Навье — Стокса // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1964.— **43**.— С. 221—291.
5. *Ладыженская О. А.*, *Солонников В. А.*, *Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М.: Наука, 1967.— 736 с.
6. *Hanzawa Ei-Ichi*. Classical solution of the Stefan problem.— Tohoku Math. J.— 1981.— **33**.— P. 297—335.

Получено 09.10.91