УДК 519.21

О. А. Сафонова, асп. (Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

Об асимптотическом поведении интегральных функционалов от диффузионных процессов с периодическими коэффициентами

Доказана центральная предельная теорема для функционалов интегрального вида и с ее помощью установлена локальная асимптотическая нормальность логарифма отношения правдоподобия для диффузионных процессов с периодическими коэффициентами.

Доведена центральна гранична теорема для функціоналів інтегрального типу і з її допомогою встановлена локальна асимптотична нормальність логарифма відношення правдоподібності для дифузійних процесів з періодичними коефіцієнтами.

1. Введение. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — полное вероятностное пространство, $(\mathcal{F}_t, t \geqslant 0)$ — неубывающее семейство пополненных σ-подалгебр $\mathcal{F}$, $(w_t, \mathcal{F}_t; t \geqslant 0)$ — стандартный m-мерный винеровский процесс. В настоящей работе исследуется асимптотическое поведение при $T \to \infty$ функционалов вида $\int_0^T f(\xi_t)\, dt$, где ξ_t — решение стохастического дифференциального уравнения Ито

$$d\xi_t = b(\xi_t)\, dt + \sigma(\xi_t)\, dw_t, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с произвольным начальным условием $\xi_0 \in R^n$. Здесь $b(x)$ — вектор-столбцы из R^n, $\sigma(x)$ — матрицы размера $n \times m$, $n \leqslant m$.

Покажем, что если $b(x)$, $\sigma(x)$, $f(x)$ являются периодическими на R^n по каждой координате, то существует

$$P - \lim_{T\to\infty} T^{-1} \int_0^T f(\xi_t)\,dt = \text{const} = \bar f. \tag{2}$$

Более того, имеет место асимптотическая нормальность при $T \to \infty$ случайных величин $T^{-1/2}\left[\int_0^T f(\xi_t)\,dt - T\cdot\bar f\right]$. Эти результаты в несколько более общем виде доказываются ниже в п. 2. В частности, в случае $f(x) = b(x) \in R^n$ из полученных результатов следуют асимптотическая нормальность $T^{-1/2}(\xi_T - T\cdot\bar b)$ при $T \to \infty$ и явные формулы для числовых характеристик предельного распределения, полученные ранее довольно громоздким способом в работе Бхаттачария [1]. В п. 3 дается другое вероятностное представление постоянной $\bar f$ в (2) для одномерных процессов ξ_t, $t \geqslant 0$. В п. 4 устанавливается локальная асимптотическая нормальность логарифма отношения правдоподобия в случае, когда $b(x)$ зависит от некоторого параметра θ. Этот результат позволяет исследовать асимптотические свойства оценок неизвестного параметра θ, следуя методу, развитому Ибрагимовым и Хасьминским [2].

Будем использовать запись вида

$$\mathcal{L}\{\eta^T\} \underset{T\to\infty}{\to} \mathcal{L}\{\zeta\} \text{ и } \mathcal{L}\{\eta_t^T, t \geqslant 0\} \underset{T\to\infty}{\to} \mathcal{L}\{\zeta_t, t \geqslant 0\}$$

для обозначения сходимости при $T \to \infty$ соответственно распределений случайных величин и конечномерных распределений случайных процессов.

2. Предельные теоремы. Введем необходимые обозначения и предположения. Для векторов $x, y \in R^n$ с координатами x_i, y_i полагаем $(x, y) = x_i y_i$, $|x| = (x, x)^{1/2}$ (по повторяющимся индексам всюду предполагается суммирование). Для матрицы A произвольных размеров $\|A\| = (\mathrm{Sp}\, A^* A)^{1/2}$, звездочка означает транспонирование Предполагаем, что $b(x)$, $\sigma(x)$ удовлетворяют следующим условиям Липшица невырождаемости и периодичности:

1) для некоторой постоянной $K \geqslant 0$ справедливы неравенства

$$|b(x) - b(y)| \leqslant K\cdot|x - y|, \quad \|\sigma(x) - \sigma(y)\| \leqslant K\cdot|x - y|$$

при всех $x, y \in R^n$;

2) для некоторой постоянной $\nu \in (0, 1]$ справедливы неравенства

$$\nu|l| \leqslant |\sigma^* l| \leqslant \nu^{-1}|l| \text{ при всех } l \in R^n;$$

3) для всякого вектора $h \in R^n$ с целыми координатами (т. е. $h \in Z^n$) $b(x + h) \equiv b(x)$, $\sigma(x + h) \equiv \sigma(x)$.

Условие 3 означает, что $b(x)$, $\sigma(x)$ периодичны с периодом 1 по каждой из координат x_i. Следовательно, можно считать, что $b(x)$, $\sigma(x)$ определены и непрерывны на n-мерном торе $S = [0, 1)^n = R^n/Z^n$. В дальнейшем будем отождествлять $C(S)$ с множеством функций из $C(R^n)$, периодичных с периодом 1 по каждой координате Для заданных $b(x)$, $\sigma(x)$ введем линейный дифференциальный оператор

$$L = \frac{1}{2} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (a_{ij}(x)) = a(x) = \sigma\sigma^*(x).$$

Другие обозначения вводятся по ходу изложения.

Лемма 1. *Пусть $b(x)$, $\sigma(x)$ удовлетворяют условиям* 1—3. *Тогда для произвольной функции $f \in C(S)$ существует и единственна постоянная $\bar f$ такая, что уравнение*

$$Lu = f - \bar f \text{ на } S \tag{3}$$

имеет решение, принадлежащее пространству Соболева $W^{2,p}$ (S) при каждом $p \in [1, \infty)$. Это решение единственно с точностью до постоянного слагаемого.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $a_{ij}, b_i, f \in C^\infty(S)$. В этом случае из теорем Фредгольма следует (см., например, [3], ч. 2, § 3.6), что уравнение $Lu = f$ разрешимо в $C^\infty(S)$ тогда и только тогда, когда $\langle f \rangle = \int\limits_S f(x)\rho(x)\,dx = 0$ для всех решений однородного сопряженного уравнения

$$L^*\rho = \frac{1}{2}\frac{\partial^2(\rho a_{ij})}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial(\rho b_i)}{\partial x_i} = 0 \text{ на } S. \tag{4}$$

Решение $\rho \in C^\infty(S)$ определено однозначно условием нормировки $\langle \rho \rangle = 1$ и представляет собой плотность инвариантной меры на S, соответствующей процессу (1) на S. При этом условии положим

$$\bar{f} = \langle f \rangle = \int\limits_S f(x)\rho(x)\,dx. \tag{5}$$

Тогда $\langle f - \bar{f} \rangle = 0$ и, следовательно, уравнение (3) разрешимо в $C^\infty(S)$.

Пусть теперь $u_1, u_2 \in C^\infty(S)$ и для некоторых постоянных $\bar{f}_1, \bar{f}_2$ справедливы равенства

$$Lu_1 = f - \bar{f}_1, \quad Lu_2 = f - \bar{f}_2 \text{ на } S.$$

Полагая для определенности $\bar{f}_2 \geqslant \bar{f}_1$, имеем $L(u_1 - u_2) = \bar{f}_2 - \bar{f}_1 \geqslant 0$ на S. Из сильного принципа максимума для эллиптических операторов (см. [4], теорема 3.5) следует $u_1 - u_2 = \text{const}$ на S, и $\bar{f}_1 = \bar{f}_2$.

Таким образом, в случае гладких a_{ij}, b_i, f все утверждения леммы доказаны. Общий случай получается несложным предельным переходом от гладких к произвольным рассматриваемым a_{ij}, b_i, f, с использованием известных оценок решений линейных уравнений в норме $W^{2,p}$ через норму правой части в L^p, $1 < p < \infty$ [3, 4]. Лемма 1 доказана.

Следующая теорема проясняет вероятностный смысл постоянной из предыдущей леммы.

Теорема 1. *Пусть $b(x)$, $\sigma(x)$ удовлетворяют условиям 1—3, $f \in C(S)$ и $\bar{f}$ — постоянная из (3). Тогда справедливо предельное соотношение (2), в котором $\xi_t = \xi_t^x$ — сильное решение уравнения (1) с произвольным начальным условием $\xi_0 = x \in R^n$.*

Доказательство. Зафиксируем $p > n$. По теореме Соболева о вложении $W^{2,p}(S) \subset C^1(S)$. Применяя к решению уравнения (3) формулу Ито, получаем (P — п. н.)

$$T^{-1}\int\limits_0^T f(\xi_t)\,dt - \bar{f} = T^{-1}\int\limits_0^T Lu(\xi_t)\,dt = T^{-1}\int\limits_0^T (\nabla u)^* \sigma(\xi_t)\,dw_t + $$
$$+ T^{-1}[u(\xi_T) - u(\xi_0)]. \tag{6}$$

Последнее слагаемое по модулю не превышает const T^{-1}. Кроме того, известное равенство для стохастических интегралов приводит к оценке

$$M\Big[T^{-1}\int\limits_0^T (\nabla u)^* \sigma(\xi_t)\,dw_t\Big]^2 = T^{-2} M\int\limits_0^T (\nabla u)^* a \nabla u(\xi_t)\,dt \leqslant \text{const}\, T^{-1}.$$

Значит, $T^{-1}\int\limits_0^T f(\xi_t)\,dt$ при $T \to \infty$ сходится к $\bar{f}$ в среднем квадратическом, что влечет и сходимость по вероятности. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Существование достаточно гладкой функции $\rho(x)$, удовлетворяющей уравнению (4), обычно доказывается при более жестких условиях на коэффициенты оператора L. Например, в работе [1] функции

$a_{ij}(x)$ имеют ограниченные вторые производные. Однако равенство (5) можно обосновать при минимальных предположениях об исходных функциях. В самом деле, из (2) видно, что $f \mapsto \bar{f}$ является линейным ограниченным функционалом на $C(S)$. По теореме Риса об общем виде таких функционалов существует мера μ на S, для которой

$$\bar{f} = \int_S f(x)\,\mu(dx) \quad \text{при } f \in C(S). \tag{7}$$

Далее, полагая $f_s(x) = Mf(\xi_s^x)$ при $s > 0$, в силу марковского свойства процесса ξ_t имеем

$$\int_0^T f_s(\xi_t)\,dt = M\left\{\int_s^{T+s} f(\xi_t)\,dt/\xi_s\right\} \quad \text{при } s > 0,\ T > 0.$$

Следовательно, соотношения (2), (7) останутся в силе, если заменить $f(x)$ на $f_s(x)$ при $s > 0$. Это означает, что μ является инвариантной мерой на S для процессов (1). Из общих свойств диффузионных процессов можно вывести, что мера μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на S, причем ее плотность $\rho(x) = \mu(dx)/dx > 0$ на S. Таким образом, равенство (7) сводится к (5).

Пусть теперь для некоторого натурального k заданы матрицы $\varphi(x)$ размера $k \times m$ с элементами $\varphi_{ij}(x) \in C(S)$. Применяя соотношения (2), (5) к элементам матриц $\varphi\varphi^*(x)$, получаем матричное равенство

$$P - \lim_{T\to\infty} T^{-1} \int_0^T \varphi\varphi^*(\xi_t)\,dt = \Phi = \langle\varphi\varphi^*\rangle = \int_S \varphi\varphi^*(x)\,\rho(x)\,dx. \tag{8}$$

Введем в рассмотрение k-мерные случайные процессы

$$\eta_s^T = T^{-1/2} \int_0^{sT} \varphi(\xi_t)\,dw_t, \quad s \geqslant 0,$$

и стандартный k-мерный винеровский процесс $(\tilde{w}_s,\ s \geqslant 0)$ на некотором вероятностном пространстве $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$.

Лемма 2. *При сделанных предположениях* 1—3

$$\mathcal{L}\{\eta_s^T,\ s \geqslant 0\} \xrightarrow[T\to\infty]{} \mathcal{L}\{\Phi^{1/2}\tilde{w}_s, s \geqslant 0\}, \tag{9}$$

где Φ — *симметричная неотрицательно определенная матрица из* (8). *В частности,* $\mathcal{L}\{\eta_1^T\} \xrightarrow[T\to\infty]{} N(0, \Phi)$.

Доказательство. Для каждого $T > 0$ процесс η_s^T, $s \geqslant 0$, является k-мерным мартингалом с операторной характеристикой

$$\langle\eta_s^T, \eta_s^T\rangle = T^{-1} \int_0^{sT} \varphi\varphi^*(\xi_t)\,dt.$$

Из (8) следует $P - \lim\limits_{T\to\infty} \langle\eta_s^T, \eta_s^T\rangle = s\Phi$ при $s \geqslant 0$. Отсюда вытекает искомое соотношение (9) в силу известных результатов о сходимости диффузионных процессов (см. [5], § 3 гл. 5, теорема 1 и следствие 1). Лемма 2 доказана.

В следующей теореме уточняется характер сходимости в (2) сразу для вектор-функций $f(x)$. Уравнение (3) для вектор-функций представляет собой систему равенств $Lu_i = f_i - \bar{f}_i$ на S, $i = 1, \ldots, k$.

Теорема 2. *Пусть* $b(x)$, $\sigma(x)$ *удовлетворяют условиям* 1—3, $f_i(x) \in C(S)$ *при* $i = 1, \ldots, k$; $f = (f_1, \ldots, f_k)^*$, $\bar{f} = \langle f\rangle$ *и* $u = (u_1, \ldots, u_k)^*$ — *решение уравнения* (3). *Тогда*

$$\mathcal{L}\left\{T^{-1/2}\left[\int_0^{sT} f(\xi_t)\,dt - sT\cdot\bar{f}\right],\ s \geqslant 0\right\} \xrightarrow[T\to\infty]{} \mathcal{L}\{\Phi^{1/2}\tilde{w}_s\ s \geqslant 0\},$$

где $\Phi = \langle (\nabla u)^* a \nabla u \rangle$, $\nabla u(x)$ — *матрицы со столбцами* $\nabla u_j(x)$, $j = 1, \ldots, k$. *В частности,* $\mathcal{L}\{T^{-1/2}\left[\int\limits_0^T f(\xi_t)\,dt - T\bar{f}\right]\} \xrightarrow[T\to\infty]{} N(o, \Phi)$.

Доказательство вытекает из равенства

$$\int\limits_0^{sT} f(\xi_t)\,dt - sT\bar{f} = \int\limits_0^{sT} (\nabla u)^* \sigma(\xi_t)\,dw_t + u(\xi_{sT}) - u(\xi_0), \tag{10}$$

аналогичного (6), и леммы 2 при $\varphi = (\nabla u)^* \sigma$.

Рассмотрим случай $k = n$, $f(x) = b(x)$. Следующая теорема при более сильных ограничениях на исходные функции доказана в [1].

Теорема 3. *Пусть* $b(x)$, $\sigma(x)$ *удовлетворяют* 1—3, *и* $g = (g_1, \ldots, g_n)^*$ — *решение уравнения* $Lg = b - \langle b \rangle$ *на* S. *Тогда для решения уравнения* (1) *имеет место сходимость*

$$\mathcal{L}\{T^{-1/2}(\xi_{sT} - \xi_0 - sT\bar{b}),\ s \geqslant 0\} \xrightarrow[T\to\infty]{} \mathcal{L}\{\Phi^{1/2}\tilde{w}_s,\ s \geqslant 0\},$$

где $\Phi = \langle (\mathcal{I}_n + \nabla g)^* a (\mathcal{I}_n + \nabla g) \rangle$, $\mathcal{I}_n$ — *единичная матрица* n-*го порядка*.

Доказательство. Пользуясь равенством (10) при $f = b$, находим

$$\xi_{sT} - \xi_0 - sT\bar{b} = \int\limits_0^{sT} \sigma(\xi_t)\,dw_t + \int\limits_0^{sT} b(\xi_t)\,dt - sT\bar{b} = \int\limits_0^{sT} (\mathcal{I}_n + \nabla g)^* \sigma(\xi_t)\,dw_t + g(\xi_{sT}) - g(\xi_0),$$

после чего остается сослаться на лемму 2 при $\varphi = (\mathcal{I}_n + \Delta g)^* \sigma$). Теорема 3 доказана.

3. Одномерный случай. В случае $n = 1$ равенство (2) может быть интерпретировано с помощью классического закона больших чисел (ЗБЧ) следующим образом. Пусть для определенности ξ_t, $t \geqslant 0$,— решение уравнения (1) с начальным условием $\xi_0 = 0$. Положим $\tau_0 = 0$, а затем при $k = 1, 2, \ldots$

$$\tau_k = \min\{t > \tau_{k-1} : |\xi_t - \xi_{\tau_{k-1}}| = 1\},$$
$$\Delta\tau_k = \tau_k - \tau_{k-1}, \quad \eta_k = \int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} f(\xi_t)\,dt. \tag{11}$$

Из периодичности функций σ, b, f и строго марковского свойства ξ_t вытекает, что $(\Delta\tau_k, \eta_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, — независимые одинаково распределенные векторы в R^2. В частности, $m(f) = M_{\eta_k}$ и $m(1) = M(\Delta\tau_k)$ не зависят от $k = 1, 2, \ldots$. В силу ЗБЧ существуют пределы (Р — п.н.)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tau_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \Delta\tau_k = m(1),$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int\limits_0^{\tau_n} f(\xi_t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \eta_k = m(f).$$

При $T > 0$ положим $n = n(T)$ — целая часть $T/m(1)$. Очевидно, $\lim\limits_{T\to\infty} T/n = m(1)$, что вместе с предыдущими соотношениями приводит к существованию предела (P — п. н.)

$$\lim_{T\to\infty} T^{-1} \int\limits_0^T f(\xi_t)\,dt = \frac{1}{m(1)} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int\limits_0^{\tau_n} f(\xi_t)\,dt = \frac{m(f)}{m(1)}.$$

Таким образом, имеет место равенство (2) при $\bar{f} = m(f)/m(1)$.

Замечание 2. Предыдущие рассуждения останутся в силе, если определить τ_k, η_k по формулам (11) для процесса ξ_t с произвольным начальным условием $\xi_0 \in R^1$. В силу теоремы 1 частное $\bar{f} = m(f)/m(1)$ не зависит от выбора $\xi_0 \in R^1$. Отметим без доказательства, что на самом деле не зависят от ξ_0 величины $m(f)$, $m(1)$ в отдельности и, кроме того, вероятности, с которыми $\xi_{\tau_k} - \xi_{\tau_{k-1}}$ принимают значения $+1$ и -1.

Вычислим значение $m(f)$ в явном виде. Для этого рассмотрим вспомогательную краевую задачу для уравнения

$$Lu + f = \frac{\sigma^2}{2} u'' + bu' + f = 0 \text{ в } (-1,1)$$

с граничными условиями $u(\pm 1) = 0$. Решение этой задачи в классе $C^2([-1,1])$ задается формулой

$$u(x) = g_2(x) \int_{-1}^{x} g_1 Gf(y)\, dy + g_1(x) \int_{x}^{1} g_2 Gf(y)\, dy, \tag{12}$$

где

$$g_1(x) = \int_{-1}^{x} v(y)\, dy, \quad g_2(x) = \int_{x}^{1} v(y)\, dy,$$

$$v(x) = \exp\left[-\int_{0}^{x} \frac{2b(y)\, dy}{\sigma^2(y)}\right], \quad G(x) = \frac{2}{\sigma^2(x)\, v(x)}\left[\int_{-1}^{1} v(y)\, dy\right]^{-1}.$$

Для решения ξ_t уравнения (1) с начальным условием $\xi_0 = 0$ по формуле Ито находим

$$m(f) = M\int_{0}^{\tau_1} f(\xi_t)\, dt = -M\int_{0}^{\tau_1} Lu(\xi_t)\, dt = M[u(\xi_0) - u(\xi_{\tau_1})] = u(0).$$

Учитывая, что σ, b, f периодичны с периодом 1, отсюда и из (12) нетрудно получить представление $m(f)$ в виде

$$m(f) = \int_{0}^{1} f(x)\, G_0(x)\, dx, \tag{13}$$

где

$$G_0(x) = \frac{2}{(1+v_1)\,\sigma^2(x)\, v(x)}\left[v_1 \cdot \int_{0}^{x} v(y)\, dy + \int_{x}^{1} v(y)\, dy\right], \quad v_1 = v(1).$$

Сравнивая (12) с аналогичным равенством (5) для $\bar{f} = m(f)/m(1)$, заключаем, что плотность инвариантной меры

$$\rho(x) = G_0(x)\left[\int_{0}^{1} G_0(y)\, dy\right]^{-1} \text{ на } S = [0, 1). \tag{14}$$

Из условий 1—3 следует, что значения $\rho(x)$ заключены между двумя положительными постоянными. Легко проверить также, что $\rho \in C^2(S)$ и, в согласии с (4), $(\frac{\sigma^2}{2}\rho)'' - (b\rho)' = 0$ на S.

4. Асимптотическое поведение отношения правдоподобия. Пусть теперь функция b зависит от параметра θ, принимающего значения из некоторого множества $\Theta \subset R^k$, $k \geqslant 1$. Предположим, что при всех $\theta \in \Theta$ функции $b(x, \theta)$ вместе с $\sigma(x)$ удовлетворяют условиям 1—3. Пусть $(\mathcal{C}_T, \mathcal{B}_T)$ — измеримое пространство непрерывных функций $x = (x_t, 0 \leqslant t \leqslant T)$ на $[0, T]$ с σ-алеброй $\mathcal{B}_T = \sigma\{x : x_t, t \leqslant T\}$. Обозначим через μ_θ^T вероятностную меру на $(\mathcal{C}_T, \mathcal{B}_T)$, порожденную решением уравнения

$$d\xi_t = b(\xi_t, \theta)\, dt + \sigma(\xi_t)\, dw_t \tag{15}$$

с фиксированным начальным условием $\xi_0 \in R^1$. Известно (см., например, [6], следствие теоремы 7.18), что при $\theta, \overline{\theta} \in \Theta$ логарифм отношения правдоподобия

$$\Lambda_T(\xi; \theta, \overline{\theta}) = \ln d\mu_\theta^T / d\mu_{\overline{\theta}}^T(\xi) =$$

$$= \int_0^T \sigma^{-1}(\xi_t)[b(\xi_t, \theta) - b(\xi_t, \overline{\theta})]\, dw_t - \frac{1}{2}\int_0^T \sigma^{-2}(\xi_t)[b(\xi_t, \theta) - b(\xi_t, \overline{\theta})]^2 dt,$$

где ξ_t — решение уравнения (15) при $\theta = \overline{\theta}$.

Т е о р е м а 4. *Пусть в некоторой окрестности точки $\overline{\theta} \in \Theta$ градиент $\nabla_\theta b(x, \theta)$ непрерывен по θ при почти всех x, причем*

$$|\nabla_\theta b(x, \theta) - \nabla_\theta b(x, \overline{\theta})| \leqslant \beta(\|\theta - \overline{\theta}\|) R(x), \quad |\nabla_\theta b(x, \overline{\theta})| \leqslant R(x), \tag{16}$$

где $\beta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0+$, а $R(x)$ — неотрицательная периодическая с периодом 1 борелевская функция, удовлетворяющая условию $\int_0^1 R^2(x)\, dx < \infty$. Тогда для любого $h \in R^k$ справедливо представление

$$\Lambda_T(\xi; \overline{\theta} + T^{-1/2}h, \overline{\theta}) = (\eta^T, h) - \frac{1}{2}(\Phi h, h) + \alpha(h, T), \tag{17}$$

в котором

$$\mathscr{L}\{\eta^T\} \xrightarrow[T \to \infty]{} N(0, \Phi), \tag{18}$$

$$\Phi = \langle \sigma^{-2} \nabla_\theta b (\nabla_\theta b)^* (x, \overline{\theta}) \rangle = \int_0^1 \sigma^{-2}(x) \nabla_\theta b (\nabla_\theta b)^* (x, \overline{\theta}) \rho(x)\, dx,$$

где функция $\rho(x)$ определена по формуле (14), *и* $P - \lim\limits_{T \to \infty} \alpha(h, T) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о основывается на результатах п.2 с той поправкой, что в случае $n = 1$ всюду в них вместо непрерывных $f(x), \sigma(x)$ можно взять борелевские с условиями $\int_0^1 |f(x)|\, dx < \infty$, $\int_0^1 \|\varphi(x)\|^2 dx < \infty$. Полагая

$$\varphi(x) = \sigma^{-1}(x) \nabla_\theta b(x, \overline{\theta}), \quad \eta^T = T^{-1/2} \int_0^T \varphi(\xi_t)\, dw_t,$$

из (8) и леммы 2 получаем соотношение (18). Положим далее

$$B(x) = \sigma^{-1}(x)[b(x, \overline{\theta} + T^{-1/2}h) - b(x, \overline{\theta})],$$

$$B_0(x) = T^{-1/2}\sigma^{-1}(x)(\nabla_\theta b(x, \overline{\theta}), h) = T^{-1/2}(\varphi(x), h). \tag{19}$$

Тогда

$$\Lambda_T(\xi; \overline{\theta} + T^{-1/2}h, \overline{\theta}) = \int_0^T B(\xi_t)\, dw_t - \frac{1}{2}\int_0^T B^2(\xi_t)\, dt. \tag{20}$$

Кроме того, из (19), (8) заключаем

$$\int_0^T B_0(\xi_t)\, dw_t = (\eta^T, h), \quad P - \lim_{T \to \infty} \int_0^T B_0^2(\xi_t)\, dt = (\Phi h, h).$$

Следовательно, для доказательства (17) осталось показать, что при замене B на B_0 выражение (20) изменится на величину, стремящуюся к нулю по вероятности при $T \to \infty$. Это будет так, если

$$P - \lim_{T \to \infty} \int_0^T (B - B_0)^2(\xi_t)\, dt = 0. \tag{21}$$

Для доказательства (21) заметим, что из (16) и формулы Тейлора следует оценка

$$(B - B_0)^2 (x) \leqslant T^{-1} \beta^2 (T^{-1/2} | h |) (R/\sigma)^2 (x).$$

По теореме 1

$$P - \lim_{T \to \infty} T^{-1} \int_0^T (R/\sigma)^2 (\xi_t)\, dt = \text{const} < \infty.$$

Кроме того, по условию теоремы $\beta (T^{-1/2} | h |) \to 0$ при $T \to \infty$, что приводит к искомому соотношению (21). Теорема 4 доказана.

Из равенства $(\Phi h, h) = \langle \sigma^{-2} (\nabla_\theta b (x, \theta), h)^2 \rangle$ при $h \in R^k$ видно, что матрица Φ является положительно определенной, если только система векторов $\{\nabla_\theta b (x, \overline{\theta}) \in R^k,\ x \in [0, 1]\}$, имеет максимально возможный ранг k. В этом случае, полагая $\eta_0^T = \Phi^{-1/2} \eta^T$, $h = \Phi^{-1/2} u$ при $u \in R^k$, можно переписать представление (17) в следующем виде:

$$\Lambda_T = \Lambda_T (\xi; \overline{\theta} + (T\Phi)^{-1/2} u, \overline{\theta}) = (\eta_0^T, u) - \frac{1}{2} | u |^2 + \alpha_T,$$

где

$$\mathcal{L} \{\eta_0^T\} \xrightarrow[T \to \infty]{} N (0, \mathcal{J}_k), \quad \alpha_T = \alpha (h, \Phi^{-1/2} u), \quad P - \lim_{T \to \infty} \alpha_T = 0.$$

Иными словами, Λ_T локально асимптотически нормально при $T \to \infty$ в точке $\theta = \overline{\theta}$.

П р и м е р. Пусть в уравнении (15) $\theta = (\theta_1, \theta_2)^* \in R^2$, $b (x, \theta) = \theta_1 \sin (2\pi x + \theta_2)$, $\sigma (x) \equiv 1$. Тогда утверждение теоремы 4 справедливо для произвольного $\overline{\theta} = (\theta_1, \theta_2)^* \in R^2$ с матрицей

$$\Phi = \int_0^1 \nabla_\theta b \cdot (\nabla_\theta b)^* (x, \overline{\theta}) \rho (x)\, dx, \text{ где } \nabla_\theta b (x, \overline{\theta}) = (\sin (2\pi x + \theta_2),$$
$$\theta_1 \cos (2\pi x + \theta_2))^*.$$

Уравнение (4) в данном случае принимает вид $\frac{1}{2} \rho'' - (b\rho)' = 0$, откуда с учетом периодичности находим $\rho (x) = C_0 \exp \left\{ - \frac{\theta_1}{\pi} \cos (2\pi x + \theta_2) \right\}$, где постоянная $C_0 > 0$ однозначно определяется из условия нормировки $\langle \rho \rangle = 1$. Из периодичности следует также, что C_0 и матрица Φ не зависят от θ_2. Обозначая через I_k значение модифицированной функции Бесселя

$$I_k (z) = \int_0^1 \cos 2k\pi x \exp \{\pm z \cos 2\pi x\}\, dx$$

в точке $z = \theta_1/\pi$, окончательно находим $C_0 = 1/I_0$, и элементы матрицы Φ

$$\Phi_{11} = \frac{1}{2} (1 - I_2/I_0), \quad \Phi_{22} = \frac{\theta_1^2}{2} (1 + I_2/I_0), \quad \Phi_{12} = \Phi_{21} = 0.$$

1. *Bhattacharya R.* A central limit theorem for diffusions with periodic coefficients // Ann. Probab.— 1985.— 13, N 2.— P. 385—396.
2. *Линьков Ю. Н.* Об оценках параметров процессов диффузионного типа // Теория случайн. процессов.— 1981.— 9.— С. 61—71.
3. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными.— М. : Мир, 1966.— 351 с.
4. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.— М. : Наука, 1989.— 463 с.
5. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения.— Киев : Наук. думка, 1982.— 611 с.
6. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов.— М. : Наука, 1974.— 696 с.

Получено 09.10.91