

УДК 517.947

А. И. Марковский, канд. физ.-мат. наук  
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

## Замечания об $L_p - L_q$ оценках решений уравнения Клейна — Гордона

Устраняются пробелы в доказательствах ряда оценок, установленных ранее в статье Маршалла, Штрауса и Вайнгера, посвященной  $L_p - L_q$  оценкам решений уравнения Клейна — Гордона.

Усуваються недоліки в доведеннях ряду оцінок, установлених раніше в статті Маршалла, Штрауса і Вайнгера, присвяченій  $L_p - L_q$  оцінкам розв'язків рівняння Клейна — Гордона.

В работе [1] рассматривается задача Коши для уравнения Клейна — Гордона

$$u_{tt} = \Delta u - u, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = f(x), \quad x \in R^n. \quad (2)$$

Оператор  $T_t : f \Rightarrow u(\cdot, t)$  преобразует начальную скорость в положение  $u(\cdot, t)$  в момент  $t$ . Основные вопросы, рассматриваемые в статье, следующие.

Для каких  $p$  и  $q$  оператор  $T_t$  отображает  $L_p = L_p(R^n)$  в  $L_q = L_q(R^n)$ ? Как для этих  $p$  и  $q$  операторная норма  $\|T_t\|$  зависит от  $t$ ?

На эти вопросы отвечают следующие две теоремы.

**Теорема А.** Пусть  $1 \leq p, q \leq \infty$ . Тогда  $T_1$  является ограниченным оператором из  $L_p$  в  $L_q$ , если и только если точки  $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$  принадлежит замкнутому треугольнику  $\Gamma$  с вершинами  $P_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right)$ ,  $P_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n-1}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n-1}\right)$ ,  $P_3 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n-1}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n-1}\right)$ . В случае  $n=1$  или  $n=2$  следует считать  $P_2 = (0, 0)$ ,  $P_1 = (1, 0)$ ,  $P_3 = (1, 1)$ .

Для оценок операторной нормы вводятся также точки

$$P_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad P_4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right), \quad P_5 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right), \\ P_6 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right).$$

Если  $n=1$ , то  $P_4 = \left(\frac{3}{4}, 0\right)$ ,  $P_5 = \left(1, \frac{1}{4}\right)$ .

**Теорема В.** Пусть  $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in \Gamma$  и  $\|T_t\|$  обозначает операторную норму из  $L_p$  в  $L_q$ . Тогда существуют такие положительные постоянные  $c_1, c_2$ , что

$$c_1 t^a \leq \|T_t\| \leq c_2 t^a, \quad \text{если } t \geq 1, \quad (3)$$

и  $a$  — кусочно-линейная функция от  $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$

$$a = \frac{n-2}{q} - n \left(1 - \frac{1}{p}\right) \text{ в треугольнике } P_1 P_5 P_6,$$

$$a = -\frac{n}{q} + (n-2) \left(1 - \frac{1}{p}\right) \text{ в треугольнике } P_1 P_4 P_6,$$

$$a = -\frac{n}{2} + \frac{n}{q} \text{ в четырехугольнике } P_0 P_3 P_5 P_6,$$

$$a = \frac{n}{2} - \frac{n}{p} \text{ в четырехугольнике } P_0 P_2 P_4 P_6.$$

Если  $0 < t < 1$ , то с некоторыми положительными постоянными  $c_3$  и  $c_4$

$$c_3 t^b \leq \|T_t\| \leq c_4 t^b,$$

где  $b = 1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q}$ .

Оператор  $T_t$  можно представить как оператор свертки с ядром

$$K_t(|x|) = F_{\xi \rightarrow x}^{-1} \frac{\sin t \sqrt{1 + |\xi|^2}}{\sqrt{1 + |\xi|^2}},$$

где  $F_{\xi \rightarrow x}^{-1}$  — оператор обратного преобразования Фурье,  $\xi$  — переменная, двойственная  $x$ ,  $|x|$ ,  $|\xi|$  имеют обычный смысл. Полагая для краткости

$r = |\xi|$ ,  $R = 2\pi|x|$ ,  $r_1 = \sqrt{1+r^2}$ , представим  $K_t(|x|)$  в виде

$$K_t(|x|) = R^{1-n/2} \int_0^\infty r_1^{-1} \sin tr_1 \mathcal{J}_{n/2-1}(Rr) r^{n/2} dr, \quad (4)$$

где  $\mathcal{J}_{n/2-1}$  — бesselова функция первого рода порядка  $n/2-1$ , а интеграл (4) следует понимать формально (как обобщенную функцию).

Доказательство теорем А и В проводится с использованием теорем Стейна — Фейффермана об интерполяционных свойствах аналитических семейств операторов, а также о свойствах пространств  $H^1$  и  $BMO$  [2]. Более подробно об этом см. [1, 3]. В итоге задача сводится к установлению оценок ядра

$$K_t^\alpha(|x|) = R^{1-n/2} \int_0^\infty r_1^{-(\alpha + \frac{n-1}{2})} \sin tr_1 \mathcal{J}_{n/2-1}(Rr) r^{n/2} dr \quad (5)$$

и

$$\tilde{K}_t^\alpha(|x|) = R^{1-n/2} \int_0^\infty r_1^{-(\alpha+1)} \sin tr_1 \mathcal{J}_{n/2-1}(Rr) r^{n/2} \varphi\left(\frac{r}{t}\right) dr, \quad (6)$$

где  $\varphi \in C^\infty[0, \infty)$ ,  $\varphi(s) \equiv 1$  при  $0 \leq s \leq 1/2$ ,  $\varphi \equiv 0$  при  $s > 1$ , в форме

$$\|K_t^{3/2}(|x|)\|_{L_\infty} \leq ct^{-n/2}, \quad t > 1, \quad (7)$$

$$\|K_t^1(|x|)\|_{BMO} \leq ct^{-(n-1)/2}, \quad t > 1, \quad (8)$$

и

$$\|\tilde{K}_t^{\frac{n-3}{2}}(|x|)\|_{L_1} \leq ct^{n/2}, \quad t > 1, \quad (9)$$

где  $\|\cdot\|_{L_\infty}$ ,  $\|\cdot\|_{L_1}$  — обычные  $\sup$ - и  $L_1$ -нормы, а  $\|\cdot\|_{BMO}$  — норма в пространстве  $BMO$  (см., например, [4]).

К сожалению, в доказательствах оценки (7) в случае четного  $n$  и оценки (9) в работе [1] имеются существенные пробелы. Настоящая статья посвящена их восполнению.

В п. 1 доказывается неравенства (7) в случае четного  $n$ , а в п. 2 — неравенство (9), развивая и дополняя методы, использованные в [1].

1. Оценка ядра  $K_t^{3/2}$  в  $L_\infty$ -норме в случае четного  $n$ . С точностью до множителя, зависящего только от  $n$ ,

$$K_t^{3/2}(R) = R^{1-n/2} \int_0^\infty r_1^{-\frac{n+2}{2}} \sin tr_1 \mathcal{J}_{n/2-1}(Rr) r^{n/2} dr. \quad (10)$$

Интегрируя здесь по частям  $\frac{n-2}{2}$  раз, получаем

$$K_t^{3/2}(R) = \frac{R^{2-n}}{t^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^\infty \sin\left(tr_1 - \frac{(n-2)\pi}{2}\right) \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} c_j R^{2i} r_1^{-n+2i} \tilde{\mathcal{J}}_{n/2-1-i}(Rr) r dr,$$

где  $c_j$  — постоянные, не зависящие от  $t$ , а  $\tilde{\mathcal{J}}_{n/2-1-i}(z) = z^{n/2-1-i} \mathcal{J}_{n/2-1-i}(z)$ . Главным в этой сумме будет член

$$t^{-\frac{n}{2}+1} \int_0^\infty \sin\left(tr_1 - \frac{(n-2)\pi}{2}\right) r_1^{-2} \mathcal{J}_0(Rr) r dr,$$

отвечающий значению  $j = n/2-1$ , остальные имеют лучшее поведение по  $t$  и здесь не рассматриваются.

Оценка (7) будет доказана, если мы покажем, что

$$\sup_{0 \leq R < \infty} \left| \int_0^\infty \sin\left(tr_1 - \frac{(n-2)\pi}{2}\right) r_1^{-2} \mathcal{J}_0(Rr) r dr \right| \leq ct^{-1}. \quad (11)$$

Представим  $I = \int_0^{\infty} \sin\left(tr_1 - \frac{(n-2)\pi}{2}\right) r_1^{-2} \mathcal{J}_0(Rr) r dr$  в виде

$$I = I_1 + I_2 = \int_0^t \sin\left(tr_1 - k \frac{\pi}{2}\right) r_1^{-2} \mathcal{J}_0(Rr) r dr + \int_t^{\infty} \sin\left(tr_1 - k \frac{\pi}{2}\right) \times \\ \times r_1^{-2} \mathcal{J}_0(Rr) r dr.$$

Сначала оценим  $I_2$ . Если  $R > t^{-1/3}$ , то  $Rr > t^{2/3} > 1$  и для  $\mathcal{J}_0(Rr)$  можно использовать известное [5] асимптотическое разложение. Имеем

$$I_2 = I_{21} + I_{22} = R^{-1/2} \int_t^{\infty} \sin\left(tr_1 - k \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(Rr - \frac{\pi}{4}\right) r_1^{-2} r^{1/2} dr + \\ + \int_t^{\infty} \sin\left(tr_1 - k \frac{\pi}{2}\right) r_1^{-2} O(R^{-3/2} r^{-1/2}) dr.$$

Поэтому  $|I_{22}| \leq ct^{-1}$ . Полагая  $h_{\pm}(r, R, t) = tr_1 \pm Rr$ , представляем  $I_{21}$  в виде суммы четырех слагаемых вида

$$I_{21}^{\pm} = R^{-1/2} \int_t^{\infty} e^{ih_{\pm} r_1^{-2} r^{1/2}} dr. \quad (12)$$

Пусть дополнительно  $R < t/2 \sqrt{2}$ . Тогда  $|h_{\pm}'| \geq t/2 \sqrt{2}$ . Полагая  $H_{\pm}(r, t) = \int_t^r e^{ih_{\pm}(\rho, R, t)} d\rho$ , интегрируя в (12) по частям, и используя для оценки  $H_{\pm}$  лемму ван дер Корпута [6], в силу которой

$$|H_{\pm}(r, R, t)| \leq ct^{-1},$$

получаем  $|I_{21}^{\pm}| \leq ct^{-7/2}$ . Эта оценка верна для  $I_{21}^{\pm}$  при условии, что  $R > t^{-1/3}$ , а для  $I_{21}^-$  — при  $t^{-1/3} < R < t/2 \sqrt{2}$ . Если  $R > t/2 \sqrt{2}$ , то

$$|I_{21}^-| \leq cR^{-1/2} \int_t^{\infty} r^{-3/2} dr \leq c_1 t^{-1},$$

значит,  $|I_2| \leq ct^{-1}$  при  $R > t^{-1/3}$ . Пусть теперь  $R \leq t^{-1/3}$ . После интегрирования по частям представляем  $I_2$  в виде  $I_2 = I_{21} + I_{22} + I_{23}$ , где, как нетрудно видеть,  $|I_{21} + I_{22}| = O(t^{-2})$ , а

$$I_{23} = t^{-1} R \int_t^{\infty} \cos\left(tr_1 - k \frac{\pi}{2}\right) r_1^{-1} \mathcal{J}_1(Rr) dr = t^{-1} R \int_t^{1/R} \cos\left(tr_1 - k \frac{\pi}{2}\right) \times \\ \times r_1^{-1} \mathcal{J}_1(Rr) dr + t^{-1} R \int_{1/R}^{\infty} \cos\left(tr_1 - k \frac{\pi}{2}\right) r_1^{-1} \mathcal{J}_1(Rr) dr = I_{231} + I_{232}.$$

Поскольку при  $Rr < 1$   $|J_1(Rr)| < cRr$ , то

$$|I_{231}| \leq ct^{-1} R^2 \int_t^{1/R} \frac{r}{r_1} dr \leq ct^{-1} R^2 \int_0^{1/R} dr_1 \leq ct^{-1} R \sqrt{1+R^2} \leq c_1 t^{-1},$$

ибо  $R < t^{-1/3} < 1$ . При оценке  $I_{232}$  используем асимптотическое разложение при  $Rr > 1$  [5]:

$$\mathcal{J}_1(Rr) = (Rr)^{-1/2} \cos\left(Rr - \frac{3}{4}\pi\right) + O(R^{-3/2} r^{-3/2}),$$

откуда следует  $|I_{232}| \leq ct^{-1}$ . В итоге  $I_2 \leq ct^{-1}$  при  $0 < R < \infty$ .  $I_1$  оценивается по-разному, в зависимости от соотношения между  $R$  и  $t$ .

Если  $R < 1/t$ , то в выражении для  $I_1$  интегрируем по частям; используя тот факт, что  $Rt < 1$ ,  $|\mathcal{J}_0(Rr)| \leq 1$ ,  $|\mathcal{J}_1(Rr)| \leq c_1$ , получаем  $|I_1| \leq ct^{-1}$ . Пусть  $R > 1/t$ .

Представим  $I_1$  по схеме  $I_1 = \int_0^{1/R} + \int_{1/R}^t = I_{11} + I_{12}$ . Тогда  $I_{11}$  оценивается так же, как и  $I_1$  в случае  $R < 1/t$ , и мы получаем  $|I_{11}| \leq ct^{-1}$ . В выражении для  $I_{12}$  воспользуемся асимптотическим представлением для  $\mathcal{J}_0(Rr)$ , тогда

$$I_{12} = R^{-1/2} \int_{1/R}^t \sin\left(tr_1 - k \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(Rr - \frac{\pi}{4}\right) r_1^{-2} r^{1/2} dr + R^{-3/2} \int_{1/R}^t \sin\left(tr_1 - k \frac{\pi}{2}\right) \times \\ \times r_1^{-2} O(r^{-1/2}) dr = I_{121} + I_{122}.$$

Дополнительно предположим, что  $R > (3/2)t$ . Тогда

$$|I_{122}| \leq cR^{-3/2} \int_{1/R}^t \frac{dr}{\sqrt{r}(1+r^2)} \leq cR^{-3/2} \int_0^\infty \frac{dr}{\sqrt{r}(1+r^2)} \leq ct^{-3/2}.$$

Слагаемое  $I_{121}$  представимо в виде суммы четырех слагаемых вида

$$I_{121}^\pm = R^{-1/2} \int_{1/R}^t e^{ih_\pm(r, R, t)} r_1^{-2} r^{1/2} dr \quad (13)$$

и их сопряженных с постоянными коэффициентами. Они легко оцениваются с помощью интегрирования по частям и леммы ван дер Корпута, как и выше, поскольку при  $R > 3/2t$   $|h_\pm| \geq t/2$ . Отсюда вытекает оценка  $|I_{121}| \leq ct^{-1}$ .

Пусть  $1/t < R < (3/2)t$ . Интегрируя выражение для  $I_{12}$  по частям, получаем

$$I_{12} = -t^{-1} \cos\left(tr_1 - k \frac{\pi}{2}\right) r_1^{-1} \mathcal{J}_0(Rr) \Big|_{1/R}^t + t^{-1} \int_{1/R}^t \cos\left(tr_1 - k \frac{\pi}{2}\right) \times \\ \times r_1^{-3} r \mathcal{J}_0(Rr) dr + t^{-1} R \int_{1/R}^t \cos\left(tr_1 - k \frac{\pi}{2}\right) r_1^{-1} \mathcal{J}_1(Rr) dr.$$

Поскольку  $|r_1^{-1} \mathcal{J}_0(Rr)| \leq 1$ , то первое слагаемое суть  $O(t^{-1})$ ,

$$t^{-1} \left| \int_{1/R}^t \cos\left(tr_1 - k \frac{\pi}{2}\right) r_1^{-3} r \mathcal{J}_0(Rr) dr \right| \leq t^{-1} \int_{1/R}^t r_1^{-3} r dr \leq \\ \leq \frac{1}{2} t^{-1} \int_0^\infty \frac{ds}{(1+s)^{3/2}} = ct^{-1}.$$

В последнем слагаемом используем для  $\mathcal{J}_1(Rr)$  асимптотическое разложение, тогда имеем

$$I_{122} = t^{-1} R \int_{1/R}^t \cos\left(tr_1 - k \frac{\pi}{2}\right) r_1^{-1} \mathcal{J}_1(Rr) dr = t^{-1} R^{1/2} \int_{1/R}^t \cos\left(tr_1 - k \frac{\pi}{2}\right) \times \\ \times \cos\left(Rr - \frac{3}{4}\pi\right) r_1^{-1} r^{-1/2} dr + t^{-1} R^{-1/2} \int_{1/R}^t \cos\left(tr_1 - k \frac{\pi}{2}\right) r_1^{-1} O(r^{-3/2}) dr = \\ = I_{1231} + I_{1232}.$$

При этом  $|I_{1232}| \leq ct^{-1} R^{-1/2} \int_{1/R}^t r_1^{-1} r^{-3/2} dr \leq ct^{-1} R^{-1/2} \int_{1/R}^\infty r^{-3/2} dr = c_1 t^{-1}$ .

Как и ранее, слагаемое  $I_{1231}$  представляется как сумма слагаемых вида

$$I_{1231}^{\pm} = t^{-1} R^{1/2} \int_{1/R}^t e^{ih_{\pm}(r, R, t)} r_1^{-1} r^{-1/2} dr.$$

Обозначая  $H_{+}(r, R, t) = \int_{1/R}^r e^{ih_{+}(\rho, R, t)} d\rho$  и интегрируя по частям, получаем оценку  $|I_{1231}^{\pm}| \leq ct^{-1}$ , потому что  $|H_{+}(r, R, t)| \leq cR^{-1}$  и  $R/t < 3/2$ .

В случае  $I_{1231}^{-}$  фазовая функция  $h_{-} = tr_1 - Rr$  имеет стационарную точку, т. е.  $h'_{-}(r_0) = 0$ , при  $r_0 \in [1/R, t]$ . Чтобы получить нужную оценку, предположим, что  $R > 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} I_{1231}^{-} &= t^{-1} R^{1/2} \int_{1/R}^t e^{ih_{-}(r, R, t)} r_1^{-1} r^{-1/2} dr + t^{-1} R^{1/2} \int_1^t e^{ih_{-}(r, R, t)} r_1^{-1} r^{-1/2} dr = \\ &= I_{12311}^{-} + I_{12312}^{-}. \end{aligned}$$

Оценим сначала  $I_{12312}^{-}$ , для этого будем считать, что  $1 < r_0/2 < 2r_0 < t$  (это наиболее трудный случай); используем здесь прием, примененный в [1] в аналогичной ситуации в случае нечетного  $n$ .

Представим  $I_{12312}^{-} = I_{123121}^{-} + I_{123122}^{-} + I_{123123}^{-}$  соответственно разбиению  $\int_1^t = \int_1^{r_0/2} + \int_{r_0/2}^{2r_0} + \int_{2r_0}^t$ .

Полагая  $H_{-}(r, R, t) = \int_{r_0/2}^r e^{ih_{-}(\rho, R, t)} d\rho$  и замечая, что  $h'_{-}(\rho, R, t) = tr_1^{-3}(\rho) \geq tr_1^{-3}(r)$ , а значит,  $|H_{-}(r, R, t)| \leq ct^{-1/2} r^{3/2}(r)$ , имеем

$$\begin{aligned} I_{123122}^{-} &= t^{-1} R^{1/2} \int_{r_0/2}^{2r_0} \frac{dH_{-}}{dr} r_1^{-1} r^{-1/2} dr = t^{-1} R^{1/2} H_{-}(2r_0, R, t) r_1^{-1}(2r_0) (2r_0)^{-1/2} + \\ &+ t^{-1} R^{1/2} \int_{r_0/2}^{2r_0} H_{-}(r, R, t) r_1^{-3} r^{1/2} dr + \frac{1}{2} t^{-1} R^{1/2} \int_{r_0/2}^{2r_0} H_{-}(r, R, t) r_1^{-1} r^{-3/2} dr. \quad (14) \end{aligned}$$

Поскольку  $R^{1/2} t^{-1/2} \leq c$ , а также в силу оценки  $|H_{-}|$  видим, что первое слагаемое в (14) есть  $O(t^{-1})$ .

Из тех же соображений имеем

$$\begin{aligned} \left| t^{-1} R^{1/2} \int_{r_0/2}^{2r_0} H_{-}(r, R, t) r_1^{-3} r^{1/2} dr \right| &\leq ct^{-1} R^{1/2} t^{-1/2} \int_{r_0/2}^{2r_0} r_1^{3/2} r_1^{-3} r^{1/2} dr \leq \\ &\leq ct^{-1} \int_{r_0/2}^{2r_0} r^{-1} dr = c \ln 4t^{-1}. \end{aligned}$$

Аналогично оценивается третье слагаемое в (14), следовательно,  $|I_{123122}^{-}| \leq ct^{-1}$ . Для оценки  $I_{123121}^{-}$  заметим, что  $h'_{-} < 0$  на  $[1, r_0)$ , значит, если  $r < r_0/2$ , то  $2r < r_0$ , и  $h'_{-}(2r) < 0$ . В итоге,

$$|h'_{-}(r, R, t)| = -h'_{-}(r, R, t) \geq h'_{-}(2r, R, t) - h'_{-}(r, R, t) = rh'_{-}((1+\theta)r, R, t)$$

и, так как  $h'_{-}(r, R, t) = tr_1^{-3}(r)$  монотонно убывает, то  $|h'_{-}(r, R, t)| \geq tr_1^{-3}(2r)$ . Отсюда и из леммы ван дер Корпута получаем, как и выше, оценку  $|I_{123121}^{-}| \leq ct^{-1}$ . Аналогичные соображения приводят к неравенству  $|I_{123123}^{-}| \leq ct^{-1}$ . Заметим теперь, что если  $R < 1$ , то к оценке  $I_{1231}^{-}$  применим тот же подход, что и к оценке  $I_{12312}^{-}$ , и потому если  $R < 1$ , то имеем неравенство  $|I_{1231}^{-}| \leq ct^{-1}$ .

Осталось оценить  $|I_{21311}|$  при  $R > 1$ . Полагая  $\lambda = R/t$ , видим, что стационарная точка фазы  $h_{-}r_0 = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}$ , и если  $\lambda > \frac{1,1}{\sqrt{2}}$ , то  $r_0 > 1$ , значит, при  $\frac{1,1}{\sqrt{2}}t < R < (3/2)t$  без труда получаем нужную оценку для  $|I_{12311}|$ .

Поэтому считаем, что  $\lambda < \frac{1,1}{\sqrt{2}}$ , так что  $1/R < r_0 < 1$ . Пусть, как и выше, выполнено более сильное условие  $1/R < r_0/2 < 2r_0 < 1$ . Снова представим  $I_{12311}$  по схеме  $\int_{1/R}^{r_0/2} + \int_{r_0/2}^{2r_0} + \int_{2r_0}^1$ , тогда  $I_{12311} = I_{123111} + I_{123112} + I_{123113}$ .

Положим  $H_{-}(r, R, t) = \int_{r_0/2}^r e^{ih_{-}(\rho, R, t)} d\rho$ ,  $r_0/2 \leq r \leq 2r_0$ . По лемме ван дер Корпута  $|H_{-}| \leq ct^{-1/2}r_1^{3/2}(r)$ . Учитывая, что  $r_0 \geq \lambda$ , а значит,  $r_0^{-1/2} \leq \lambda^{-1/2} = R^{-1/2}t^{1/2}$ , и интегрируя по частям в выражении

$$I_{123112} = t^{-1}R^{1/2} \int_{r_0/2}^{2r_0} \frac{dH_{-}}{dr} r_1^{-1}r^{-1/2}dr,$$

получим оценку  $|I_{123112}| \leq ct^{-1}$ .

Покажем, что  $|I_{123111}| + |I_{123113}| \leq ct^{-1}$ . С этой целью рассмотрим соотношения

$$H_{1-}(r, R, t) = \int_{1/R}^r e^{-ih_{-}(\rho, R, t)} \rho^{-1/2}d\rho, \quad \frac{1}{R} \leq r \leq \frac{r_0}{2},$$

$$H_{2-}(r, R, t) = \int_{2r_0}^r e^{ih_{-}(\rho, R, t)} \rho^{-1/2}d\rho, \quad 2r_0 \leq r \leq 1.$$

Покажем, что с некоторыми постоянными  $c_1, c_2$  верны оценки

$$|H_{1-}(r, R, t)| \leq c_1 R^{-1/2}, \quad |H_{2-}(r, R, t)| \leq c_2 R^{-1/2}. \quad (15)$$

Установим первую из них. При  $1/R < \rho < r \leq r_0/2$  функция  $h_{-} = t\left(\frac{\rho}{r_1(\rho)} - \lambda\right) = t(v(\rho) - \lambda) \neq 0$  и поэтому имеем

$$\begin{aligned} H_{1-}(r, R, t) &= \frac{1}{it} \int_{1/R}^r \frac{d}{d\rho} e^{i(tr_1 - R\rho)} \frac{\rho^{-1/2}d\rho}{v(\rho) - \lambda} = \frac{1}{it} \frac{r^{-1/2}}{v(r) - \lambda} e^{i(tr_1 - Rr)} - \\ &- \frac{1}{it} \frac{R^{1/2}}{v(1/R) - \lambda} e^{i(tr_1(1/R) - 1)} - \frac{1}{it} \int_{1/R}^r e^{i(tr_1 - R\rho)} \frac{d}{d\rho} \frac{\rho^{-1/2}}{(v(\rho) - \lambda)} d\rho = B_1 + \\ &+ B_2 + B_3. \end{aligned}$$

Очевидно,  $|B_2| \leq \frac{R^{1/2}}{t|v(1/R) - \lambda|}$ . Поскольку  $\lambda = v(r_0)$ ,  $1/R < r_0/2 < r_0$ , то  $|v(1/R) - \lambda| = |v(1/R) - v(r_0)| = \left|\frac{1}{R} - r_0\right| |v'(\theta)|$ , где  $1/R \leq \theta \leq r_0$ . Но так как  $v'(\rho) = r_1^{-3}(\rho)$  — монотонно убывающая функция, то  $v'(\rho) \geq r_1^{-3}(1) = 2^{-3/2} = \delta$ , значит,  $|v(1/R) - \lambda| \geq \delta |1/R - r_0| \geq \frac{\delta}{2} r_0$ . С другой стороны,  $r_0 = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}$ , и так как  $\lambda < \frac{1,1}{\sqrt{2}}$ , то  $r_0 \geq \delta_1 \lambda = \delta_1 R/t$ .

Отсюда следует  $|B_2| \leq \frac{2R^{1/2}t}{t\delta\delta_1 R} = c_1 R^{-1/2}$ . Далее,  $|B_1| \leq \frac{r^{-1/2}}{t|v(r) - \lambda|} = \frac{r^{-1/2}}{t|v(r) - v(r_0)|} \leq \frac{r^{-1/2}}{t|r - r_0|v'(r)} \leq \frac{r^{-1/2}}{t|r - r_0|\delta}$ . Поскольку  $\frac{1}{R} < r < \frac{r_0}{2}$ , то  $|r - r_0| \geq \frac{r_0}{2} \geq \frac{\delta_1}{2} \frac{R}{t}$ . Отсюда и из предыдущей оценки для  $|B_1|$  получаем  $|B_1| \leq c_2 R^{-1/2}$ .

Оценим  $|B_3|$ :

$$|B_3| \leq \frac{1}{t} \int_{1/R}^r \left| \frac{d}{d\rho} \frac{\rho^{-1/2}}{(v(\rho) - \lambda)} \right| d\rho \leq \frac{1}{t} \int_{1/R}^r \frac{v'(\rho) \rho^{-1/2}}{(v(\rho) - \lambda)^2} d\rho + \frac{1}{2t} \int_{1/R}^r \frac{\rho^{-3/2} d\rho}{\lambda - v(\rho)} = D_1 + D_2.$$

Поскольку  $1/R < \rho < 1$ , то  $\delta = 2^{-3/2} \leq v'(\rho) \leq 1$ ; учитывая снова, что  $\lambda = v(r_0)$ , получаем  $|v(\rho) - \lambda| = v(r_0) - v(\rho) = (r_0 - \rho)v'(\theta) \geq \delta(r_0 - \rho)$ ,  $\rho^{-1/2} < R^{1/2}$ , тогда

$$D_1 \leq \frac{R^{1/2}}{\delta^2 t} \int_{1/R}^r \frac{d\rho}{(r_0 - \rho)^2} \leq \frac{R^{1/2}}{\delta^2 t (r_0 - r)} + \frac{R^{1/2}}{\delta^2 t (r_0 - 1/R)} \leq \frac{4R^{1/2}}{\delta^2 t r_0} \leq \leq \frac{4R^{1/2}t}{\delta_1 \delta^2 t R} = \frac{4}{\delta_1 \delta^2} R^{-1/2}.$$

Далее имеем

$$D_2 = \frac{1}{2t} \int_{1/R}^r \frac{\rho^{-3/2} d\rho}{v(r_0) - v(\rho)} \leq \frac{1}{2\delta t} \int_{1/R}^r \frac{\rho^{-3/2} d\rho}{r_0 - \rho} \leq \frac{1}{2\delta t (r_0 - r)} \int_{1/R}^r \rho^{-3/2} d\rho \leq \leq \frac{2}{\delta t r_0} (r^{-1/2} + R^{1/2}) \leq \frac{4R^{1/2}t}{\delta t \delta_1 t R} = \frac{4}{\delta \delta_1} R^{-1/2}.$$

Поэтому  $|B_3| \leq c_3 R^{-1/2}$ , и  $|H_{1-}(r, R, t)| \leq c_1 R^{-1/2}$ .

Аналогично доказывается вторая из оценок (15).

Запишем соотношение

$$\Gamma_{123111}^- = t^{-1} R^{1/2} \int_{1/R}^{r_0/2} e^{ih_-(r, R, t)} r_1^{-1} r^{-1/2} dr = t^{-1} R^{1/2} \int_{1/R}^{r_0/2} \frac{dH_{1-}(r, R, t)}{dr} r_1^{-1} dr,$$

интегрируя здесь по частям и учитывая первую из оценок (15), получаем оценку  $|\Gamma_{123111}^-| \leq ct^{-1}$ . Подобным образом доказывается, что  $|\Gamma_{123113}^-| \leq \leq ct^{-1}$ . Неравенство (7) следует теперь из полученных оценок.

2. Доказательство оценки (9). Напомним, что

$$\tilde{K}_t^{\frac{n-3}{2}}(R) = K(R) = R^{-(n/2-1)} \int_0^1 r_1^{-\frac{(n-1)}{2}} \sin tr_1 \mathcal{E}_{n/2-1}(Rr) \varphi\left(\frac{r}{t}\right) dr, \quad (16)$$

а  $\varphi(s) \in C^\infty[0, \infty)$ ,  $\varphi(s) \equiv 1$  при  $0 \leq s \leq 1/2$ ,  $\varphi(s) \equiv 0$  при  $s > 1$  и  $0 \leq \leq \varphi(s) \leq 1$ .

Покажем, что

$$\int_0^\infty |K(R)| R^{n-1} dR \leq ct^{n/2}.$$

Рассматривается случай  $n \geq 4$ , поскольку при  $n \leq 3$  оценка решения

уравнения Клейна — Гордона в  $L_p$ -метрике получается из явного представления решения. Из интегрального представления для  $\mathcal{J}_{n/2-1}$  следует, что  $K(R)$  не имеет особенностей при конечных  $R$ . Удобно рассматривать отдельно случаи: а)  $0 \leq R \leq t$ ; б)  $t \leq R \leq 2t$ ; в)  $2t \leq R < \infty$ . В случае а) используем тот факт, что  $\sin tr_1 = -\frac{d}{dr}(\cos tr_1) \frac{r_1}{lr}$  и интегрируем по частям в формуле (16). Если  $0 \leq R \leq 1$ , то легко доказать, что

$$\int_0^1 |K(R)| R^{n-1} dR \leq ct^{1/2}.$$

Если  $1 < R < t$ , то используется асимптотическое представление для бесселевых функций, что приводит, как и в п. 1, к оценке интегралов вида

$$K^\pm(R) = t^{-1} R^{-\frac{(n-3)}{2}} \int_0^t e^{ih_\pm(r,R,t)} \left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{n-3}{2}} \varphi\left(\frac{r}{t}\right) dr.$$

При этом для ядра  $K^+(R)$  получается оценка

$$\int_1^t |K^+(R)| R^{n-1} dR \leq ct^{n/2-1/2} \ln t,$$

что следует из леммы ван дер Корпута, поскольку  $|h'_+| \geq R$ . В случае ядра  $K^-$  этот подход неприменим, ибо  $h'$  обращается в 0 на интервале  $[0, t]$ .

Использование второй части леммы ван дер Корпута также затруднительно, так как в появляющуюся при этом оценку  $|H_-(r, R, t)| \leq ct^{-1/2} r_1^{3/2}(r)$  входит растущий при больших  $t$  множитель  $r_1^{3/2}(r)$ , который не может быть скомпенсирован за счет  $\left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{n-3}{2}}$ . Поэтому применяется другой способ, идея которого была высказана авторами в работе [1], однако, в ее реализации допущена ошибка.

Обозначим

$$I^- = I^-(R, t) = \int_0^t e^{ih_-(r,R,t)} \left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{n-3}{2}} \varphi\left(\frac{r}{t}\right) dr,$$

значит,  $t^{-1} R^{-\frac{(n-3)}{2}} I^- = K^-(R)$ .

Мы хотим доказать, что  $\int_1^t |K^-(R)| R^{n-1} dR \leq ct^{n/2}$ , т. е. что  $\int_1^t R^{n/2+1/2} \times |I^-| dR \leq ct^{n/2+1}$ . Обозначим  $\mathcal{J}(R, t) = \int_1^R |I^-(\rho, t)| d\rho$ . Тогда

$$\int_1^t R^{n/2+1/2} |I^-| dR = \mathcal{J}(t, t) t^{n/2+1/2} - \frac{n+1}{2} \int_1^t \mathcal{J}(R, t) R^{n/2-1/2} dR \leq \leq 2\mathcal{J}(t, t) t^{n/2+1/2},$$

ибо  $\mathcal{J}(R, t) \leq \mathcal{J}(t, t)$ . Поэтому достаточно установить оценку

$$\mathcal{J}(t, t) \leq ct^{1/2}. \quad (17)$$

При этом достаточно считать, что

$$I^- = \int_1^t e^{ih_-(r,R,t)} \left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{n-3}{2}} \varphi\left(\frac{r}{t}\right) dr.$$

Здесь можно  $r/r_1$  заменить асимптотическим разложением  $r/r_1 = 1 + \theta(r^{-2})$ , при этом

$$I^- = I_1^- + I_2^- = \int_1^t e^{ih_-(r,R,t)} \varphi\left(\frac{r}{t}\right) dr + \int_1^t e^{ih_-(r,R,t)} \theta(r^{-2}) \varphi\left(\frac{r}{t}\right) dr.$$

Для слагаемого  $I_2^-$  нужная оценка получается интегрированием по частям и использованием второй части леммы ван дер Корпута. Оценим  $I_1^-$ :

$$I_1^- = \int_1^{r_0/2} e^{ih_-(r,R,t)} \varphi\left(\frac{r}{t}\right) dr + \int_{r_0/2}^{2r_0} e^{ih_-(r,R,t)} \varphi\left(\frac{r}{t}\right) dr + \int_{2r_0}^t e^{ih_-(r,R,t)} \varphi\left(\frac{r}{t}\right) dr = \\ = I_{11}^- + I_{12}^- + I_{13}^-,$$

где  $r_0$  — пень функции  $h'$  на  $[1, t]$ . При этом рассмотрим наиболее трудный случай  $1 < r_0/2 < 2r_0 < t$ . Случай  $r_0 \notin [1, t]$  обсудим ниже.

Пусть  $H_{1-} = \int_1^r e^{ih_-(\rho,R,t)} d\rho$ ,  $1 \leq r \leq r_0/2$ . Так как  $\varphi$  вещественна, можно считать, что  $h'_-(\rho, R, t) = t(\lambda - v(\rho))$ ,  $v(\rho) = \rho/r_1(\rho)$  монотонно возрастает, и потому  $|h'_-(\rho, R, t)| \geq t(\lambda - v(\rho)) > 0$ ,  $1 \leq \rho \leq r < \frac{r_0}{2}$ .

Из первой части леммы ван дер Корпута следует

$$|H_{1-}(r, R, t)| \leq \frac{2}{R - tv(r)}. \quad (18)$$

Интегрируя по частям в выражении

$$I_{11}^-\left(\frac{r_0}{2}, R, t\right) = \int_1^{r_0/2} \frac{dH_{1-}(r, R, t)}{dr} \varphi\left(\frac{r}{t}\right) dr$$

и используя (18), получаем  $\left|I_{11}^-\left(\frac{r_0}{2}, R, t\right)\right| \leq \frac{c}{t\left(v(r_0) - v\left(\frac{r_0}{2}\right)\right)}$ . Поскольку

ку  $v(r_0) - v\left(\frac{r_0}{2}\right) = \frac{r_0}{2} v'(\theta r_0)$ ,  $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ ,  $v'(r) = r^{-3}(r) \geq r_1^{-3}(1) = \delta$ , получаем

$$|I_{11}^-| \leq \frac{c_1}{tr_0} = \frac{c_1 \sqrt{1-\lambda^2}}{t\lambda} = \frac{c_1 \sqrt{1-\lambda^2}}{R},$$

откуда, поскольку  $\lambda = R/t \leq 1$ , имеем  $|I_{11}^-| \leq cR^{-1}$ .

С другой стороны, из определения  $I_{11}^-$  ясно, что  $|I_{11}^-| \leq ct$ . Из этих двух неравенств получаем

$$|I_{11}^-| \leq \frac{ct^{1/4}}{R^{3/4}}.$$

Отсюда следует

$$\int_1^t |I_{11}^-(R, t)| dR \leq ct^{1/4} \int_0^t \frac{dR}{R^{3/4}} = c_1 t^{1/2}.$$

Аналогично получается оценка  $\int_1^t |I_{13}^-| dR \leq c_1 t^{1/2}$ .

При оценке  $I_{12}^-$  мы считаем, что  $r_0$  велико, так как если  $r_0 \leq \text{const}$ , то  $I_{12}^-$  легко оценить с помощью второй части леммы ван дер Корпута. Эти соображения применимы при  $r_0 > 1$ . Имеем

$$I_{12}^- = \int_{r_0/2}^{2r_0} e^{i(tr_1 - Rr)} \varphi\left(\frac{r}{t}\right) dr = \frac{i}{R} \left[ e^{i(tr_1(2r_0) - 2Rr_0)} \varphi\left(\frac{2r_0}{t}\right) - \right. \\ \left. - e^{i\left(tr_1\left(\frac{r_0}{2}\right) - R\frac{r_0}{2}\right)} \varphi\left(\frac{r_0}{2t}\right) \right] + \frac{t}{R} \int_{r_0/2}^{2r_0} e^{i(tr_1 - Rr)} \frac{r}{r_1} \varphi\left(\frac{r}{t}\right) dr -$$

$$-\frac{t}{Rt} \int_{r_0/2}^{2r_0} e^{i(tr_1 - Rr)} \varphi' \left( \frac{r}{t} \right) dr = \frac{1}{R} \Phi_1(r_0, R, t) + \frac{t}{R} \int_{r_0/2}^{2r_0} e^{i(tr_1 - Rr)} \frac{r}{r_1} \varphi \left( \frac{r}{t} \right) dr + \frac{1}{Rt} \Phi_2(r, R, t). \quad (19)$$

Учитывая, что при больших  $r_0$   $\frac{r}{r_1} = 1 + O(r^{-2})$ , из (19) получаем

$$I_{12}^- = \frac{\Phi_1(r_0, R, t)}{R-t} + \frac{\Phi_2(r_0, R, t)}{t(R-t)} + \frac{t}{R-t} \Phi_3(r_0, R, t), \quad (20)$$

где  $\Phi_3 = \int_{r_0/2}^{2r_0} e^{i(tr_1 - Rr)} O(r^{-2}) \varphi \left( \frac{r}{t} \right) dr$ , а  $\left| \frac{\Phi_1}{R-t} + \frac{\Phi_2}{t(R-t)} \right| \leq \frac{c}{t-R}$ .

Оценивая  $\Phi_3$  с помощью второй части леммы ван дер Корпута, получаем

$$|\Phi_3| \leq ct^{-1/2} r_0^{-1/2}. \quad (21)$$

Ввиду того, что  $r_0 = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} r_0 \gg 1$  означает, что  $r_0 = O((1-\lambda)^{-1/2})$ ,

значит, из (21) следует  $|\Phi_3| \leq ct^{-1/2} (1-\lambda)^{1/4}$ .

Тогда  $\frac{t}{t-R} |\Phi_3| = \frac{1}{1-\lambda} |\Phi_3| \leq \frac{ct^{-1/2}}{(1-\lambda)^{3/4}}$  и

$$\int_1^t \frac{t}{t-R} |\Phi_3| dR \leq ct^{-1/2} \int_1^t \frac{dR}{(1-\lambda)^{3/4}} \leq ct^{1/2} \int_0^1 \frac{d\lambda}{(1-\lambda)^{3/4}} = c_1 t^{1/2}.$$

Заметим, что представление (20) получено при  $1 \ll r_0 < t$ , а поскольку  $r_0 = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}$ , то это означает, что  $R < \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}$ , т. е. (20) верно при

$$R < \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Поэтому

$$\int_1^t |I_{12}^-| dR = \int_1^{t^2/\sqrt{1+t^2}} |I_{12}^-| dR + \int_{t^2/\sqrt{1+t^2}}^t |I_{12}^-| dR = Q_1 + Q_2.$$

Из (20) и последующих оценок вытекает

$$Q_1 \leq c \int_1^{t^2/\sqrt{1+t^2}} \frac{dR}{t-R} + ct^{-1} \int_1^{t^2/\sqrt{1+t^2}} \frac{dR}{(1-\lambda)^{3/4}} \leq c_1 \ln \frac{t-1}{t-t^2/\sqrt{1+t^2}} + c_2 < ct^{1/2},$$

ибо  $t - t^2/\sqrt{1+t^2} = O(t^{-1})$  при больших  $t$ .

Поскольку справедливо тривиальное неравенство  $|I_{12}^-| \leq ct$ , то  $Q_2 \leq \leq tO(t^{-1}) = O(1) < ct^{1/2}$ .

Этим доказано, что  $\int_1^t |I_{12}^-| dR < ct^{1/2}$ , если  $0 \leq R \leq t$ . В случае  $t \leq \leq R \leq 2t$  замечаем, что

$$I_1^- = \int_1^t e^{i(tr_1 - Rr)} \varphi \left( \frac{r}{t} \right) dr = \int_1^t \frac{dH_-(r, R, t)}{dr} \varphi \left( \frac{r}{t} \right) dr,$$

где  $H_-(r, R, t) = \int_1^r e^{i(tr_1(\rho) - R\rho)} d\rho$ ,  $1 \leq r \leq t$ , а  $|h_-| = R - t \frac{\rho}{r_1(\rho)} \geq R - t \frac{r}{r_1} \geq R - t$ , значит,  $|H_-(r, R, t)| \leq \frac{c}{R-t}$  и  $|I_1|^{3/4} \leq \frac{c}{(R-t)^{3/4}}$ .

С другой стороны, очевидно,  $|I_1|^{1/4} \leq ct^{1/4}$ , поэтому  $|I_1| \leq \frac{ct^{1/4}}{(R-t)^{3/4}}$ , откуда следует

$$\int_t^{2t} |I_1| dR \leq ct^{1/2}. \quad (22)$$

Осталось рассмотреть случай в) и доказать, что

$$\int_{2t}^{\infty} |K(R)| R^{n-1} dR \leq ct^{n/2}. \quad (23)$$

Используя известное [5] соотношение

$$[r^s \mathcal{J}_s(r)]' = r^s \mathcal{J}_{s-1}(r),$$

записываем  $K(R)$  в виде

$$K(R) = R^{-n} \int_0^t \frac{d}{dr} [(Rr)^{n/2} \mathcal{J}_{n/2}(Rr)] r_1^{-\frac{(n-1)}{2}} \sin tr_1 \varphi\left(\frac{r}{t}\right) dr,$$

а затем интегрируем по частям; повторяя эту процедуру  $m$  раз, получаем

$$K(R) = K_m(R) + K_{m-1}(R) + \dots + K_0(R) + K_{-1}(R) + \dots + K_{-m}(R),$$

где

$$K_m(R) = t^m R^{-\left(\frac{n}{2}-1\right)-m} \int_0^t r^{\frac{n}{2}+m} \mathcal{J}_{n/2+m-1}(Rr) r_1^{-\frac{n-1}{2}-m} \sin\left(tr_1 - m \frac{\pi}{2}\right) \times \\ \times \varphi\left(\frac{r}{t}\right) dr,$$

$$K_{-m}(R) = t^{-m} R^{-(n/2-1)-m} \int_{1/2}^t r^{n/2+m} \mathcal{J}_{n/2+m-1}(Rr) r_1^{-m} \sin tr_1 \varphi^{(m)}\left(\frac{r}{t}\right) dr.$$

Промежуточные слагаемые имеют вид

$$K_{m-j}(R) = t^{m-j} R^{-(n/2-1)-m} \int_0^t r^{n/2+m} \mathcal{J}_{n/2+m-1}(Rr) d_{jm}(r) \sin\left(tr_1 - \delta_j \frac{\pi}{2}\right) dr,$$

где гладкие функции  $d_{jm}$  при  $r \rightarrow \infty$  суть  $O(r^{-n/2+1/2-m})$ .

Схема оценки этих слагаемых одинакова, поэтому рассмотрим только главный член  $K_m(R)$ .

В соответствии с разбиением  $\int_0^t = \int_0^{1/R} + \int_{1/R}^t$  мы получаем

$$K_m(R) = K_{m1}(R) + K_{m2}(R).$$

При оценке  $K_{m1}$  на промежутке интегрирования  $Rr < 1$ , и  $|\mathcal{J}_{n/2+m-1}(Rr)| \leq c(Rr)^{n/2+m-1}$ . С учетом этого получаем

$$|K_{m1}(R)| \leq ct^m R^{-n/2+1-m} \int_0^{1/R} r^{n/2+m-1} R^{n/2+m-1} dr = ct^m R^{-n-2m},$$

значит,

$$\int_{2t}^{\infty} |K_{m1}(R)| R^{n-1} dR \leq ct^m \int_{2t}^{\infty} R^{-2m-1} dR.$$

Последний интеграл сходится, если  $m \geq 1$ , причем

$$\int_{2t}^{\infty} |K_{m1}(R)| R^{n-1} dR \leq ct^{-m}.$$

При оценке  $K_{m2}(R)$  используется асимптотическое представление для  $\mathcal{F}_{n/2+m-1}(Rr)$ , значит, следует оценить интегралы вида

$$K_{m2}^{\pm} = t^m R^{-\frac{(n-1)}{2}-m} \int_{1/R}^t r^{\frac{n}{2}+m-\frac{1}{2}} r_1^{-\frac{(n-1)}{2}-m} e^{i(tr_1 \pm Rr)} \varphi\left(\frac{r}{t}\right) dr.$$

В этом случае  $|h'_{\pm}(\rho, R, t)| = \left| t \frac{\rho}{r_1(\rho)} \pm R \right| \geq \frac{R}{2}$ , ибо  $R \geq 2t$ , и необходимые оценки получаются, если применить первую часть леммы ван дер Корпута. В итоге имеем

$$\int_{2t}^{\infty} |K_{m2}(R)| R^{n-1} dR \leq ct^{n/2-1/2}.$$

Отсюда следует справедливость неравенства (9).

1. Marshall B., Straus W., Wainger S.  $L_p - L_q$  estimates for the Klein-Gordon equation // J. Math. pures et appl.— 1980.— 59, N 4. — P. 417—440.
2. Fefferman C., Stein E.  $H^p$ -spaces of several variables // Acta Math.— 1972.— 129. — P. 137—193.
3. Марковский А. И. Замечания об  $L_p - L_q$  оценках решений уравнения Клейна — Гордона. — Донецк, 1991. — 48 с. — (Препринт / АН Украины. Ин-т прикл. математики и механики; 91.03).
4. Гарнет Дж. Ограниченные аналитические функции. — М.: Мир, 1984. — 469 с.
5. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. — М.: Гостехтеоретиздат, 1953. — 369 с.
6. Зигмунд С. Тригонометрические ряды. — М.: Мир, 1968. — Т. 2. — 537

Получено 09.10.91

УДК 519.21

О. А. Сафонова, асп. (Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

## Об асимптотическом поведении интегральных функционалов от диффузионных процессов с периодическими коэффициентами

Доказана центральная предельная теорема для функционалов интегрального вида и с ее помощью установлена локальная асимптотическая нормальность логарифма отношения правдоподобия для диффузионных процессов с периодическими коэффициентами.

Доведена центральна гранична теорема для функціоналів інтегрального типу і з її допомогою встановлена локальна асимптотична нормальність логарифма відношення правдоподібності для дифузійних процесів з періодичними коефіцієнтами.

1. Введение. Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — полное вероятностное пространство,  $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$  — неубывающее семейство пополненных  $\sigma$ -подалгебр  $\mathcal{F}$ ,  $(w_t, \mathcal{F}_t; t \geq 0)$  — стандартный  $m$ -мерный винеровский процесс. В настоящей работе исследуется асимптотическое поведение при  $T \rightarrow \infty$  функционалов вида

$\int_0^T f(\xi_t) dt$ , где  $\xi_t$  — решение стохастического дифференциального уравнения Ито

$$d\xi_t = b(\xi_t) dt + \sigma(\xi_t) dw_t, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

© О. А. САФОНОВА, 1992