УДК 517.5

**А. С. Романюк,** канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

# О НАИЛУЧШЕЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ И БИЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ КЛАССОВ БЕСОВА ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

For classes $B^r_{p,\theta}$ of functions many variables, we obtain order estimates for best trigonometric and bilinear approximations.

Одержані порядкові оцінки найкращих тригонометричних, а також білінійних наближень класів $B^r_{p,\theta}$ функцій багатьох змінних.

В настоящей работе продолжается (см. [1 – 3]) изучение наилучших тригонометрических приближений классов $B^r_{p,\theta}$

$$e_M\left(B^r_{p,\theta},L_q\right) = \sup_{f\in B^r_{p,\theta}} \inf_{k^j} \inf_{c_j} \left\| f(\cdot) - \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j,\cdot)} \right\|_q, \qquad (1)$$

где $c_j$, $j=\overline{1,M}$, — произвольные коэффициенты, а $k^j$ — всевозможные векторы из целочисленной решетки $Z^m$.

Основное внимание уделяется нахождению порядковых оценок (1) на классах $B^r_{1,\theta}$ в метрике $L_q$, $1<q<\infty$, а также классов $B^r_{p,\theta}$, $1\le p<\infty$, в равномерной метрике. В заключительной части полученные результаты применяются для установления порядковых оценок билинейной аппроксимации функций вида

$$f(x,y) = f(x-y), \quad x,y\in \pi_m = \prod_{j=1}^{m} [-\pi;\pi], \quad f(x)\in B^r_{1,\theta}.$$

Сохраняя обозначения, принятые в [1 – 3], модифицируем определение классов $B^r_{p,\theta}$, которое позволит охватить случаи $p=1$ и $p=\infty$.

Пусть $V_l(t)$, $l\in N$, обозначает ядро Валле Пуссена порядка $2l-1$:

$$V_l(t) = \sum_{k=1}^{l} \cos kt + \sum_{k=l+1}^{2l-1}\left(1-\frac{k-l}{l}\right)\cos kt.$$

Каждому вектору $s=(s_1,\dots,s_m)$, $s_j\in N$, $j=\overline{1,m}$, поставим в соответствие полиномы

$$A_s(x) = 2^m \prod_{j=1}^{m}\left(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j)\right),$$

$$A_s(f,x) = f * A_s(x).$$

Тогда (см., например, [4]) для всех $1\le p\le\infty$, $1\le\theta\le\infty$ и $r=(r_1,\dots,r_m)$, $r_j>0$, $j=\overline{1,m}$, класс $B^r_{p,\theta}$ определяется следующим образом:

$$B^r_{p,\theta} = \left\{ f(\cdot) \,\middle|\, \|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta}\|A_s(f,\cdot)\|_p^\theta\right)^{1/\theta} \le 1 \right\}, \qquad (2)$$

где при $\theta=\infty$ подразумевается естественная модификация нормы.

Отметим, что если $p\in(1,\infty)$, то (2) равносильно ранее используемому определению классов $B^r_{p,\theta}$ (см., например, [1]). Для удобства напомним еще некоторые употребляемые в работе обозначения.

Функции $\mu_1(N)$ и $\mu_2(N)$ называем функциями одного порядка и пишем $\mu_1 \asymp \mu_2$, если существует константа $N_0$ такая, что при $N > N_0$ $c_1\mu_1(N) \le \le \mu_2(N) \le c_2\mu_1(N)$. Постоянные $c_1$ и $c_2$ в дальнейшем могут зависеть только от параметров, определяющих класс, метрики, в которой измеряется погрешность приближения и размерности пространства $R^m$. Аналогично определяются порядковые неравенства $\mu_1 >> \mu_2$ и $\mu_1 << \mu_2$.

**1. Наилучшие тригонометрические приближения.** Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Пусть $q \in (1, 2]$, $r_1 > 1 - 1/q$. Тогда при $1 \le \theta \le \infty$*

$$e_M\left(B^r_{1,\theta}, L_q\right) \asymp M^{-(r_1 - 1 + 1/q)}(\log^{\nu-1} M)^{(r_1 - 1 + 2/q - 1/\theta)_+},$$

*где $a_+ = \max\{a, 0\}$.*

***Доказательство.*** Сначала установим оценку сверху. Пусть $f \in B^r_{1,\theta}$. Построим для $f(x)$ приближающий полином $t_M(x)$, содержащий по порядку $M$ гармоник, который будет доставлять требуемую оценку приближения. С этой целью по заданному натуральному числу $M$ подберем $n$ из соотношения $2^n n^{\nu-1} \asymp M$ и положим $n_0 = n + (\nu - 1)\log n$. Полином $t_M(x)$ будем подбирать в виде двух слагаемых $t_M(x) = P(x) + Q(x)$, где $P(x) = \sum_{(s,\gamma)<n} A_s(f, x)$, а слагаемое $Q(x)$ будет сконструировано в процессе получения оценки.

Для натурального числа $l$ положим

$$S_l = \left( \sum_{l \le (s,\gamma) < l+1} \| A_s(f, x) \|_1^\theta 2^{(s,r)\theta} \right)^{1/\theta} \tag{3}$$

и обозначим через $\alpha_i(f, l)$ числа $\| A_s(f, x) \|_1$, упорядоченные в порядке убывания. Тогда из (3) следует

$$\alpha_i(f, l) << i^{-1/\theta} 2^{-l r_1} S_l. \tag{4}$$

Далее, полагая $m_l = \left[ 2^n n^{\nu-1} 2^{-l} S_l^\theta \right] + 1$, где $[a]$ — целая часть числа $a$, рассмотрим функцию

$$R(x) = \sum_{l=n}^{[n_0]} \sum_{l \le (s,\gamma) < l+1} A_s(f, x) \tag{5}$$

и для каждого $l \in [n, n_0]$, $l \in N$, возьмем из внутренней суммы (5) первые $m_l$ „блоков" $A_s(f, x)$ с наибольшей нормой $\| A_s(f, x) \|_1$, т. е. „блоки", соответствующие числам $\alpha_i(f, l)$, $i = \overline{1, m_l}$. Полученный в результате такой процедуры полином обозначим $Q(x)$.

Нетрудно проверить, что количество гармоник $K$, которые будут содержаться в $t_M(x)$, не превышает по порядку $M$.

Действительно, согласно лемме Г (см. [5, с. 11]), а также определению чисел $m_l$ будем иметь

$$K << 2^n n^{\nu-1} + \sum_{l=n}^{[n_0]} 2^l m_l << 2^n n^{\nu-1} + 2^n n^{\nu-1} \sum_{l=n}^{[n_0]} \sum_{l \le (s,\gamma) < l+1} \| A_s(f, x) \|_1^\theta 2^{(s,r)\theta} <<$$

$$<< 2^n n^{\nu-1} + 2^n n^{\nu-1} \| f \|^\theta_{B^r_{1,\theta}} = 2^n n^{\nu-1} \left( 1 + \| f \|^\theta_{B^r_{1,\theta}} \right) << 2^n n^{\nu-1} \asymp M.$$

Оценим $\| f(x) - t_M(x) \|_q$. Согласно выбору полинома $t_M(x)$ имеем

$$\| f(x) - t_M(x) \|_q = \| f(x) - P(x) - Q(x) \|_q =$$

$$= \left\| f(x) - \sum_{(s,\gamma)<n_0} A_s(f,x) + R(x) - Q(x) \right\|_q \le \left\| f(x) - \sum_{(s,\gamma)<n_0} A_s(f,x) \right\|_q +$$

$$+ \| R(x) - Q(x) \|_q = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 . \qquad (6)$$

Для первой суммы в (6) в силу теоремы 2 из [6] находим

$$\sum\nolimits_1 \ll 2^{-n_0(r_1-1+1/q)} n_0^{(\nu-1)(1/q-1/\theta)_+}$$

и, подставляя вместо $n_0$ его значение, получаем

$$\sum\nolimits_1 \ll 2^{-n(r_1-1+1/q)} n^{-(\nu-1)(r_1-1+1/q)} \asymp M^{-(r_1-1+1/q)}$$

при $\theta \in [1, q]$ и

$$\sum\nolimits_1 \ll 2^{-n(r_1-1+1/q)} n^{-(\nu-1)(r_1-1+1/q)} n^{(\nu-1)(1/q-1/\theta)} =$$

$$= 2^{-n(r_1-1+1/q)} n^{-(\nu-1)(r_1-1-2/q+1/\theta)} \asymp \frac{\left(\log^{\nu-1} M\right)^{1/q-1/\theta}}{M^{r_1-1+1/q}}, \quad \theta > q.$$

Оценим $\sum_2$. Пусть $p_0$ — некоторое число, удовлетворяющее условию $1 < p_0 < q \le 2$. Тогда в силу соотношения (см. [5, с. 25])

$$\| f \|_q^q \ll \sum_s \left( \| \delta_s(f,x) \|_p 2^{\| s \|_1 (1/p-1/q)} \right)^q, \quad 1 \le p < q < \infty, \quad f \in L_p(\pi_m)$$

и неравенства разных метрик Никольского имеем

$$\| f \|_q \ll \left( \sum_s \left( \| \delta_s(f,x) \|_{p_0} 2^{\| s \|_1 (1/p_0-1/q)} \right)^q \right)^{1/q} \asymp$$

$$\asymp \left( \sum_s \left( \| A_s(f,x) \|_{p_0} 2^{\| s \|_1 (1/p_0-1/q)} \right)^q \right)^{1/q} \le$$

$$\le \left( \sum_s \left( \| A_s(f,x) \|_1 2^{\| s \|_1 (1-1/p_0)} 2^{\| s \|_1 (1/p_0-1/q)} \right)^q \right)^{1/q} =$$

$$= \left( \sum_s \left( \| A_s(f,x) \|_1 2^{\| s \|_1 (1-1/q)} \right)^q \right)^{1/q}. \qquad (7)$$

Таким образом, с учетом (7) и (4) для $\sum_2$ будем иметь

$$\sum\nolimits_2 \ll \left\{ \sum_{l=n}^{[n_0]} \sum_{i>m_l} \alpha_i^q(f,l) 2^{l(1-1/q)q} \right\}^{1/q} =$$

$$= \left\{ \sum_{l=n}^{[n_0]} \sum_{i>m_l} \alpha_i^\theta(f,l) \alpha_i^{q-\theta}(f,l) 2^{l(1-1/q)q} \right\}^{1/q} \ll$$

$$\ll \left\{ \sum_{l=n}^{[n_0]} m_l^{-(q-\theta)/\theta} 2^{-l(q-\theta)r_1} S_l^{q-\theta} 2^{-l\theta r_1} 2^{l(1-1/q)q} \sum_{l \le (s,\gamma) < l+1} 2^{(s,r)\theta} \| A_s(f,x) \|_1^\theta \right\}^{1/q} \ll$$

$$\ll \left\{ \sum_{l=n}^{[n_0]} m_l^{-(q-\theta)/\theta} 2^{-l(r_1-1+1/q)q} S_l^{q-\theta} S_l^\theta \right\}^{1/q} = \left\{ \sum_{l=n}^{[n_0]} m_l^{-(q-\theta)/\theta} 2^{-l(r_1-1+1/q)q} S_l^q \right\}^{1/q}.$$

Подставив вместо $m_l$ его значение, продолжим оценку

$$\ll (2^n n^{\nu-1})^{1/q-1/\theta}\left(\sum_{l=n}^{[n_0]} S_l^\theta 2^{-l(r_1-1+1/q)q} 2^{lq(1/\theta-1/q)}\right)^{1/q} =$$

$$= (2^n n^{\nu-1})^{1/q-1/\theta}\left(\sum_{l=n}^{[n_0]} 2^{-lq(r_1-1+2/q-1/\theta)} S_l^\theta\right)^{1/q} = (2^n n^{\nu-1})^{1/q-1/\theta}\sum\nolimits_3. \qquad (8)$$

Далее, чтобы оценить $\sum_3$, рассмотрим два случая.

Пусть $r_1 > 1 - 2/q + 1/\theta$. Тогда

$$\sum\nolimits_3 \le 2^{-n(r_1-1+2/q-1/\theta)}\left(\sum_{l=n}^{[n_0]} S_l^\theta\right)^{1/q} \ll$$

$$\ll 2^{-n(r_1-1+2/q-1/\theta)}\| f\|_{B_{1,\theta}^r}^{\theta/q} \le 2^{-n(r_1-1+2/q-1/\theta)}$$

и (8) приобретает вид

$$\sum\nolimits_2 \ll 2^{-n(r_1-1+1/q)} n^{(\nu-1)(1/q-1/\theta)} \asymp \frac{(\log^{\nu-1} M)^{r_1-1+2/q-1/\theta}}{M^{r_1-1+1/q}}.$$

В случае $1 - 1/q < r_1 \le 1 - 2/q + 1/\theta$, рассуждая аналогично, получаем оценку

$$\sum\nolimits_2 \ll M^{-(r_1-1+1/q)}.$$

Сопоставляя оценки $\sum_1$ и $\sum_2$ и используя соотношение (6), получаем требуемую оценку сверху.

Напомним, что оценку снизу достаточно получить при $\nu = m$. По заданному $M$ подберем $n$ из соотношения $M \asymp 2^n n^{m-1}$ и рассмотрим функцию

$$F_{r,n}(x) = n^{-(m-1)/\theta} \sum_{(s,1)\le n+m}\ \sum_{k\in\rho^+(s)}\ \prod_{j=1}^m k_j^{-r_1}\cos k_j x_j,$$

$$\rho^+(s) = \left\{k\colon 2^{s_j-1} \le k_j < 2^{s_j},\ j = \overline{1, m}\right\}.$$

Известно [5], что функция

$$F_r(x) = 2^m \sum_{k>0} \prod_{j=1}^m k_j^{-r_j}\cos k_j x_j$$

принадлежит классу $H_1^r$ и поэтому согласно теореме 1.1 (см. [5, с. 32]) $\| A_s(F_r, x)\|_1 \ll 2^{-(s,r)}$. Используя это соотношение, легко убедиться, что $F_{r,n}(x) \in C B_{1,\theta}^r$, $C > 0$.

Далее, пусть $\Omega_M$ — некоторое множество векторов $(k^1, \ldots, k^M)$ и $g(x)$ — произвольный полином с номерами гармоник из $\Omega_M$. Тогда согласно неравенству (см. [5, с. 28])

$$\| f\|_p \gg \left(\sum_s \|\delta_s(f, x)\|_q^p 2^{\|s\|_1(1/q-1/p)p}\right)^{1/p}, \quad 1 < p < q \le \infty,$$

с учетом специфики функции $F_{r,n}(x)$ будем иметь

$$\| F_{r,n} - g\|_q \gg \left(\sum_{(s,1)=n+m} \|\delta_s(F_{r,n}, x)\|_2^q 2^{\|s\|_1(1/2-1/q)q}\right)^{1/q}.$$

Чтобы продолжить оценку, рассмотрим $\| \delta_s(F_{r,n}, x)\|_2$. Имеем

$$\| \delta_s(F_{r,n}, x)\|_2 = n^{-(m-1)/\theta}\left( \sum_{k\in\rho^+(s)} \prod_{j=1}^{m} k_j^{-2r_1} \right)^{1/2} =$$

$$= n^{-(m-1)/\theta}\left( \prod_{j=1}^{m} \sum_{k_j=2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1} k_j^{-2r_1} \right)^{1/2} >> n^{-(m-1)/\theta} \prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j r_1}\, 2^{s_j/2} =$$

$$= 2^{-(s,1)(r_1-1/2)} n^{-(m-1)/\theta},$$

и, таким образом,

$$\| F_{r,n} - g \|_q >> \left( \sum_{(s,1)=n+m} 2^{-\|s\|_1 (r_1-1+1/q)q} \right)^{1/q} n^{-(m-1)/\theta} \asymp$$

$$\asymp 2^{-n(r_1-1+1/q)} n^{(m-1)(1/q-1/\theta)} \asymp \frac{\left(\log^{m-1} M\right)^{r_1-1+2/q-1/\theta}}{M^{r_1-1+1/q}}.$$

Полученная оценка совпадает по порядку с оценкой сверху при $r_1 > 1 - 2/q + 1/\theta$. Если же $1 - 1/q < r_1 \le 1 - 2/q + 1/\theta$, то требуемая оценка следует из соответствующей оценки одномерного случая.

Прежде чем перейти к формулировке и доказательству следующего результата, сформулируем утверждения, аналогичные теореме 1, на классах $W^r_{1,\alpha}$ и $H^r_1$ и сделаем при этом некоторые замечания.

**Теорема 1′.** *Пусть* $1 < q \le 2$, $r_1 > 1 - 1/q$. *Тогда справедлива оценка*

$$e_M\left(H^r_1, L_q\right) \asymp \frac{\left(\log^{\nu-1} M\right)^{r_1-1+2/q}}{M^{r_1-1+1/q}}.$$

Оценка следует непосредственно из теоремы 1 при $\theta = \infty$, поскольку $B^r_{1,\infty} = H^r_1$.

**Теорема 1″.** *При* $1 < q \le 2$ *и* $r_1 > 1 - 1/q$ *справедливо соотношение*

$$e_M\left(W^r_{1,\alpha}, L_q\right) \asymp \frac{\left(\log^{\nu-1} M\right)^{r_1-1+2/q}}{M^{r_1-1+1/q}}.$$

***Доказательство.*** Оценка сверху следует из теоремы 1′, поскольку $W^r_{1,\alpha} \subset H^r_1$ [5]. Оценка снизу является следствием теоремы 1.1 из [7], в которой установлена оценка

$$e_M(F_{r,\alpha}, L_q) \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1-1+1/q} \log^{(\nu-1)/q} M,$$

где

$$F_{r,\alpha}(x) = 2^m \sum_{k\in Z^m_+} \prod_{j=1}^{m} k_j^{-r_j} \cos\left(k_j x_j + \frac{\alpha_j \pi}{2}\right), \quad \alpha_j \in R,$$

— ядро Бернулли, которое, как известно, принадлежит классу $W^r_{1,\alpha}$ (см., например, [5]).

Сопоставляя теоремы 1, 1′ и 1″, отметим следующее. Порядки величин (1) на классах $W^r_{1,\alpha}$ и $H^r_1$ одинаковы, хотя $W^r_{1,\alpha} \subset H^r_1$. При этом такой же порядок имеют наилучшие приближения полиномами с гармониками из гиперболического креста (см. теоремы 2.2 и 4.2 из [5]).

Несколько иная ситуация обнаружилась на классах $B^r_{1,\theta}$. Так, сопоставляя результаты теоремы 1 настоящей работы и теоремы 2 из [6], видим, что при $\theta \geq \geq q$ и $r_1 > 1 - 2/q + 1/\theta$ порядок величины (1) совпадает с порядком наилучших приближений полиномами с гармониками из гиперболического креста. Если же $1 - 1/q < r_1 < 1 - 2/q + 1/\theta$ („малая гладкость"), то полиномы с гармониками из гиперболического креста уже не доставляют порядков наилучших тригонометрических приближений. Кроме того, порядок наилучших тригонометрических приближений в этом случае не зависит от размерности пространства $R^m$.

**Теорема 2.** *Пусть* $2 \leq q < \infty$, $r_1 > 1$. *Тогда при* $1 \leq \theta \leq \infty$

$$e_M\left(B^r_{1,\theta}, L_q\right) \asymp \frac{\left(\log^{\nu-1} M\right)^{r_1 - 1/\theta}}{M^{r_1 - 1/2}}.$$

***Доказательство.*** Как и в предыдущей теореме, сначала получим оценку сверху. При этом будем пользоваться схемой рассуждений, аналогичной той, которая применялась в [1] при изучении случая $1 < p \leq 2 < q < \infty$.

Пусть $f \in B^r_{1,\theta}$, $M$ — заданное натуральное число и $n$ удовлетворяет соотношению $2^n n^{\nu-1} \asymp M$. Построим для $f(x)$ полином, доставляющий требуемую оценку приближения. Положим

$$P(\Omega_M, x) = \sum_{(s,\gamma')<n} \delta_s(f, x) + \sum_{n \leq (s,\gamma') < \alpha n} P(\Omega_{N_s}, x),$$

где $P(\Omega_{N_s}, x)$ — полиномы, которые будем строить для каждого „блока" $\delta_s(f, x)$ согласно лемме $A$ (см., например, [1]), а $\alpha > 1$ — число, которое будет подобрано ниже. Тогда в силу теоремы Литтлвуда – Пэли (см., например, [4, с. 63]) находим

$$\|f(\cdot) - P(\Omega_M, \cdot)\|_q \ll \left\| \left( \sum_{n \leq (s,\gamma') < \alpha n} \left| \delta_s(f, \cdot) - P(\Omega_{N_s}, x) \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_q +$$

$$+ \left\| \sum_{(s,\gamma') \geq \alpha n} \delta_s(f, \cdot) \right\|_q = \sum\nolimits_4 + \sum\nolimits_5. \tag{9}$$

Согласно теореме 2 из [6] для второй суммы в (9) будем иметь

$$\sum\nolimits_5 \ll 2^{-\alpha n (r_1 - 1 + 1/q)} n^{(\nu-1)(1/q - 1/\theta)_+}. \tag{10}$$

Для оценки $\sum_4$ воспользуемся последовательно неравенством Минковского, леммой $A$ из [1] и неравенством разных метрик Никольского. В результате получим

$$\sum\nolimits_4 \leq \left( \left\| \sum_{n \leq (s,\gamma') < \alpha n} \left| \delta_s(f, \cdot) - P(\Omega_{N_s}, x) \right|^2 \right\|_{q/2} \right)^{1/2} \ll$$

$$\ll \left( \sum_{n \leq (s,\gamma') < \alpha n} \left\| \left| \delta_s(f, \cdot) - P(\Omega_{N_s}, x) \right|^2 \right\|_{q/2} \right)^{1/2} =$$

$$= \left( \sum_{n \leq (s,\gamma') < \alpha n} \left\| \delta_s(f, \cdot) - P(\Omega_{N_s}, x) \right\|_q^2 \right)^{1/2} \ll \left( \sum_{n \leq (s,\gamma') < \alpha n} \frac{2^{\|s\|_1}}{N_s} \|\delta_s(f, \cdot)\|_2^2 \right)^{1/2} \asymp$$

$$\asymp \left( \sum_{n \le (s,\gamma') < \alpha n} \frac{2^{\|s\|_1}}{N_s} \| A_s(f,\cdot) \|_2^2 \right)^{1/2} << \left( \sum_{n \le (s,\gamma') < \alpha n} \frac{2^{\|s\|_1} 2^{2\|s\|_1 (1-1/2)}}{N_s} \| A_s(f,\cdot) \|_1^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \left( \sum_{n \le (s,\gamma') < \alpha n} \frac{2^{2\|s\|_1}}{N_s} \| A_s(f,\cdot) \|_1^2 \right)^{1/2} \qquad (11).$$

Подставляя теперь (11) и (10) в (9), получаем соотношение

$$\| f(\cdot) - P(\Omega_M, \cdot) \|_q << \left( \sum_{n \le (s,\gamma') < \alpha n} \frac{2^{2\|s\|_1}}{N_s} \| A_s(f,\cdot) \|_1^2 \right)^{1/2} +$$

$$+ 2^{-n\alpha(r_1 - 1 + 1/q)} n^{(\nu-1)(1/q - 1/\theta)_+} = I_1 + I_2. \qquad (12)$$

Оценим сначала $I_1$. Для этого рассмотрим два случая: а) $\theta \ge 2$ и б) $1 \le \theta < 2$. В случае а) выберем числа $N_s$ и $\alpha$ из равенств

$$\alpha = \frac{r_1 - 1/2}{r_1 - 1 + 1/q}, \quad N_s = [ 2^{nr_1} 2^{-(s,\gamma)(r_1 - 1)} ] + 1. \qquad (13)$$

Тогда в силу соотношения (см. [5, с. 11])

$$\sum_{(s,\gamma') \ge n} 2^{-\mu(\gamma, s)} \asymp 2^{-\mu n} n^{\nu - 1}, \quad \mu > 0, \qquad (14)$$

для количества гармоник будем иметь оценку

$$\sum_{n \le (s,\gamma') < \alpha n} N_s << n^m + 2^{nr_1} \sum_{n \le (s,\gamma') < \alpha n} 2^{-(s,\gamma)(r_1 - 1)} <<$$

$$<< 2^{nr_1} 2^{-n(r_1 - 1)} n^{\nu - 1} = 2^n n^{\nu - 1} \asymp M.$$

Подставляя теперь в $I_1$ вместо $N_s$ его значение из (13), находим

$$I_1 \le 2^{-nr_1/2} \left( \sum_{n \le (s,\gamma') < \alpha n} 2^{2(s,\gamma)} 2^{(s,\gamma)(r_1 - 1)} \| A_s(f,\cdot) \|_1^2 \right)^{1/2} =$$

$$= 2^{-nr_1/2} \left( \sum_{n \le (s,\gamma') < \alpha n} 2^{2(s,\gamma) r_1} \| A_s(f,\cdot) \|_1^2 2^{-(s,\gamma)(r_1 - 1)} \right)^{1/2}. \qquad (15)$$

Далее, применив неравенство Гельдера с показателем $\theta / 2$ и воспользовавшись соотношением (14), продолжим (15):

$$\le 2^{-nr_1/2} \left( \sum_{n \le (s,\gamma') < \alpha n} 2^{(s,r)\theta} \| A_s(f,\cdot) \|_1^\theta \right)^{1/\theta} \left( \sum_{n \le (s,\gamma') < \alpha n} 2^{-(s,\gamma)(r_1 - 1)\theta/(\theta - 2)} \right)^{1/2 - 1/\theta} <<$$

$$<< 2^{-nr_1/2} \| f \|_{B^r_{1,\theta}} 2^{-n(r_1 - 1)/2} n^{(\nu-1)(1/2 - 1/\theta)} \le 2^{-n(r_1 - 1/2)} n^{(\nu-1)(1/2 - 1/\theta)}. \qquad (16)$$

Таким образом, для $I_1$ получаем требуемую оценку приближения.

Подставляя в $I_2$ значение $\alpha$, находим

$$I_2 = 2^{-n(r_1 - 1 + 1/q)(r_1 - 1/2)/(r_1 - 1 + 1/q)} n^{(\nu-1)(1/q - 1/\theta)_+} =$$

$$= 2^{-n(r_1 - 1/2)} n^{(\nu-1)(1/q - 1/\theta)_+}. \qquad (17)$$

Сопоставляя (17) и (16) и используя (12), получаем оценку

$$\| f(\cdot) - P(\Omega_M, \cdot) \|_q << 2^{-n(r_1 - 1/2)} n^{(\nu-1)(1/2 - 1/\theta)} \asymp \frac{(\log^{\nu-1} M)^{r_1 - 1/\theta}}{M^{r_1 - 1/2}}.$$

Пусть теперь $1 \le \theta < 2$. Тогда полагаем

$$\alpha = \frac{r_1 - 1/2}{r_1 - 1 + 1/q} - \frac{(\nu-1)(1/2 - 1/\theta)\log n}{(r_1 - 1 + 1/q)n}, \tag{18}$$

$$N_s = [2^{nr_1} n^{\nu-1} 2^{-(s,\gamma)(r_1-1)} 2^{(s,r)\theta} \| A_s(f,\cdot)\|_1^\theta] + 1.$$

Нетрудно проверить, что при таком выборе чисел $N_s$

$$\sum_{n \le (s,\gamma') < \alpha n} N_s << 2^n n^{\nu-1} \asymp M$$

и для $I_1$ имеем

$$I_1 \le 2^{-nr_1/2} n^{-(\nu-1)/2} \left( \sum_{n \le (s,\gamma') < \alpha n} 2^{(s,\gamma)(r_1+1)} 2^{-(s,r)\theta} \| A_s(f,\cdot)\|_1^{2-\theta} \right)^{1/2} =$$

$$= 2^{-nr_1/2} n^{-(\nu-1)/2} \left( \sum_{n \le (s,\gamma') < \alpha n} 2^{(s,\gamma)(1-r_1)} 2^{(s,r)(2-\theta)} \| A_s(f,\cdot)\|_1^{2-\theta} \right)^{1/2}.$$

Применив к последней сумме неравенство Гельдера с показателем $\theta/(2-\theta)$, а затем воспользовавшись соотношением (14), продолжим последнюю оценку:

$$\le 2^{-nr_1/2} n^{-(\nu-1)/2} \left( \sum_{n \le (s,\gamma') < \alpha n} 2^{(s,r)\theta} \| A_s(f,\cdot)\|_1^{\theta} \right)^{1/\theta - 1/2} \times$$

$$\times \left( \sum_{n \le (s,\gamma') < \alpha n} 2^{-(s,\gamma)(r_1-1)\theta/(2\theta-2)} \right)^{1-1/\theta} <<$$

$$<< 2^{-nr_1/2} n^{-(\nu-1)/2} 2^{-n(r_1-1)-1/2} n^{(\nu-1)(1-1/\theta)} = 2^{-n(r_1-1/2)} n^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)}.$$

При значении $\alpha$ из (18) убеждаемся, что $I_2 \le I_1$ и, следовательно, и в случае $1 \le \theta < 2$ требуемая оценка сверху установлена. Оценка снизу следует из теоремы 1 при $q = 2$. Теорема доказана.

Теперь, как и в случае $1 < q \le 2$, сформулируем соответствующие результаты на классах $W^r_{1,\alpha}$ и $H^r_1$.

**Теорема 2′.** *Пусть* $2 \le q < \infty$, $r_1 > 1$. *Тогда справедливо соотношение*

$$e_M(H^r_1, L_q) \asymp \frac{(\log^{\nu-1} M)^{r_1}}{M^{r_1 - 1/2}}.$$

Оценка следует из теоремы 2 при $\theta = \infty$.

**Теорема 2″.** *При* $2 \le q < \infty$, $r_1 > 1$ *справедлива оценка*

$$e_M(W^r_{1,\alpha}, L_q) \asymp \frac{(\log^{\nu-1} M)^{r_1}}{M^{r_1 - 1/2}}.$$

***Доказательство.*** Оценка сверху следует из теоремы 2′ согласно вложению $W^r_{1,\alpha} \subset H^r_1$. Оценку снизу получим из теоремы 1.1 из [7] поскольку

$$e_M(W^r_{1,\alpha}, L_q) \ge e_M(F_{r,\alpha}, L_q) \asymp \frac{(\log^{\nu-1} M)^{r_1}}{M^{r_1 - 1/2}}.$$

Сопоставляя теоремы 2′ и 2″, обнаруживаем, что порядки величин (1) на классах $W^r_{1,\alpha}$ и $H^r_1$, как и в случае $1 < q \le 2$, совпадают, но здесь, в отличие от случая $1 < q \le 2$, полиномы с гармониками из гиперболического креста уже не дают порядков наилучших тригонометрических приближений.

Рассмотрение классов $B^r_{1,\theta}$ как и в предыдущем случае, позволяет уменьшать порядки наилучших тригонометрических приближений по мере убывания параметра $\theta$ (сужение классов $B^r_{1,\theta}$) и добиться того, что при $1 \le \theta < \infty$ $e_M(B^r_{1,\theta}, L_q) << e_M(F, L_q)$, где $F$ либо $W^r_{1,\alpha}$, либо $H^r_1$.

Перейдем к изучению поведения величины (1) в равномерной метрике.

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 3.** *Пусть* $1 \le p \le 2$, $r_1 > 1/p$ *и* $1 \le \theta \le \infty$. *Тогда*

$$(M^{-1}\log^{\nu-1}M)^{r_1-1/p+1/2}(\log^{\nu-1}M)^{1/2-1/\theta} << e_M(B^r_{p,\theta}, L_\infty) <<$$

$$<< (M^{-1}\log^{\nu-1}M)^{r_1-1/p+1/2}(\log^{\nu-1}M)^{(1/2-1/\theta)_+}\sqrt{\log M}.$$

Прежде чем перейти к доказательству, отметим, что в случае $1 < p \le 2 < q < < \infty$ известны точные порядки величин $e_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$ (см. [1, 2]).

***Доказательство.*** Установим оценку сверху. Рассмотрим сначала случай $p = 2$. По заданному $M$ подберем $l$ из соотношения $M \asymp 2^l l^{\nu-1}$ и для функции $f \in B^r_{2,\theta}$ построим приближающий полином $t_M(\cdot)$ в виде

$$t_M(\cdot) = \sum_{(s,\gamma')<l} \delta_s(f,\cdot) + T(\cdot).$$

Слагаемое $T(\cdot)$ будет построено в процессе получения оценки.

Пусть $\alpha > 1$ — некоторое число, которое подберем ниже. Тогда

$$\|f(\cdot) - t_M(\cdot)\|_\infty = \left\| f(\cdot) - \sum_{(s,\gamma')<\alpha l} \delta_s(f,\cdot) + \sum_{l \le (s,\gamma')<\alpha l} \delta_s(f,\cdot) - T(\cdot) \right\|_\infty \le$$

$$\le \left\| f(\cdot) - \sum_{(s,\gamma')<\alpha l} \delta_s(f,\cdot) \right\|_\infty + \left\| \sum_{l \le (s,\gamma')<\alpha l} \delta_s(f,\cdot) - T(\cdot) \right\|_\infty = \sum\nolimits_6 + \sum\nolimits_7. \quad (19)$$

Оценим сначала вторую сумму в (19). Для этого нам потребуется вспомогательное утверждение [7].

**Лемма 1.** *Для любого тригонометрического полинома* $T(\Omega_M, \cdot)$ *с числом гармоник не более* $M$, *степень которого не выше* $N$, *и для любого натурального* $L \le M$ *существует тригонометрический полином* $T(\Omega_L, \cdot)$, *у которого не более* $L$ *коэффициентов отличны от нуля и такой, что*

$$\|T(\Omega_M, \cdot) - T(\Omega_L, \cdot)\|_\infty << (MN^{-1}\log N)^{1/2}\|T(\Omega_M, \cdot)\|_2$$

*и* $\Omega_L \subset \Omega_M$.

Отметим, что под степенью тригонометрического полинома понимается наибольшая из степеней экспонент, а степень $e^{i(k,\cdot)}$ равна $|k_1| + \ldots + |k_m|$. Таким образом, согласно лемме 1 для $\sum_7$ будем иметь

$$\sum\nolimits_7 \le \left\| \sum_{j=l}^{[\alpha l]+1} \sum_{j \le (s,\gamma')<j+1} \delta_s(f,\cdot) - T(\cdot) \right\|_\infty \le \sum_{j=l}^{[\alpha l]+1} \left\| \sum_{j \le (s,\gamma')<j+1} \delta_s(f,\cdot) - T_{n_j}(\cdot) \right\|_\infty <<$$

$$<< \sum_{j=l}^{[\alpha l]+1} \left(n_j^{-1} 2^j j^\nu\right)^{1/2} \left\| \sum_{j \le (s,\gamma')<j+1} \delta_s(f,\cdot) \right\|_2, \quad (20)$$

где $T_{n_j}(\cdot)$ — тригонометрические полиномы с числом гармоник не более $n_j$. Последняя сумма в (20) оценивается согласно теореме 1 из [8] следующим образом:

$$\Big\| \sum_{j\le(s,\gamma')<j+1} \delta_s(f,\cdot) \Big\|_2 \ll 2^{-jr_1} n^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+}. \qquad (21)$$

Учитывая (21) и (20), находим

$$\sum\nolimits_7 \ll \sum_{j=l}^{[\alpha l]+1} \left(n_j^{-1} 2^j j^{\nu}\right)^{1/2} 2^{-jr_1} j^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+} =$$

$$= \sum_{j=l}^{[\alpha l]+1} \left(n_j^{-1} j^{\nu}\right)^{1/2} 2^{-j(r_1-1/2)} j^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+}. \qquad (22)$$

Чтобы продолжить оценку (22), подберем числа $n_j$, $j = l, \ldots, [\alpha l]+1$ из равенства

$$n_j = [2^{l(r_1+1/2)} 2^{-j(r_1-1/2)} j^{\nu-1}] + 1.$$

Тогда легко проверить, что $\sum_{j=l}^{[\alpha l]+1} n_j \ll M$, и, подставляя значение $n_j$ в (22), получаем

$$\sum\nolimits_7 \ll 2^{-l(r_1+1/2)/2} \sum_{j=l}^{[\alpha l]+1} j^{-(\nu-1)/2} 2^{-j(r_1-1/2)/2} j^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+} j^{\nu/2} =$$

$$= 2^{-l(r_1+1/2)/2} \sum_{j=l}^{[\alpha l]+1} 2^{-j(r_1-1/2)/2} j^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+} j^{1/2} \asymp$$

$$\asymp 2^{-lr_1} l^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+} l^{1/2}. \qquad (23)$$

Перейдем к оценке $\sum_6$. Применяя последовательно неравенства Минковского, Никольского и Гельдера и используя оценку (14), имеем

$$\sum\nolimits_6 \ll \sum_{(s,\gamma')>\alpha l} \|\delta_s(f,\cdot)\|_\infty \ll \sum_{(s,\gamma')>\alpha l} 2^{\|s\|_1/2} \|\delta_s(f,\cdot)\|_2 \le$$

$$\le \sum_{(s,\gamma')>\alpha l} 2^{(s,\gamma)/2} \|\delta_s(f,\cdot)\|_2 \le$$

$$\le \left( \sum_{(s,\gamma')>\alpha l} 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f,\cdot)\|_2^\theta \right)^{1/\theta} \left( \sum_{(s,\gamma')>\alpha l} 2^{-(s,\gamma)(r_1-1/2)\theta/(\theta-1)} \right)^{1-1/\theta} \ll$$

$$\ll \|f\|_{B^r_{2,\theta}} 2^{-\alpha l(r_1-1/2)} l^{(\nu-1)(1-1/\theta)} \le 2^{-\alpha l(r_1-1/2)} l^{(\nu-1)(1-1/\theta)}. \qquad (24)$$

Выбирая число $\alpha$ из равенства

$$\alpha = \frac{r_1}{r_1-1/2} - \frac{(\nu-1)\log l}{2l(r_1-1/2)}$$

и подставляя в (24), получаем требуемую оценку

$$\sum\nolimits_6 \ll 2^{-lr_1} l^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)}. \qquad (25)$$

Сопоставляя теперь (25) и (23) и используя соотношение (19), получаем требуемую оценку в случае $p = 2$, т. е.

$$e_M\left(B^r_{2,\theta}, L_\infty\right) \ll 2^{-lr_1} l^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+} l^{1/2} \asymp$$

$$\asymp (M^{-1}\log^{\nu-1}M)^{r_1}(\log^{\nu-1}M)^{(1/2-1/\theta)_+}\sqrt{\log M}. \tag{26}$$

Пусть $1 \le p < 2$. Тогда в силу неравенства разных метрик Никольского для $f \in B^r_{p,\theta}$ будем иметь

$$\|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta}\|A_s(f,\cdot)\|_p^\theta\right)^{1/\theta} \ge$$

$$\ge \left(\sum_s 2^{(s,r-1/p+1/2)\theta}\|A_s(f,\cdot)\|_2^\theta\right)^{1/\theta} = \|f\|_{B^{r-1/p+1/2}_{2,\theta}}.$$

Следовательно, $B^r_{p,\theta} \subset B^{r-1/p+1/2}_{2,\theta}$ и поэтому, заменяя в (26) $r$ на $r-1/p+$ $+1/2$, находим

$$e_M\left(B^r_{p,\theta}, L_\infty\right) \le e_M\left(B^{r-1/p+1/2}_{2,\theta}, L_\infty\right) \ll$$

$$\ll (M^{-1}\log^{\nu-1}M)^{r_1-1/p+1/2}(\log^{\nu-1}M)^{(1/2-1/\theta)_+}\sqrt{\log M}.$$

Оценка сверху установлена.

Оценка снизу получается из известных результатов. В случае $1 < p \le 2$ она следует из теоремы 1 из [1], а при $p = 1$ — из теоремы 2.

Отправляясь от теоремы 3 и используя полученные ранее оценки величин $e_M\left(B^r_{p,\theta}, L_q\right)$ в других ситуациях, легко получить следующие утверждения.

**Теорема 3′.** *При* $1 < p \le 2$, $r_1 > 1/p$ *справедливы оценки*

$$(M^{-1}\log^{\nu-1}M)^{r_1-1/p+1/2}(\log^{\nu-1}M)^{(1/2-1/p)} \ll$$

$$\ll e_M\left(W^r_{p,\alpha}, L_\infty\right) \ll (M^{-1}\log^{\nu-1}M)^{r_1-1/p+1/2}\sqrt{\log M}.$$

***Доказательство.*** Поскольку при $1 < p \le 2$ $B^r_{p,p} \subset W^r_{p,\alpha} \subset B^r_{p,2}$ (см., например, [8]), то требуемые оценки следуют из теоремы 3 — сверху при $\theta = 2$, а снизу при $\theta = p$.

**Теорема 3″.** *При* $r_1 > 1$ *справедливы оценки*

$$M^{-r_1+1/2}(\log^{\nu-1}M)^{r_1} \ll e_M\left(W^r_{1,\alpha}, L_\infty\right) \ll M^{-r_1+1/2}(\log^{\nu-1}M)^{r_1}\sqrt{\log M}.$$

***Доказательство.*** Оценка снизу следует из теоремы 2″, поскольку при $q \le$ $\le \infty$

$$e_M\left(W^r_{1,\alpha}, L_\infty\right) \ge e_M\left(W^r_{1,\alpha}, L_q\right) \asymp M^{-r_1+1/2}(\log^{\nu-1}M)^{r_1},$$

а сверху — из теоремы 3 при $p = 1$ и $\theta = \infty$.

В заключение первой части работы сформулируем теорему об оценке $e_M\left(B^r_{p,\theta}, L_\infty\right)$ при $2 \le p < \infty$.

**Теорема 4.** *Пусть* $2 \le p < \infty$, $r_1 > 1/2$, $1 \le \theta \le \infty$. *Тогда*

$$(M^{-1}\log^{\nu-1}M)^{r_1}(\log^{\nu-1}M)^{1/2-1/\theta} \ll e_M\left(B^r_{p,\theta}, L_\infty\right) \ll$$

$$\ll (M^{-1}\log^{\nu-1}M)^{r_1}(\log^{\nu-1}M)^{(1/2-1/\theta)_+}\sqrt{\log M}.$$

***Доказательство.*** Оценка сверху следует из теоремы 3 при $p = 2$, поскольку при $2 \le p < \infty$ $B^r_{p,\theta} \subset B^r_{2,\theta}$. Оценка снизу следует из теоремы 2 из [1].

Отметим, что порядковые оценки величин $e_M(F, L_\infty)$, где $F$ — класс $W^r_{p,\alpha}$ либо $H^r_p$, $2 \le p < \infty$, установлены в [9].

**2. Приближение билинейными формами.** Пусть $L_q(\pi_{2m})$, $q=(q_1, q_2)$, обозначает множество функций $f(x,y)$, $x, y \in \pi_m$, с конечной „смешанной" нормой

$$\|f(x,y)\|_q = \big\| \|f(\cdot,y)\|_{q_1} \big\|_{q_2}.$$

Для $f\in L_q(\pi_{2m})$ определим наилучшее билинейное приближение порядка $M$:

$$\tau_M(f)_{q_1,q_2} = \inf_{u_i(x), v_i(y)} \left\| f(x,y) - \sum_{i=1}^{M} u_i(x) v_i(y) \right\|_q,$$

где $u_i \in L_{q_1}(\pi_m)$, $v_i \in L_{q_2}(\pi_m)$.

Здесь, используя полученные выше результаты, установим порядковые оценки билинейной аппроксимации функций вида $f(x,y)=f(x-y)$, $f(x)\in B^r_{p,\theta}$.

**Теорема 5.** *Пусть* $1<q_1\le 2$, $1\le q_2\le\infty$ *и* $1-1/q_1<r_1<1-2/q_1+ +1/\theta$. *Тогда*

$$\tau_M(B^r_{1,\theta})_{q_1,q_2} = \sup_{f\in B^r_{1,\theta}} \tau_M(f)_{q_1,q_2} \asymp M^{-(r_1-1+1/q_1)}.$$

***Доказательство.*** Оценка сверху следует из теоремы 1. Действительно, в силу теоремы 1 для любого $f\in B^r_{1,\theta}$ найдется множество $m$-мерных векторов $(k^1,\ldots,k^M)$ и чисел $c_1,\ldots,c_M$ таких, что при $1-1/q_1<r_1<1-2/q_1+1/\theta$

$$\left\| f(x) - \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j,x)} \right\|_{q_1} \ll M^{-(r_1-1+1/q_1)}. \tag{27}$$

С другой стороны,

$$\left\| f(x) - \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j,x)} \right\|_{q_1} = \left\| f(x-y) - \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j,x-y)} \right\|_{q_1,\infty} =$$

$$= \left\| f(x-y) - \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j,x)} e^{-i(k^j,y)} \right\|_{q_1,\infty}. \tag{28}$$

Полагая в последней сумме

$$u_j(x) = c_j e^{i(k^j,x)}, \quad v_j(y) = e^{-i(k^j,y)}$$

и сопоставляя (27) и (28), получаем искомую оценку.

Переходя к оценке снизу, заметим следующее. Поскольку установленная оценка сверху не зависит от размерности, то оценку снизу достаточно установить при $m=1$. Кроме того, достаточно рассмотреть случай $q_2=1$.

Пусть задано $M$. Подберем $n$ из соотношения $2^{n-1}\le M<2^n$ и рассмотрим функцию

$$f(x) = M^{-r_1}\big(V_{2^n}(x) - V_{2^{n-1}}(x)\big) \overset{\text{def}}{=} M^{-r_1} A_n(x),$$

где $V_l(x)$ — ядро Валле Пуссена порядка $2l-1$. Тогда

$$\|f\|_{B^r_{1,\theta}} \le M^{-r_1}\big(2^{nr_1\theta}\|A_n(x)\|_1^\theta\big)^{1/\theta} \ll M^{-r_1} 2^{nr_1} \ll 1$$

и, таким образом, функция $C_2 M^{-r_1} A_n(x) \in B^r_{1,\theta}$, $C_2>0$.

Пусть сначала $q_1 = 2$. Тогда, поскольку $A_n(x)$ удовлетворяет условиям леммы 2 (см. [10, с. 250]), то

$$\tau_M(A_n(x-y))_{2,1} \gg M^{1/2}$$

и, следовательно,

$$\tau_M(f(x-y))_{2,1} \gg M^{-r_1+1/2}.$$

Пусть теперь $1 < q_1 < 2$ и системы функций $u_i(x)$ и $v_i(y)$, $i = \overline{1,M}$, таковы, что

$$\left\| A_n(x-y) - \sum_{i=1}^{M} u_i(x) v_i(y) \right\|_{q_1,1} \le 2\tau_M(A_n(x-y))_{q_1,1}. \tag{29}$$

Тогда можно считать, что функции $u_i(x)$ и $v_i(y)$ являются тригонометрическими полиномами порядка $4M$ и для них справедлива оценка

$$\left\| A_n(x-y) - \sum_{i=1}^{M} u_i(x) v_i(y) \right\|_{q_1,1} \ll \tau_M(A_n(x-y))_{q_1,1}.$$

Далее, согласно неравенству разных метрик Никольского и соотношению (29) получим

$$\left\| A_n(x-y) - \sum_{i=1}^{M} u_i(x) v_i(y) \right\|_{2,1} \ll M^{(1/q_1-1/2)} \left\| A_n(x-y) - \sum_{i=1}^{M} u_i(x) v_i(y) \right\|_{q_1,1} \ll$$

$$\ll M^{1/q_1-1/2} \tau_M(A_n(x-y))_{q_1,1}. \tag{30}$$

Теперь, принимая во внимание, что

$$\left\| A_n(x-y) - \sum_{i=1}^{M} u_i(x) v_i(y) \right\|_{2,1} \gg M^{1/2},$$

и сопоставляя эту оценку с (30), получаем соотношение

$$\tau_M(A_n(x-y))_{q_1,1} \gg M^{-1/q_1+1}.$$

Отсюда и из определения функции $f(x)$ находим

$$\tau_M(f(x-y))_{q_1,q_2} \ge \tau_M(f(x-y))_{q_1,1} \gg M^{-r_1+1-1/q_1}.$$

Теорема доказана.

**Теорема 6.** *Пусть* $2 \le q_1 < \infty$, $1 \le q_2 \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$. *Тогда при* $r_1 > 1$

$$\tau_M(B^r_{1,\theta})_{q_1,q_2} \asymp M^{-r_1+1/2}(\log^{\nu-1} M)^{r_1-1/\theta}.$$

***Доказательство.*** Оценка сверху устанавливается аналогично оценке сверху в теореме 5. Для установления оценки снизу потребуется известная теорема Шмидта (см., например, [5, с. 10]), которую для удобства сформулируем.

**Теорема** *(Шмидта). Пусть функция* $K(x,y)$, $x, y \in \pi_m$, *такова, что* $\|K(x,y)\|_{2,2} < \infty$. *Тогда*

$$\inf_{u_i(x), v_i(y)} \left\| K(x,y) - \sum_{i=1}^{M} u_i(x) v_i(y) \right\|_{2,2} = \left( \sum_{j=M+1}^{\infty} \lambda_j \right)^{1/2},$$

*где* $\lambda_j$ *— невозрастающая последовательность собственных чисел оператора*

*$K^*K$, где $K$ — интегральный оператор с ядром $K(x,y)$, а $K^*$ — сопряженный ему оператор.*

Пусть числа $M$ и $n$ связаны соотношением $M \asymp 2^n n^{m-1}$ и $F_{r,n}(x)$ — функция, которая рассматривалась выше; $G$ — интегральный оператор

$$Gf(x) = (2\pi)^{-m} \int_{\pi_m} F_{r,n}(x-y) f(y)\,dy,$$

$G^*$ — сопряженный ему оператор и $\lambda_l$ — собственные числа оператора $G^*G$, расположенные в порядке убывания. Легко понять, что $\lambda_l$ будут совпадать с числами $\prod_{j=1}^m k_j^{-2r_1}$. Следовательно, в силу теоремы Шмидта будем иметь

$$\inf_{u_i(x), v_i(y)} \left\| F_{r,n}(x-y) - \sum_{i=1}^{M} u_i(x) v_i(y) \right\|_{2,2} = \left( \sum_{l \ge M+1}^{\infty} \lambda_l \right)^{1/2} n^{-(m-1)/\theta} \ge$$

$$\ge n^{-(m-1)/\theta} \left( \sum_{(s,1)=n+m} \prod_{j=1}^{m} \sum_{k_j = 2^{s_j-1}}^{2^{s_j}} k_j^{-2r_1} \right)^{1/2} \asymp$$

$$\asymp n^{-(m-1)/\theta} \left( \sum_{(s,1)=n+m} 2^{-\|s\|_1 (2r_1 - 1)} \right)^{1/2} \asymp 2^{-n(r_1 - 1/2)} n^{(m-1)(1/2 - 1/\theta)} \asymp$$

$$\asymp M^{-r_1 + 1/2} (\log^{m-1} M)^{r_1 - 1/\theta}. \tag{31}$$

Теперь покажем, каким образом оценку (31) распространить на случай $1 \le \le q_2 < 2$. Предварительно оценим $\| F_{r,n} \|_2$. Имеем

$$\| F_{r,n} \|_2 = n^{-(m-1)/\theta} \left( \sum_{(s,1) \le n+m} \prod_{j=1}^{m} \sum_{k_j = 2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1} k_j^{-2r_1} \right)^{1/2} =$$

$$= n^{-(m-1)/\theta} \left( \sum_{l=m}^{n+m} \sum_{(s,1)=l} \prod_{j=1}^{m} \sum_{k_j = 2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1} k_j^{-2r_1} \right)^{1/2} \asymp$$

$$\asymp n^{-(m-1)/\theta} \left( \sum_{l=m}^{n+m} 2^{-l(2r_1 - 1)} l^{m-1} \right)^{1/2} \asymp$$

$$\asymp 2^{-n(r_1 - 1/2)} n^{(m-1)(1/2 - 1/\theta)} \asymp M^{-r_1 + 1/2} (\log^{m-1} M)^{r_1 - 1/\theta}. \tag{32}$$

Далее, пусть задана некоторая система функций $u_i(x) \in L_2$, $v_i(y) \in L_1$, которые можно считать непрерывными. Обозначим через $\tilde{u}(x,y)$ ортогональную проекцию $F_{r,n}(x-y)$ на подпространство, порожденное системой функций $\{ u_i(x) \}_{i=1}^M$, и положим

$$R(x,y) = F_{r,n}(x-y) - \tilde{u}(x,y).$$

Тогда для любого $y \in \pi_m$

$$\left\| F_{r,n}(\cdot - y) - \sum_{i=1}^{M} u_i(x) v_i(y) \right\|_2 \ge \| R(\cdot, y) \|_2. \tag{33}$$

Оценим $\| R(x,y) \|_{2,1}$. С одной стороны, для каждого $y \in \pi_m$

$$\| R(\cdot, y) \|_2 \le \| F_{r,n} \|_2, \tag{34}$$

а с другой, используя теорему Шмидта, с помощью тех же рассуждений, что и при выводе оценки (31), убеждаемся, что

$$\| R(x, y)\|_{2,2} = \| F_{r,n}(x-y) - \tilde{u}(x, y) \|_{2,2} >> \| F_{r,n} \|_2. \tag{35}$$

Далее, согласно неравенству Гельдера и соотношению (34) имеем

$$\| R(x, y)\|_{2,2}^2 = \| R(x, y)\|_{2,1} \| R(x, y)\|_{2,\infty} \le \| R(x, y)\|_{2,1} \| F_{r,n}\|_2. \tag{36}$$

Отсюда, используя (35), в силу соотношений (33) и (32) получаем требуемую оценку

$$\inf_{u_i(x), v_i(y)} \left\| F_{r,n}(x-y) - \sum_{i=1}^{M} u_i(x) v_i(y) \right\|_{2,1} \ge$$

$$\ge \| R(x, y)\|_{2,1} >> \| F_{r,n}\|_2 \asymp M^{-r_1+1/2} (\log^{m-1} M)^{r_1 - 1/\theta}.$$

Теорема доказана.

В заключение сформулируем два результата, которые следуют из теорем 3, 4 и известных оценок.

**Теорема 7.** *При* $1 \le p \le 2$, $r_1 > 1/p$ *и* $1 \le \theta \le \infty$ *справедлива оценка*

$$(M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1 - 1/p + 1/2} (\log^{\nu-1} M)^{1/2 - 1/\theta} << \tau_M(B^r_{p,\theta})_{\infty,q} <<$$

$$<< (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1 - 1/p + 1/2} (\log^{\nu-1} M)^{(1/2 - 1/\theta)_+} \sqrt{\log M}, \quad 1 \le q \le \infty.$$

***Доказательство.*** Оценка сверху следует из теоремы 3. Оценку снизу в случае $1 < p \le 2$ получим как следствие теоремы 4 из [1], а при $p = 1$ — как следствие теоремы 6 настоящей работы.

**Теорема 8.** *Пусть* $2 \le p < \infty$, $r_1 > 1/2$, $1 \le \theta \le \infty$. *Тогда при* $1 \le q \le \infty$

$$(M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1} (\log^{\nu-1} M)^{1/2 - 1/\theta} << \tau_M(B^r_{p,\theta})_{\infty,q} <<$$

$$<< (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1} (\log^{\nu-1} M)^{(1/2 - 1/\theta)_+} \sqrt{\log M}.$$

***Доказательство.*** Оценка сверху следует из теоремы 4, а снизу — из теоремы 6 из [1].


1. *Романюк А. С.* Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения функций многих переменных из классов $B^r_{p,\theta}$. I // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 11. – С. 1535–1547.
2. *Романюк А. С.* О наилучших тригонометрических приближениях и колмогоровских поперечниках классов Бесова функций многих переменных // Там же. – 1993. – **45**, № 5. – С. 663–675.
3. *Романюк А. С.* Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения функций многих переменных из классов $B^r_{p,\theta}$. II // Там же. – №10. – С. 1411–1423.
4. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
5. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – 112 с.
6. *Романюк А. С.* О наилучших приближениях и колмогоровских поперечниках классов Бесова периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 1. – С. 79–92.
7. *Белинский Э. С.* Приближение периодических функций многих переменных „плавающей" системой экспонент и тригонометрические поперечники // Докл. АН СССР. – 1985. – **284**, № 6. – С. 1294–1297.
8. *Романюк А. С.* Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве $L_q$ // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 10. – С. 1398–1408.
9. *Belinskii E. S.* Approximation of functions of several variables by trigonometric polynomials with given number of harmonics, and estimates of ε-entropy // Anal. math. – 1989. – **15**, №2. – P. 67–74.
10. *Темляков В. Н.* Приближение периодических функций многих переменных комбинациями функций, зависящих от меньшего числа переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **173**. – С. 243–252.


Получено 19.05.94