УДК 517. 5

А. И. Степанец, д-р физ.-мат. наук
А. С. Сердюк, асп. (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОЦЕНКИ СНИЗУ ПОПЕРЕЧНИКОВ КЛАССОВ СВЕРТОК ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В МЕТРИКАХ C И L

New sufficient conditions are given for the kernels introduced by A. K. Kushpel' to belong to the set $C_{y,2n}$. These conditions allow one to extend the set of kernels belonging to $C_{y,2n}$. By using these results, lower estimates of Kolmogorov widths are obtained for classes of convolutions with such kernels. It is shown that, in many important cases, these estimates are exact.

Наведено нові достатні умови належності ядер до множини $C_{y,2n}$, введеної О. К. Кушпелем. Ці умови дозволили розширити множину ядер, що належать до $C_{y,2n}$, на основі чого одержано оцінки знизу поперечників за Колмогоровим для класів згорток з такими ядрами. Показано, що для деяких важливих випадків ці оцінки є точними.

В настоящей работе находятся оценки снизу n-мерных поперечников по Колмогорову [1], т. е. величин

$$d_n(\mathfrak{N}, X) = \inf_{L_n \subset X} \sup_{v \in \mathfrak{N}} \inf_{\xi \in L_n} \| v - \xi \|_X,$$

в случае, когда X — либо пространство L 2π-периодических суммируемых функций $f(\cdot)$ с конечной нормой $\|f\|_1 = \int_0^{2\pi} |f(t)|\, dt$, либо подпространство C из L непрерывных функций с нормой $\|f\|_C = \max_t |f(t)|$; $\mathfrak{N}$ — классы функций, определяющиеся обобщенной (ψ, β)-производной, а L_n — подпространства из X размерности n.

Определение 1 (см., например, [2]). *Пусть $f \in L$ и*

$$s[f(x)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

— ее ряд Фурье. Пусть, далее, $\psi(k)$ — произвольная функция натурального аргумента и β — фиксированное действительное число. Предположим, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left[a_k \cos(kx + \beta\pi/2) + b_k \sin(kx + \beta\pi/2) \right] \tag{1}$$

является рядом Фурье некоторой функции из L. Эту функцию называют (ψ, β)-производной функции $f(\cdot)$ и обозначают через $f_\beta^\psi(\cdot)$. Множество функций $f(\cdot)$, удовлетворяющих такому условию, обозначим через L_β^ψ.

Ясно, что если ряд (1) является рядом Фурье некоторой функции φ, то этот ряд будет рядом Фурье и для любой другой функции, которая может отличаться от $f(\cdot)$ на множестве меры нуль. Чтобы избежать неоднозначностей, в дальнейшем равенства $f_\beta^\psi(\cdot) = \varphi(\cdot)$ условимся понимать в том смысле, что среди всех (ψ, β)-производных функции $f(\cdot)$ рассматривается конкретная функция $\varphi(\cdot)$.

В качестве множеств $\mathfrak{N}$ будем использовать классы $L_{\beta,p}^\psi \overset{\mathrm{df}}{=} \{ f \in L_\beta^\psi : \|f_\beta^\psi\|_p \le 1 \}$, $p = 1, \infty$. Всюду в дальнейшем будем требовать, чтобы члены последовательности $\psi(k)$ были положительны, монотонно стремились к нулю и, кроме того,

ISSN 0041-6053. Укр. мат. журн., 1995, т. 47, № 8

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(k)}{k} < \infty. \tag{2}$$

Как следует из предложения 1.7.2 работы [2], в этом случае элементы класса $L^{\psi}_{\beta,p}$ при любом $\beta \in R$ могут быть почти всюду представлены в виде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + (\Psi_\beta * \varphi)(x) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Psi_\beta(x-t)\varphi(t)\,dt, \tag{3}$$

где $\varphi \in L$, $\int_0^{2\pi}\varphi(t)\,dt = 0$, $\|\varphi\|_p \le 1$ и $\Psi_\beta(t)$ — суммируемая функция, ряд Фурье которой имеет вид

$$s[\Psi_\beta(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos(kt - \beta\pi/2). \tag{4}$$

При этом $\varphi(\cdot)$ почти всюду совпадает с $f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$.

Классы $C \cap L^{\psi}_{\beta,p}$ обозначаем через $C^{\psi}_{\beta,p}$.

В последнее время оценки снизу поперечников в ряде важных случаев удавалось получить на базе разработанного А. К. Кушпелем аппарата SK-сплайнов для классов сверток с ядрами $\Psi_\beta(\cdot)$, удовлетворяющими так называемым условиям $C_{y,2n}$ (см. определение 2). В частности, А. К. Кушпелем в работах [3, 4] для классов, порождаемых функциями $\Psi_\beta \in C_{y,2n}$, $\beta \in Z$ (y — точка максимума функции $|\Psi_\beta(t) * \operatorname{sign}\sin nt|$), получены оценки

$$\begin{gathered} d_{2n}(C^{\psi}_{\beta,\infty}, C) \ge \|\Psi_\beta(t) * \operatorname{sign}\sin nt\|_C, \\ d_{2n-1}(L^{\psi}_{\beta,1}, L) \ge \|\Psi_\beta(t) * \operatorname{sign}\sin nt\|_C. \end{gathered} \tag{5}$$

Заметим также, что в работе [3] было доказано, что при $\beta \in Z$ условиям $C_{y,2n}$ удовлетворяют функции $\Psi_\beta(t)$ вида (4) с коэффициентами $\psi(k) = \varphi(k)\rho^k$, $0 < \rho \le 1/7$, где $\varphi(k)$ — произвольные невозрастающие функции натурального аргумента.

Поскольку в этих случаях правые части соотношений (5) совпали с величинами $E_{n-1}(C^{\psi}_{\beta,\infty})_C$ и $E_{n-1}(L^{\psi}_{\beta,1})_1$ наилучших приближений классов $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ и $L^{\psi}_{\beta,1}$ тригонометрическими полиномами $T_{n-1}(t)$ порядка $n-1$, вычисленными Б. Надем [5], то это позволило записать равенства

$$d_{2n-1}(C^{\psi}_{\beta,\infty}, C) = d_{2n}(C^{\psi}_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(L^{\psi}_{\beta,1}, L) = \|\Psi_\beta(t) * \operatorname{sign}\sin nt\|_C. \tag{6}$$

Впоследствии В. Т. Шевалдин [6, 7] показал, что условиям $C_{y,2n}$ удовлетворяют ядра Пуассона вида

$$\Psi_\beta(t) = P_{\rho,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos(kt - \beta\pi/2), \quad 0 < \rho \le \rho(\beta), \ \rho(\beta) = 0{,}2,$$

при $\beta \in Z$ и $\rho(\beta) = 0{,}196881$ при $\beta \notin Z$, а также ядра Бернулли

$$\Psi_\beta(t) = K_{r,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r}\cos(kt - \beta\pi/2), \quad r \ge 1 \text{ для } n \le c(\beta)(r+1),$$

где $c(\beta) = 0{,}249971$, если $\beta \in Z$, и $c(\beta) = 0{,}247812$, если $\beta \notin Z$, и с учетом результатов В. К. Дзядыка [8] и Нгуен Тхи Тхьеу Хоа [9] установил в указанных случаях справедливость соотношений (5) и (6).

В настоящей работе доказывается, что условиям $C_{y,2n}$, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяют все ядра $\psi_\beta(\cdot)$ с коэффициентами $\psi(k)$ в представлении (4), подчиненными неравенствам $0 < \psi(k+1) \le \rho(\beta)\psi(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, где $\rho(\beta) = 0,2$, если $\beta \in Z$, либо $\rho(\beta) = 0,193864$, если $\beta \notin Z$, что позволяет записать неравенства (5) в указанных случаях для произвольных $\beta \in R$ и $n \in N$.

Этим, в частности, основные результаты работ [3,4] обобщаются на случай дробных значений β и расширяется множество допустимых функций $\psi(k)$.

Рассмотрим функцию $\Psi_{\beta,1}(\cdot) = (\Psi_\beta * K_{1,1})(\cdot)$, где $K_{1,1}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} \sin kt$ — ядро Бернулли. Легко видеть, что при выполнении условий (2) функция $\Psi_{\beta,1}$ непрерывна и справедливо равенство

$$\Psi_{\beta,1}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(k)}{k} \cos\left(kt - (\beta+1)\pi/2\right). \tag{7}$$

Пусть $\Delta_{2n} = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{2n} = 2\pi\}$, $x_k = k\pi/n$ — разбиение промежутка $[0, 2\pi]$ и $S\Psi_{\beta,1}(\Delta_{2n})$ — пространство SK-сплайнов $S\Psi_{\beta,1}(\cdot)$ по разбиению Δ_{2n}, т. е. множество функций, представимых равенствами

$$S\Psi_{\beta,1}(\cdot) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Psi_{\beta,1}(\cdot - x_k), \tag{8}$$

в которых c_k, $k = \overline{0,2n}$, — действительные числа, удовлетворяющие условию $\sum_{k=1}^{2n} c_k = 0$.

Фундаментальными SK-сплайнами называют функции $\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y, t - x_k)$, $x_k = k\pi/n$ вида (8), удовлетворяющие условиям

$$\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y, y_k) = \delta_{0,k} = \begin{cases} 0, & 1 \le k \le 2n-1; \\ 1, & k = 0, \end{cases}$$

где $y_k = x_k + y$, y — параметр, определяющий сдвиг узлов интерполяции. Фундаментальные SK-сплайны $\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y, t - x_k)$, $k = \overline{0,2n}$, образуют базис в пространстве $S\Psi_{\beta,1}(\Delta_{2n})$. Достаточные условия существования и единственности сплайнов $\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y, t)$ в зависимости от поведения функции $\psi(k)$ и от соотношения между параметрами y и β изучались, например, в работах [3, 10].

Известно (см., например, [11, с. 13; 3, с. 6]), что если числа x_i и C_i, $i = \overline{1,n}$, таковы, что $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = 2\pi$ и $\sum_{i=1}^{n} c_i = 0$, то функция

$$\mu(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i K_{1,1}(t - x_i)$$

является кусочно-постоянной на интервалах (x_i, x_{i+1}) и для каждого $t \in (x_i, x_{i+1})$ выполняется соотношение

$$\mu(t) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu x_\nu + \pi \sum_{\nu=1}^{i} c_\nu. \tag{9}$$

В то же время согласно (7) справедливо равенство

$$\left(\Psi_{\beta,1}(t)\right)_\beta^\psi = K_{1,1}(t).$$

Поэтому вследствие (8)

$$\left(S\Psi_{\beta,1}(\cdot)\right)^{\psi}_{\beta} = \sum_{i=1}^{2n} c_i K_{1,1}(t - x_i). \tag{10}$$

Таким образом, среди (ψ, β)-производных любого сплайна вида (7), а значит, и фундаментального сплайна $\overline{S\Psi}_{\beta,1}(t)$ имеется функция, которая является кусочно-постоянной на каждом интервале (x_i, x_{i+1}). Именно такую функцию в дальнейшем будем понимать под выражением $\left(\overline{S\Psi}_{\beta,1}(t)\right)^{\psi}_{\beta}$ и при этом будем писать $\left(\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y,t)\right)^{\psi}_{\beta} = \alpha(\psi;\beta)$.

Лемма 1. *Если функция* $\psi(k)$ *положительна, монотонна и удовлетворяет условию* (2), *то при выполнении одного из следующих условий:*

1) $y = 0$, $\beta \neq 2p$, $p \in Z$;
2) $\psi(k)$ *выпукла вниз,* $y = \pi/2n$, $\beta \neq 2p - 1$, $p \in Z$;
3) $\psi(k)$ *трижды монотонна* (*т е.*

$$\Delta\psi(k) \overset{\mathrm{df}}{=} \psi(k) - \psi(k+1) > 0,\ \Delta^2\psi(k) \overset{\mathrm{df}}{=} \Delta(\Delta\psi(k)) > 0,$$

$$\Delta^3\psi(k) \overset{\mathrm{df}}{=} \Delta(\Delta^2\psi(k)) > 0),$$

$$y \in \begin{cases} (0, \pi/2n), & \beta \in (1+4p, 2+4p) \cup (3+4p, 4+4p); \\ (\pi/2n, \pi/n), & \beta \in (4p, 1+4p) \cup (2+4p, 3+4p),\ p \in Z, \end{cases}$$

имеют место неравенства

$$d_{2n}(C^{\psi}_{\beta,\infty}, C) \geq e_{n,y},$$

$$d_{2n-1}(L^{\psi}_{\beta,\infty}, L) \geq e_{n,y}, \tag{11}$$

$$e_{n,y} \overset{\mathrm{df}}{=} \left(\sum_{k=1}^{2n} |\alpha(y, t_k)|\right)^{-1}.$$

В частности, неравенства (11) *выполняются, если функция* $\psi(k)$ *и число* β *таковы, что справедливо ограничение* (2) *и, кроме того,*

$$\begin{cases} \psi(k) & \text{монотонна при } \beta = 2p - 1; \\ \psi(k), & \text{трижды монотонна при } \beta \neq 2p - 1,\ p \in Z, \end{cases} \tag{12}$$

а y *выбирается из условия*

$$|(\Psi_\beta(\cdot) * \operatorname{sign}\sin n(\cdot))(y_0)| = \|\Psi_\beta(\cdot) * \operatorname{sign}\sin n(\cdot)\|_C, \quad 0 \leq y_0 \leq \pi/n. \tag{13}$$

Доказательство. Из теоремы 1 работы [10] следует, что если для положительной функции $\psi(k)$, чисел β и y выполняются неравенство (2) и одно из условий 1 – 3 леммы 1, то в этом случае сплайн $\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y,t)$ существует и единствен. Повторяя рассуждения, использующиеся при доказательстве теоремы работы А. К. Кушпеля [4], убеждаемся в справедливости соотношений (11).

Вторая часть леммы будет доказана, если покажем, что число y_0, определяемое равенством (13) при ограничениях (2) и (12), удовлетворяет одному из условий 1–3.

Положим $f_n(\cdot) = \Psi_\beta(\cdot) * \operatorname{sign}\sin n(\cdot)$. Тогда согласно теореме 1.7.1 работы [2]

$$|f_n(y_0)| = \max_t \frac{4}{\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\psi((2\nu+1)n)}{2\nu+1}\sin((2\nu+1)nt-\beta\pi/2)\right|. \tag{14}$$

Если $\beta \in Z$, то ясно, что число y_0, определяемое равенством (13), удовлетворяет условиям

$$y_0 = \begin{cases} 0, & \beta = 2p+1, \quad \text{если } \psi(k) \text{ монотонна;} \\ \pi/2n, & \beta = 2p, p\in Z, \quad \text{если } \psi(k) \text{ трижды монотонна.} \end{cases} \tag{15}$$

Если $\beta \notin Z$, то при условии, что функция $\psi(k)$ трижды монотонна, на основании леммы Фейера [12] заключаем, что для сумм рядов вида

$$C(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\psi((2k+1)n)\cos(2k+1)t, \quad S(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\psi((2k+1)n)\sin(2k+1)t$$

справедливы неравенства

$$\begin{gathered} C(t) > 0, \text{ если } t \in (0, \pi/2), \\ C(t) < 0, \text{ если } t \in (\pi/2, \pi), \end{gathered} \tag{16}$$

$$S(t) > 0, \text{ если } t \in (0, \pi). \tag{17}$$

Из теоремы 2.6 гл. 1 работы [13, с. 16] легко выводим, что для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty}\psi((2k+1)n)\cos(2k+1)t \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty}\psi((2k+1)n)\sin(2k+1)t$$

равномерно сходятся на промежутке $[\varepsilon, \pi/n-\varepsilon]$, и, следовательно, на указанном промежутке выполняется равенство

$$\frac{d}{dt}(f_n(t)) = \frac{4n}{\pi}(C(tn)\cos\beta\pi/2 + S(tn)\sin\beta\pi/2).$$

Анализ последнего равенства с учетом соотношений (16), (17) приводит к заключению, что для числа y_0, определяемого соотношением (13), справедливо включение

$$y_0 \in \begin{cases} [0, \pi/2n), & \text{если } \beta \in (2p+1, 2p+2); \\ (\pi/2n, \pi/n], & \text{если } \beta \in (2p, 2p+1), p \in Z. \end{cases} \tag{18}$$

Включения (15) и (18) являются частными случаями соответствующих условий 1 и 3. Лемма доказана.

Определение 2. *Будем говорить, что ядро $\Psi_\beta(\cdot)$ для некоторого действительного числа y и разбиения Δ_{2n} удовлетворяет условию $C_{y,2n}$ ($\Psi_\beta(\cdot) \in C_{y,2n}$), если существует и единствен набор фундаментальных сплайнов $\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y, t-x_k)$, $k = \overline{0,2n}$, и справедливо равенство*

$$\operatorname{sign}(\alpha(y, t_k)) = (-1)^k \varepsilon e_k, \tag{19}$$

где $t_k = (x_{k-1}+x_k)/2$, e_k равно либо 0 либо 1, а ε принимает значения ± 1 и не зависит от числа k.

Условие $C_{y,2n}$ введено А. К. Кушпелем [6] в терминах так называемого производящего полинома для ядра $\Psi_\beta(\cdot)$, им же указаны достаточные условия включений $\Psi_\beta \in C_{y,2n}$.

А. К. Кушпелем доказано, что в случае, когда $\Psi_\beta(\cdot) \in C_{y,2n}$, выполняется равенство

$$\left(\sum_{k=1}^{2n} |\alpha(y, t_k)| \right)^{-1} = |\Psi_\beta(y) * \operatorname{sign} \sin ny|. \tag{20}$$

В следующем утверждении содержатся достаточные условия включения $\Psi_\beta \in C_{y, 2n}$, которые позволяют воспользоваться ими в ряде новых ситуаций, а следовательно, расширить круг ядер, для которых выполняется равенство (20).

Лемма 2. *Пусть для некоторого действительного числа* y *и разбиения* Δ_{2n} *функция* $\Psi_\beta(\cdot)$ *такова, что*

$$2\sum_{j=1}^{n-1} \frac{n|\alpha_n(y)|}{j|\alpha_j(y)|} \le 1, \tag{21}$$

где

$$\lambda_j(y) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{2}{n} \sum_{\nu=1}^{2n} \exp(ijx_\nu)\Psi_{\beta,1}(y - x_\nu), \quad j = \overline{1, n-1},$$

i *— мнимая единица. Тогда* $\Psi_\beta(\cdot) \in C_{y, 2n}$.

Доказательство. Пусть $\rho_j(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \mathrm{Re}(\lambda_j(t))$, $\sigma_j(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \mathrm{Im}(\lambda_j(t))$. Пользуясь соотношением (9), на основании равенств (10) убеждаемся, что на промежутке (x_i, x_{i+1})

$$\left(\rho_j(t)\right)_\beta^\psi = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{2n} \cos jx_\nu K_{1,1}(t - x_\nu) =$$

$$= \frac{1}{n} \left(\frac{\pi}{2n} \sum_{\nu=1}^{2n} \nu \cos j\pi\nu/n + \pi \sum_{\nu=1}^{i} \nu \cos j\pi\nu/n \right).$$

Используя известные соотношения

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \cos kx = \frac{n \sin(2n-1)x/2}{2 \sin x/2} - \frac{1 - \cos nx}{4 \sin^2 x/2},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\cos(n+1)x/2 \sin nx/2}{\sin x/2},$$

находим

$$\left(\rho_i(t)\right)_\beta^\psi = \frac{1}{n} \left(\frac{\pi}{2n} \left(\frac{(2n+1)\sin((4n+1)j\pi/2n}{2 \sin j\pi/2n} - \frac{1 - \cos(2n+1)j\pi/n}{4 \sin^2 j\pi/2n} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi \cos(i+1)j\pi/2n \sin ij\pi/2n}{\sin j\pi/2n} \right) = \frac{\pi \sin(ij\pi/n + j\pi/2n)}{2n \sin j\pi/2n}. \tag{22}$$

Аналогично

$$\left(\sigma_j(t)\right)_\beta^\psi = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{2n} \sin jx_\nu K_{1,1}(t - x_\nu) =$$

$$= \frac{1}{n} \left(\frac{\pi}{2n} \sum_{\nu=1}^{2n} \nu \sin j\pi\nu/n + \pi \sum_{\nu=1}^{i} \sin j\pi\nu/n \right).$$

Воспользовавшись известными соотношениями

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \sin kx = \frac{\sin nx}{4 \sin^2 x/2} - \frac{n \cos(2n-1)x/2}{2 \sin x/2},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin(n+1)x/2 \sin nx/2}{\sin x/2},$$

получим

$$\left(\sigma_j(t)\right)_\beta^\psi = \frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2n}\left(\frac{\sin(2n+1)j\pi/n}{4\sin^2 j\pi/2n} - \frac{(2n+1)\cos(4n+1)j\pi/2n}{2\sin j\pi/2n}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi(\sin(i+1)j\pi/2n \sin ij\pi/2n}{\sin j\pi/2n}\right) = -\frac{\pi\cos(ij\pi/n + j\pi/2n)}{2n\sin j\pi/2n}. \tag{23}$$

Полагая $t_k = k\pi/n - \pi/2n$, из (22) и (23) заключаем, что для каждого $t \in \in (x_{k-1}, x_k)$

$$\left(\rho_j(t)\right)_\beta^\psi = \frac{\pi \sin jt_k}{2n\sin j\pi/2n}, \tag{22'}$$

$$\left(\sigma_j(t)\right)_\beta^\psi = -\frac{\pi\cos jt_k}{2n\sin j\pi/2n}. \tag{23'}$$

Таким образом, с учетом соотношений (22′), (23′), а также очевидных равенств

$$\rho_j(y) = \rho_{2n-j}(y),$$

$$\sigma_j(y) = -\sigma_{2n-j}(y),$$

$$\left(\rho_j(y)\right)_\beta^\psi = \left(\rho_{2n-j}(y)\right)_\beta^\psi,$$

$$\left(\sigma_j(y)\right)_\beta^\psi = -\left(\sigma_{2n-j}(y)\right)_\beta^\psi,$$

на основании представлений (2.5) работы [3] для каждого $t \in (x_{k-1}, x_k)$ получаем

$$\left(\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y,t)\right)_\beta^\psi = \frac{1}{2n}\left(2\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\pi(\sin jt_k \cdot \rho_j(y) - \cos jt_k \cdot \sigma_j(y)}{2n\sin j\pi/2n\,|\lambda_j(y)|^2} + \frac{\pi(-1)^{k+1}}{2n\,|\lambda_n(y)|^2}\right).$$

В случае $n = 1$ равенство (19) выполняется для произвольных ядер $\Psi_\beta(\cdot)$, имеющих свойство (2), поскольку выполняется равенство

$$\alpha(y, t_k) = \frac{\pi(-1)^{k+1}}{4\,|\lambda_1(y)|}.$$

Если же $n \geq 2$, то достаточным условием выполнения соотношения (19) является справедливость неравенств

$$2\left|\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\sin(jt_k - \alpha_j)}{n\sin j\pi/2n\,|\lambda_j(y)|}\right| \leq \frac{1}{n\,|\lambda_n(y)|}, \quad k = \overline{1,2n}, \tag{24}$$

где $\alpha_j = \operatorname{arctg}\sigma_j(y)/\rho_j(y)$. Из очевидных неравенств

$$(n\sin j\pi/2n)^{-1} \leq j^{-1}, \quad j = \overline{1,n-1},$$

вытекает, что соотношение (24) является следствием неравенства (21). Лемма доказана.

Теорема. *Пусть функция* $\psi(k)$ *удовлетворяет условиям*

$$\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} \leq \rho(\beta), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{25}$$

где $\rho(\beta) = 0,2$, *если* $\beta \in Z$, *и* $\rho(\beta) = 0{,}193864$, *если* $\beta \notin Z$.

Тогда справедливы неравенства (5).

Доказательство. В работе [10] для выражений $|\lambda_j(y)|$ найдены следующие представления:

$$|\lambda_j(y)|^2 = \left((A_j^2(y) + C_j^2(y)\right)\cos^2(\beta+1)\pi/2 + $$
$$+ \left((B_j^2(y) + D_j^2(y)\right)\sin^2(\beta+1)\pi/2 +$$
$$+ (A_j(y)D_j(y) + C_j(y)B_j(y))\sin(\beta+1)\pi, \quad j = \overline{1, 2n-1}, \tag{26}$$

где

$$A_j(y) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\psi(2mn+j)}{2mn} + \frac{\psi(2mn-j)}{2mn-j}\right)\cos 2mny + \frac{\psi(j)}{j},$$

$$B_j(y) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\psi(2mn+j)}{2mn+j} - \frac{\psi(2mn-j)}{2mn-j}\right)\cos 2mny + \frac{\psi(j)}{j},$$

$$C_j(y) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(-\frac{\psi(2mn+j)}{2mn+j} + \frac{\psi(2mn-j)}{2mn-j}\right)\sin 2mny,$$

$$D_j(y) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\psi(2mn+j)}{2mn+j} + \frac{\psi(2mn-j)}{2mn-j}\right)\sin 2mny.$$

В частности, при $j = n$

$$|\lambda_n(y)| = 2\left|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\psi(2m+1)n}{(2m+1)n}\cos((2m+1)ny - (\beta+1)\pi/2)\right|. \tag{27}$$

Пусть сначала $\beta \in Z$. Поскольку при $k \to \infty$ $\psi(k)$ монотонно стремится к нулю, то из равенств (15) заключаем, что для $\beta = 2p+1$, $p \in Z$

$$|\lambda_j(y_0)| = |\lambda_j(0)| = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\psi(2mn+j)}{2mn+j} + \frac{\psi(2mn-j)}{2mn-j}\right) + \frac{\psi(j)}{j} > \frac{\psi(j)}{j}, \tag{28}$$

а для $\beta = 2p$, $p \in Z$

$$|\lambda_j(y_0)| = |\lambda_j(\pi/2n)| =$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{\psi(2mn+j)}{2mn+j} - \frac{\psi(2mn-j)}{2mn-j}\right) + \frac{\psi(j)}{j} > \frac{\psi(j)}{j}. \tag{29}$$

Пусть, далее, $\beta \notin Z$. Тогда с учетом (18) на основании представления (26) можем записать

$$|\lambda_j(y_0)| \geq ((A_j^2(y_0) + C_j^2(y_0))\cos^2(\beta+1)\pi/2 +$$
$$+ ((B_j^2(y_0) + D_j^2(y_0))\sin^2(\beta+1)\pi/2)^{1/2} \geq \min\left\{\min_t A_j(t), \min_t B_j(t)\right\}. \tag{30}$$

Несложно убедиться, что при ограничениях (25) функция $A_j(t)$ имеет точку экстремума $t = \pi/2n$ и на промежутке $(0, \pi/2n)$ убывает, а на промежутке $(\pi/2n, \pi/n)$ возрастает и, следовательно,

$$\min_t A_j(t) = A_j(\pi/2n) = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{\psi(2mn+j)}{2mn+j} + \frac{\psi(2mn-j)}{2mn-j}\right) + \frac{\psi(j)}{j};$$

функция $B_j(t)$ имеет экстремум в точке $t = 0$, убывает при $t \in (-\pi/2n, 0)$, возрастает при $t \in (0, \pi/2n)$ и, следовательно,

$$\min_t B_j(t) = B_j(0) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\psi(2mn+j)}{2mn+j} - \frac{\psi(2mn-j)}{2mn-j}\right) + \frac{\psi(j)}{j}.$$

Поскольку

$$\min\left\{\min_t A_j(t), \min_t B_j(t)\right\} = \min_t A_j(t) = A_j(\pi/2n),$$

то из неравенств (25) и (30) следует

$$|\lambda_j(y_0)| > A_j(\pi/2n) > \frac{\psi(j)}{j} - \frac{\psi(2n-j)}{2n-j} - \frac{\psi(2n+j)}{2n+j} + \frac{\psi(4n-j)}{4n-j} >$$

$$> \frac{\psi(j)}{j}\left(1 - \frac{\psi(2n-j)}{\psi(j)} - \frac{1}{3}\frac{\psi(2n+j)}{\psi(j)}\right) > \frac{\psi(j)}{j}(1-\rho^2(\beta) - (1/3)\rho^{2n}(\beta)). \quad (31)$$

Из представления (27) и ограничений (25) вытекает оценка

$$|\lambda_n(y)| < 2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\psi((2m+1)n)}{(2m+1)n} < \frac{2}{n}\sum_{m=0}^{\infty}\psi((2m+1)n) \le$$

$$\le \frac{2\psi(n)}{n}\sum_{m=0}^{\infty}(\rho(\beta))^{2mn} = \frac{2\psi(n)}{n(1-\rho^{2n}(\beta))}. \quad (32)$$

Если $\beta \notin Z$, то по условию $\rho(\beta) = 0{,}193864$. Поэтому на основании неравенств (31) и (32) при $n \ge 2$ имеем

$$1 \ge \frac{4}{(1-\rho^2(\beta)-(1/3)\rho^{2n}(\beta))(1-\rho(\beta))} \ge$$

$$\ge \frac{4\rho(\beta)(1-\rho^{n-1}(\beta))}{(1-\rho^2(\beta)-(1/3)\rho^{2n}(\beta))(1-\rho^n(\beta))(1+\rho^n(\beta))(1-\rho(\beta))} =$$

$$= \frac{4\sum_{j=1}^{n-1}\rho^j(\beta)}{(1-\rho^2(\beta)-(1/3)\rho^{2n}(\beta))(1-\rho^{2n}(\beta))} \ge \frac{4\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\psi(n)}{\psi(j)}}{(1-\rho^2(\beta)-(1/3)\rho^{2n}(\beta))(1-\rho^{2n}(\beta))} =$$

$$= 2\sum_{j=1}^{n-1}\frac{2\psi(n)(1-\rho^{2n}(\beta))^{-1}}{\psi(j)(1-\rho^2(\beta)-(1/3)\rho^{2n}(\beta))} \ge 2\sum_{j=1}^{n-1}\frac{n|\lambda_n(y_0)|}{j|\lambda_j(y_0)|}.$$

Пусть теперь $\beta \in Z$ и $\rho(\beta) = 0{,}2$. Тогда при $n \ge 2$ с учетом соотношений (28), (29) и (32) убеждаемся в справедливости неравенств

$$1 \ge \frac{4}{1-\rho(\beta)} \ge \frac{4\rho(\beta)(1-\rho^{n-1}(\beta))}{(1-\rho^n(\beta))(1+\rho^n(\beta))\ (1-\rho(\beta))} \ge \frac{4}{1-\rho^{2n}(\beta)}\sum_{j=1}^{n-1}\rho^j(\beta) \ge$$

$$\ge \frac{4}{1-\rho^{2n}(\beta)}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\psi(n)}{\psi(j)} = 2\sum_{j=1}^{n-1}\frac{2\psi(n)(1-\rho^{2n}(\beta))^{-1}}{\psi(j)} \ge 2\sum_{j=1}^{n-1}\frac{n|\lambda_n(y_0)|}{j|\lambda_j(y_0)|}.$$

В заключение остается воспользоваться леммами 1 и 2, а также равенствами (13) и (20). Теорема доказана.

Следствие. *Пусть функция* $\psi(k)$ *положительна и удовлетворяет неравенствам* $\psi(k+1) \le 0{,}2\,\psi(k)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Тогда справедливы равенства

$$d_{2n-1}(C^{\psi}_{2p,\infty}, C) = d_{2n}(C^{\psi}_{2p,\infty}, C) =$$

$$= d_{2n-1}(L^{\psi}_{2p,1}, L) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\psi((2k+1)n)}{2k+1}.$$

$$d_{2n-1}(C^{\psi}_{2p-1,\infty}, C) = d_{2n}(C^{\psi}_{2p-1,\infty}, C) =$$

$$= d_{2n-1}(L^{\psi}_{2p-1,1}, L) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\psi((2k+1)n)}{2k+1}, \quad n \in N, \ p \in Z.$$

Доказательство. Требуемые равенства вытекают из теоремы 1, а также результатов Б. Надя [5], из которых вытекает справедливость следующих равенств:

$$E_{n-1}(C^{\psi}_{2p,\infty})_C = E_{n-1}(L^{\psi}_{2p,1})_1 = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\psi((2k+1)n)}{2k+1},$$

$$E_{n-1}(C^{\psi}_{2p+1,\infty})_C = E_{n-1}(L^{\psi}_{2p+1,1})_1 = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\psi((2k+1)n)}{2k+1}.$$

Замечание. Повторив рассуждения, использованные при доказательстве теоремы из работы А. К. Кушпеля [4], можно доказать, что при выполнении условий теоремы справедливы соотношения

$$d_{2n}(C^{\psi}_{\beta,\infty}, C) \geq b_{2n-1}(C^{\psi}_{\beta,\infty}, C) \geq \| \Psi_\beta(t) * \operatorname{sign}\sin nt \|_C,$$

$$d_{2n-1}(L^{\psi}_{\beta,1}, L) \geq b_{2n-1}(L^{\psi}_{\beta,1}, L) \geq \| \Psi_\beta(t) * \operatorname{sign}\sin nt \|_C,$$

в которых $b_n(\mathfrak{N}, X)$ — поперечник по Бернштейну, определяемый равенством

$$b_n(\mathfrak{N}, X) = \sup_{L_{n+1}\subset X}\ \sup_{\varepsilon>0}\{\varepsilon B \cap L_{n+1} \subset \mathfrak{N}\},$$

где L_{n+1} — всевозможные $(n+1)$-мерные подпространства банахова пространства X с единичным шаром B.

1. *Kolmogorov A. N.* Uber die besse Annaherung von Fanctionen einer gegebenen Functionclasse // Ann. Math. – 1936. – **37**, № 2. – P. 107–110.
2. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 267 с.
3. *Кушпель А. К.* SK-сплайны и точные оценки поперечников функциональных классов в пространстве $C_{2\pi}$. – Киев, 1985. – 47 с.– (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; №85.51).
4. *Кушпель А. К.* Оценки поперечников классов сверток в пространствах C и L // Укр. мат журн. – 1989. – **41**, № 8. – С. 1070–1076.
5. *Nady B.* Uber gewisse Extremolfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklugen. – Berichte Akad. Wiss. Leipzig. – 1938. – **90**. – P. 103–134.
6. *Шевалдин В. Т.* Поперечники классов сверток с ядром Пуассона // Мат. заметки. – 1992. – **51**, вып. 6. – С. 126–136.
7. *Шевалдин В. Т.* Оценки снизу поперечников классов периодических функций с ограниченной дробной производной // Там же. – 1993. – **53**, вып. 2. – С. 145–151.
8. *Дзядык В. К.* О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер // Там же. – 1974. – **16**, № 5. – С. 691–701.
9. *Нгуен Тхи Тхьеу Хоа.* Оператор $D(D^2+1)\ldots(D^2+n^2)$ и тригонометрическая интерполяция // Anal. Math. – 1989. – **15**, № 4. – P. 291–306.
10. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* О существовании интерполяционных SK-сплайнов // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 11. – С. 1546–1554.
11. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения. – М: Наука, 1984. – 352 с.
12. *Fejer L.* Trigonometrishe Reihen und Potenzreihen mit mehr fach monotoner Koeffizientenfolge // Trans. Amer. Math. Soc. – 1936. – **39**. – P. 18–59.
13. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. – М: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.

Получено 20.07.94