УДК 515.125

І. Я. Олексів, канд. фіз.-мат. наук (Львів. політехн. ін-т)

ХАРАКТЕРИЗАЦІЯ ЛОКАЛЬНО ЗВ'ЯЗНИХ КОНТИНУУМІВ В ЕВКЛІДОВОМУ ПРОСТОРІ

It is proved that for any locally connected bounded continuum in Euclidean space E^n, $n \geq 2$, there is a sequence of embeddings of the segment $[0; 1]$ into E^n that converges uniformly to a continuous map of $[0; 1]$ onto the continuum.

Доведено, що для довільного локально зв'язного обмеженого континуума в евклідовому просторі E^n, $n \geq 2$, існує послідовність вкладень відрізка $[0; 1]$ у простір, яка рівномірно збігається до неперервного відображення відрізка $[0; 1]$ на континуум.

Теорема Хана–Мазуркевича–Серпінського [1, с. 261] стверджує, що довільний локально зв'язний метричний континуум є образом відрізка $I = [0; 1]$ при деякому неперервному відображенні. Тепер відомі різні характеризації локально зв'язних континуумів (бібліографію див. у [2]). Нижче доведена одна з форм теореми Хана–Мазуркевича–Серпінського для локально зв'язних континуумів в евклідовому просторі.

Означення 1. *Неперервне відображення h множини A в евклідів простір E^n називається майже простим (м. п.), якщо існує послідовність вкладень h_k: $A \to E^n$, яка рівномірно збігається до відображення h.*

Теорема. *Для довільного локально зв'язного континуума M в евклідовому просторі E^n, $n \geq 2$, існує майже просте відображення відрізка I на континуум.*

Теорема очевидна, якщо $M \subset E^n$, $n > 2$, а тому потребує доведення лише для $M \subset E^2$. При доведенні використовуються дендрити [1] (§ 51). Дендрит — це локально зв'язний континуум, що не містить простих замкнених кривих. Скінченний дендрит — це дендрит, що має скінченну множину кінцевих точок.

Означення 2 [2, с. 372]**.** *Будемо говорити, що континуум M можна наблизити послідовністю скінченних дендритів, якщо існує послідовність скінченних дендритів $D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_n \subset \ldots$ таких, що:*

1) *множина* $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n$ *є щільною в* M;

2) *якщо C — компонента множини $D_{n+1} \backslash D_n$, то* $\operatorname{diam} C < 2^{-n}$.

Уорд довів [2] (теорема 2), що локально зв'язний метризований континуум можна наблизити послідовністю скінченних дендритів.

Теорема спочатку буде доведена для випадку, коли M — скінченний дендрит на площині (лема 1). Далі континуум M наближаємо послідовністю скінченних дендритів D_n, $n = 1, 2, \ldots$, і будуємо рівномірно збіжну послідовність м. п. відображень H_n: $I \to D_n$. Границя $\lim\limits_{n \to \infty} H_n(t) = H(t)$ буде шуканим м. п. відображенням H: $I \to M$. Відображення H_n і H, а також інші відображення у підмножини площини, що розглядаються нижче, вважаються сюр'єктивними.

Сформулюємо допоміжні твердження. Якщо D — дендрит, то множину всіх його точок, що не є кінцевими точками, позначимо через D^*.

Лема 1. *Для кожного скінченного дендрита D на площині можна побудувати монотонно спадну послідовність жорданових околів $U_n(D^*)$, $n = 1, 2, \ldots$,* *множини* D^*, *послідовність м. п. відображень* $H(t;n)\colon I\to\partial U_n(D^*)$ *і м. п. відображення* $H\colon I\to D$, $H(0)=H(1)$, *які задовольняють умови:*

1) *послідовність околів* $U_n(D^*)$ *стягується монотонно до множини* D^*, *а тому* $D^*=\bigcap_n U_n(D^*)$;

2) *кожна границя* $\partial U_n(D^*)$ *містить всі кінцеві точки дендрита* D;

3) *якщо* Δ — *інтервал на* I *і множині* $H(\Delta)$ *не належать кінцеві точки дендрита* D, *то відображення* $H\colon \Delta\to E^2$ *є вкладенням;*

4) *для довільного інтервалу* $\Delta\subset I$ *всі відображення* $H(t;n)\colon \Delta\to E^2$ *є вкладеннями;*

5) *якщо* e — *довільна кінцева точка дендрита* D, *то множина* $H^{-1}(e)$ *складається з однієї точки і* $H_k^{-1}(e;n)=H^{-1}(e)$ *для всіх* $n=1,2,\ldots$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty} H(t;n)=H(t)$ *рівномірно на* I.

Означення 3. *Якщо* D — *скінченний дендрит, то* A*-послідовністю дендрита* D *назвемо четвірку, що складають дендрит* D, *послідовність жорданових околів* $U_n(D^*)$, *послідовність м. п. відображень* $H(t;n)\colon I\to\partial U_n(D^*)$ *і м. п. відображення* $H(t)\colon I\to D$, *які задовольняють твердження леми* 1. A*-послідовність дендрита* D *позначаємо* $A(D,U_n(D^*),H(t;n),H(t))$, *або коротко* $A(D,H(t))$.

Зауважимо, що з леми 1 випливає теорема для випадку, коли M — скінченний дендрит.

Лема 2. *Нехай* D *і* E — *скінченні дендрити, єдиною спільною точкою яких є кінцева точка* d_1 *дендрита* E, $G=D\bigcup E$ і $A(D,H_D(t))$ — A*-послідовність дендрита* D. *Тоді у множині* $H_D^{-1}(d_1)$ *існує така точка* t_1, *що для кожного числа* $\alpha_1>0$ *такого, що* $I_1=[t_1-\alpha_1;t_1+\alpha_1]\subset I$, *можна побудувати таку* A*-послідовність* $A(G,H_G(t))$ *дендрита* G, *що*

$$\begin{aligned} &H_G(t)\in H_D(I_1)\cup E, \text{ якщо } t\in I_1;\\ &H_G(t)=H_D(t), \text{ якщо } t\in I\setminus I_1. \end{aligned}\tag{1}$$

***Доведення леми* 1.** Нехай D — скінченний дендрит, d_1, $e_1,\ldots,e_m$, $m\geq 1$, — його кінцеві точки. Подамо дендрит D у вигляді $D=\bigcup_{i=1}^m B_i$, де $B_1=\cup d_1e_1$ — дуга з кінцями d_1, e_1, $\cup d_je_j$ — незвідна дуга між дендритом $B_1\bigcup\ldots\bigcup B_{j-1}$ і точкою e_j, $j=2,\ldots,m$. Позначимо $D_k=B_1\bigcup\ldots\bigcup B_k$, $k=1,\ldots,m$, і доведемо лему 1 індукцією за числом k.

Для випадку $k=1$, коли дендрит $D_1=B_1$ є дугою, доведення леми легко одержати, скориставшись класичними результатами з топології площини (наприклад, теоремою Антуана [3, с. 69]), і ми його не наводимо.

Припустимо, що лема вірна для кожного дендрита D_r, $r\leq k-1$, і доведемо її для дендрита $D_k=D_{k-1}\bigcup B_k$. Дендрит D_{k-1} і дуга $B_k=\cup d_ke_k$ мають єдину спільну точку d_k, кінець дуги B_k.

Будуємо A-послідовність $A\left(D_{k-1},U_n\left(D_{k-1}^*\right),H_{k-1}(t;n),H_{k-1}(t)\right)$ згідно з припущенням індукції і A-послідовність $A\left(B_k,U_n\left(B_k^*\right),h_k(t;n),h_k(t)\right)$ дуги

B_k. Для зручності будемо припускати, що $h_k(0) = h_k(1) = h_k(0;n) = h_k(1;n) = d_k$, а точка $H_{k-1}(0) = H_{k-1}(1)$ не є кінцевою точкою жодної дуги B_j, $j = 1, \ldots, m$.

Для доведеня леми опишемо A-послідовність $A\Big(D_k, U_n\Big(D_k^*\Big), H_k(t;n), H_k(t)\Big)$. Кроки у доведенні перенумеруємо.

1. *Побудова м. п. відображення* $H_k : I \to D_k$. Дуга $B_k = \cup d_k e_k$ перетинає границі $\partial U_n\Big(D_{k-1}^*\Big)$ для всіх досить великих номерів n. Якщо у кожній множині $B_k \cap \partial U_n\Big(D_{k-1}^*\Big)$ вибрати по одній довільній точці f_n, то $\lim f_n = d_k$. Очевидно, що послідовність $t_n = H_{k-1}^{-1}\big(f_n; n\big)$ також збіжна і нехай $t_0 = \lim t_n$. Тоді $t_0 \in H_{k-1}^{-1}\big(d_k\big)$, $t_0 \neq 0, 1$. Виберемо відрізок $I_\alpha = [t_0 - \alpha; t_0 + \alpha] \subset I$ так, щоб множина $H_{k-1}(I_\alpha)$ не містила точки $H_{k-1}(0) = H_{k-1}(1)$, а також кінцевих точок дендрита D_{k-1}, крім, можливо, точки $d_k = H_{k-1}(t_0)$, якщо вона є кінцевою.

Розіб'ємо відрізок I на 6 відрізків $\Delta_1, \ldots, \Delta_6$, що не мають попарно спільних внутрішніх точок, точками t_0, $t_0 \pm \alpha/2$, $t_0 \pm \alpha$, нумеруючи ці відрізки в порядку їх розміщення на I. Для кожного $i = 1, \ldots, 6$ побудуємо лінійні сюр'єктивні відображення l_i, що визначаються умовами:

$$l_1:\ \Delta_1 = [0; t_0 - \alpha) \to [0; t_0 - \alpha) \text{ — тотожне відображення,}$$

$$l_2:\ \Delta_2 = \left[t_0 - \alpha; t_0 - \frac{\alpha}{2}\right) \to [t_0 - \alpha; t_0), \quad l_2(t_0 - \alpha) = t_0 - \alpha,$$

$$l_3:\ \Delta_3 = \left[t_0 - \frac{\alpha}{2}; t_0\right) \to \left[0; \frac{1}{2}\right), \quad l_3\left(t_0 - \frac{\alpha}{2}\right) = 0,$$

$$l_4:\ \Delta_4 = \left[t_0; t_0 + \frac{\alpha}{2}\right) \to \left[\frac{1}{2}; 1\right), \quad l_4(t_0) = \frac{1}{2},$$

$$l_5:\ \Delta_5 = \left[t_0 + \frac{\alpha}{2}; t_0 + \alpha\right) \to [t_0; t_0 + \alpha), \quad l_5\left(t_0 + \frac{\alpha}{2}\right) = t_0,$$

$$l_6:\ \Delta_6 = [t_0 + \alpha; 1] \to [t_0 + \alpha; 1] \text{ — тотожне відображення.}$$

Відображення $l : I \to I$, визначене умовою $l(t) = l_i(t)$, якщо $t \in \Delta_i$, є лінійним на кожному відрізку Δ_i, а точки $t_0 \pm \alpha/2$ є його точками розриву.

Побудуємо відображення

$$H_k(t) = \begin{cases} H_{k-1}\big(l(t)\big), & \text{якщо } t \in I \setminus \big(\Delta_3 \cup \Delta_4\big); \\ h_k\big(l(t)\big), & \text{якщо } t \in \Delta_3 \cup \Delta_4. \end{cases}$$

Очевидно, що $H_k(0) = H_k(1)$, $H_k(I) = D_k$ і $H_k(I_\alpha) = B_k \cup H_{k-1}(I_\alpha)$. Відображення $H_k(t)$ неперервне і на кожному відрізку $\Delta \subset I$ такому, що множині $H_k(\Delta)$ не належать кінцеві точки дендрита D_k, воно є вкладенням, а тому виконується умова 3 леми 1. Нижче покажемо, що $H_k(t)$ — м. п. відображення.

***Зауваження* 1.** Розглянуті дендрит D_{k-1} і дуга B_k задовольняють умови леми 2, а відображення $H_{k-1}(t)$ і $H_k(t)$ — умови, подібні до (1), а саме

$$H_k(t) \in H_{k-1}(I_\alpha) \cup B_k, \text{ якщо } t \in I_\alpha;$$

$$H_k(t) = H_{k-1}(t), \text{ якщо } t \in I \setminus I_\alpha.$$

2. *Побудова монотонно спадної послідовності околів* $U_n\left(D_k^*\right)$. Будемо припускати, що границі $\partial U_n\left(D_{k-1}^*\right)$ і $\partial U_n\left(B_k^*\right)$ околів $U_n\left(D_{k-1}^*\right)$ і $U_n\left(B_k^*\right)$ є локально поліедральними множинами (крім, можливо, кінцевих точок дендрита D_{k-1} і дуги B_k), які знаходяться у загальному положенні в околах спільних точок цих множин (крім, можливо, точки d_k, якщо вона є кінцевою точкою дендрита D_{k-1}).

Розглянемо спочатку випадок, коли точка d_k не є кінцевою точкою дендрита D_{k-1}.

Окіл $U_n\left(D_k^*\right)$ визначимо як внутрішність замикання об'єднання всіх обмежених компонент множини $E^2 \setminus \left(\partial U_n\left(D_{k-1}^*\right) \cup \partial U_n\left(B_k^*\right)\right)$. З визначення випливає, що окіл $U_n\left(D_k^*\right)$ є диском, його границя $\partial U_n\left(D_k^*\right)$ є локальним поліедром в кожній точці, за винятком, можливо, кінцевих точок дендрита D_k, а також $U_{n+1}\left(D_k^*\right) \subset U_n\left(D_k^*\right)$.

При побудові м. п. відображення $H_k(t\,; n)\colon I \to \partial U_n\left(D_k^*\right)$ множину $U_n\left(D_k^*\right)$ зручно розглядати як результат приєднання до околу $U_n\left(D_{k-1}^*\right)$ дисків $F_1, \ldots$ $\ldots, F_s$, що відтинаються компонентами множини $\partial U_n\left(B_k^*\right) \setminus U_n\left(D_{k-1}^*\right)$ від множини $E^2 \setminus U_n\left(D_{k-1}^*\right)$:

$$U_n\left(D_k^*\right) = \operatorname{Int}\left(\overline{U_n\left(D_{k-1}^*\right)} \cup \overline{\left(F_1 \cup \ldots \cup F_s\right)}\right). \tag{2}$$

Оскільки будь-які два диски цього об'єднання або не мають спільних точок, або один з них міститься в іншому, то залишимо у (2) тільки максимальні диски (тобто такі, що не містяться в інших дисках об'єднання). Для них збережемо позначення $F_1, \ldots, F_s$ і запис (2). З побудови видно, що кожна границя $\partial U_n\left(D_k^*\right)$ містить всі кінцеві точки дендрита D_k, а тому виконується умова 2 леми 1.

3. *Побудова послідовності відображень* $H_k(t\,; n)$. Нехай $A\left(D_{k-1}, U_n(D_{k-1}^*),\right.$ $\left.H_{k-1}(t; n), H_{k-1}(t)\right)$ і $A\left(B_k, U_n\left(B_k^*\right), h_k(t; n), h_k(t)\right)$ — визначені вище A-послідовності.

Будемо припускати, що окіл $U_n\left(B_k^*\right)$ перетинає ті і тільки ті компоненти множини $\partial U_n\left(D_{k-1}^*\right) \setminus D_{k-1}$, які перетинаються дугою B_k (цього можна досягти за рахунок невеликої зміни околів $U_n\left(B_k^*\right)$). Тому існує такий номер N, що для всіх $n > N$ обидві множини $E_{nk} \overset{\mathrm{df}}{=} U_n\left(B_k^*\right) \cap \partial U_n\left(D_{k-1}^*\right)$ і $B_k \cap$ $\cap\, \partial U_n\left(D_{k-1}^*\right)$ належать тим дугам-компонентам множини $\partial U_n\left(D_{k-1}^*\right) \setminus D_{k-1}$ (позначимо їх Γ_n), що мають однакові спільні кінцеві точки (які є кінцями дендрита D_{k-1}). Позначимо через $\cup a_n^{k-1} b_n^{k-1}$ найменшу дугу на Γ_n, що містить множину E_{nk} і має кінці у точках a_n^{k-1} і b_n^{k-1}. Очевидно, що a_n^{k-1}, $b_n^{k-1} \in E_{nk}$. Подібно на кривій $\partial U_n\left(B_k^*\right)$ вибираємо найменшу дугу, що містить множину E_{nk} і точку d_k і позначаємо її $\cup a_n^k b_n^k$ (a_n^k, b_n^k — її кінці). Позначення виберемо так, щоб $a_n^{k-1} \preccurlyeq a_n^k \prec b_n^k \preccurlyeq b_n^{k-1}$ на дузі Γ_n.

З побудови випливає, що для $i = k-1, k$ маємо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^i = \lim\limits_{n\to\infty} b_n^i = d_k = D_{k-1} \cap B_k = H_{k-1}(t_0) = h_k(0; n) = h_k(1; n)$, а тому

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}\left(\cup\, a_n^i b_n^i\right) = 0, \quad i = k-1, k. \tag{3}$$

Позначимо також $\cup\, \widetilde{a_n^{k-1} b_n^{k-1}} = \partial U_n\left(D_{k-1}^*\right) \setminus \left(\cup\, a_n^{k-1} b_n^{k-1}\right)$ і $\cup\, \widetilde{a_n^k b_n^k} = \partial U_n\left(B_k^*\right) \setminus \left(\cup\, a_n^k b_n^k\right)$. Для $i, j = k-1, k$ визначимо

$$\alpha_{jn}^i = \begin{cases} H_{k-1}^{-1}\left(a_n^i; n\right), & j = k-1; \\ h_k^{-1}\left(a_n^i; n\right), & j = k, \end{cases} \qquad \beta_{jn}^i = \begin{cases} H_{k-1}^{-1}\left(b_n^i; n\right), & j = k-1; \\ h_k^{-1}\left(b_n^i; n\right), & j = k. \end{cases} \tag{4}$$

Очевидно, що $\alpha_{k-1\,n}^{k-1} \le \alpha_{k-1\,n}^{k} < \beta_{k-1\,n}^{k} \le \beta_{k-1\,n}^{k-1}$ (в усякому разі цього можна домогтися за рахунок збільшення номера n). Крім того, не зменшуючи загальності, припускаємо, що $0 < \alpha_{kn}^i < 1/2 < \beta_{kn}^i < 1$. Оскільки дуга B_k має єдину спільну точку d_k з дендритом D_{k-1}, а дуга $\cup\, a_n^{k-1} b_n^{k-1} \subset \Gamma_n$ не містить кінцевих точок дендрита D_{k-1}, то на основі припущення індукції з тверджень 2–4, 6 леми 1 для $i = k-1, k$ одержуємо

$$\begin{gathered} \lim_{n\to\infty} \alpha_{k-1\,n}^i = \lim_{n\to\infty} \beta_{k-1\,n}^i = t_0, \\ \lim_{n\to\infty} \alpha_{kn}^i = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \beta_{kn}^i = 1. \end{gathered} \tag{5}$$

Якщо тепер $I_\alpha \subset I$ — відрізок, вибраний у п. 1, і ε — досить мале число, то на основі (3) існує такий номер $N_\varepsilon > N$, що для $i = k-1, k$ і для всіх $n > N_\varepsilon$ маємо

$$\operatorname{diam}\left(\cup\, a_n^i b_n^i\right) < \varepsilon, \quad \operatorname{diam}\left(\cup\, \widetilde{a_n^i b_n^i}\right) > \varepsilon, \quad \cup\, a_n^{k-1} b_n^{k-1} \subset \Gamma_n,$$

$$t_0 - \alpha < \alpha_{k-1\,n}^{k-1} < \beta_{k-1\,n}^{k-1} < t_0 + \alpha, \quad H_{k-1}(0; n) \notin H_{k-1}(I_\alpha; n).$$

Переходимо до опису відображення $H_k(t; n)$. Нехай $t \in I$. Тоді $H_{k-1}(t; n) \in \partial U_n\left(D_{k-1}^*\right)$. Якщо до того ж $H_{k-1}(t; n) \in \partial U_n\left(D_k^*\right)$, то покладаємо $H_k(t; n) = H_{k-1}(t; n)$. Якщо $H_{k-1}(t; n) \notin \partial U_n\left(D_k^*\right)$, то $H_{k-1}(t; n) \in U_n\left(D_k^*\right)$, і тоді окіл $U_n\left(D_k^*\right)$ будемо розглядати як об'єднання дисків (2). У цьому випадку точка $H_{k-1}(t; n)$ є спільною граничною точкою деякого максимального диска F_i, $i = 1, \ldots, s$, і диска $U_n\left(D_{k-1}^*\right)$, а тому існує дуга $\gamma_i = \overline{F_i} \cap \overline{U_n\left(D_{k-1}^*\right)}$, якій належить точка $H_{k-1}(t; n)$. Оскільки $\gamma_i \subset \cup\, a_n^{k-1} b_n^{k-1} \subset \Gamma_n$, то $\operatorname{diam} \gamma_i < \varepsilon$. Дуги $\tilde{\gamma}_i = \partial F_i \setminus \gamma_i$, $i = 1, \ldots, s$, лежать на кривій $\partial U_n\left(B_k^*\right)$, причому серед цих дуг є одна (нехай $\tilde{\gamma}_s$), що співпадає з дугою $\cup\, \widetilde{a_n^k b_n^k}$, а інші дуги $\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_{s-1}$ лежать на дузі $\cup\, a_n^k b_n^k$. Тому $\operatorname{diam} \tilde{\gamma}_s > \varepsilon$ (назвемо цю дугу „великою"), а $\operatorname{diam} \tilde{\gamma}_j < \varepsilon$, $j = 1, \ldots, s-1$, (назвемо ці дуги „малими"). Зауважимо, що оскільки $\tilde{\gamma}_s = \cup\, \widetilde{a_n^k b_n^k}$, то

$h_k^{-1}(\tilde{\gamma}_s; n) = \left[\alpha_{kn}^k; \beta_{kn}^k\right]$, $H_{k-1}^{-1}(\gamma_s; n) = \left[\alpha_{k-1n}^k; \beta_{k-1n}^k\right]$.

Для кожної дуги γ_i, $i = 1, \ldots, s$, визначимо відрізок $\delta_i = H_{k-1}^{-1}(\gamma_i; n)$. Очевидно, що $\delta_i \cap \delta_{i'} = \varnothing$, якщо $i \neq i'$, $i' = 1, \ldots, s$, і кожне відображення $H_{k-1}(t; n)$: $\delta_i \to \gamma_i$ є гомеоморфізмом. Щоб дістати відображення $H_k(t; n)$, змінимо відображення $H_{k-1}(t; n)$ на кожному з відрізків $\delta_1, \ldots, \delta_s$. А саме, для кожної „малої" дуги $\tilde{\gamma}_j$, $j = 1, \ldots, s-1$, побудуємо довільний гомеоморфізм q_j: $\delta_j \to \tilde{\gamma}_j$ так, щоб відображення $\tilde{H}_{k-1}(t; n)$, визначене умовою

$$\tilde{H}_{k-1}(t; n) = \begin{cases} H_{k-1}(t; n), & t \in I \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{s-1} \delta_j\right); \\ q_j(t), & t \in \delta_j, \quad j = 1, \ldots, s-1, \end{cases}$$

було неперервним на I. Оскільки $\operatorname{diam} F_j < 2\varepsilon$, $j = 1, \ldots, s-1$, то $\left|\tilde{H}_{k-1}(t; n) - H_{k-1}(t; n)\right| < 2\varepsilon$, $t \in I$, $n > N_\varepsilon$.

Залишилось побудувати відображення відрізка $\delta_s = \left[\alpha_{k-1n}^k; \beta_{k-1n}^k\right]$ на „велику" дугу $\tilde{\gamma}_s$, що ми зробимо з допомогою міркувань, подібних до проведених у п. 1. Розіб'ємо відрізок I на 6 відрізків $\Delta_1, \ldots, \Delta_6$, що не мають попарно спільних внутрішніх точок, точками t_0, $t_0 \pm \alpha/2$, $t_0 \pm \alpha$, нумеруючи ці відрізки в порядку їх розміщення на I. Для кожного $i = 1, \ldots, 6$ побудуємо лінійні сюр'єктивні відображення l_{in}, що визначаються умовами:

l_{1n}: $\Delta_1 = [0; t_0 - \alpha) \to [0; t_0 - \alpha)$ — тотожне відображення,

l_{2n}: $\Delta_2 = \left[t_0 - \alpha; t_0 - \dfrac{\alpha}{2}\right) \to \left[t_0 - \alpha; \alpha_{k-1n}^k\right)$, $\quad l_{2n}(t_0 - \alpha) = t_0 - \alpha$,

l_{3n}: $\Delta_3 = \left[t_0 - \dfrac{\alpha}{2}; t_0\right) \to \left[\alpha_{kn}^k; \dfrac{1}{2}\right)$, $\quad l_{3n}\left(t_0 - \dfrac{\alpha}{2}\right) = \alpha_{kn}^k$,

l_{4n}: $\Delta_4 = \left[t_0; t_0 + \dfrac{\alpha}{2}\right) \to \left[\dfrac{1}{2}; \beta_{kn}^k\right)$, $\quad l_{4n}(t_0) = \dfrac{1}{2}$,

l_{5n}: $\Delta_5 = \left[t_0 + \dfrac{\alpha}{2}; t_0 + \alpha\right) \to \left[\beta_{k-1n}^k; t_0 + \alpha\right)$, $\quad l_{5n}\left(t_0 + \dfrac{\alpha}{2}\right) = \beta_{k-1n}^k$,

l_{6n}: $\Delta_6 = [t_0 + \alpha; 1] \to [t_0 + \alpha; 1]$ — тотожне відображення.

Відображення l_n: $I \to I$, визначене умовою $l_n(t) = l_{in}(t)$, якщо $t \in \Delta_i$, є лінійним на кожному відрізку Δ_i, а точки $t_0 \pm \alpha/2$ є його точками розриву.

Відображення

$$H_k(t; n) = \begin{cases} \tilde{H}_{k-1}(l_n(t); n), & t \in I \setminus (\Delta_3 \cup \Delta_4); \\ h_k(l_n(t); n), & t \in \Delta_3 \cup \Delta_4, \end{cases}$$

є неперервним на I внаслідок (4). З побудови випливає, що для довільного інтервалу $\Delta \subset I$ всі відображення $H_k(t; n)$: $\Delta \to E^2$ є вкладеннями, а тому виконується умова 4 леми 1. Якщо e — довільна кінцева точка дендрита D_k, то очевидно, що множина $H_k^{-1}(e)$ складається з єдиної точки і $H_k^{-1}(e; n) = H_k^{-1}(e)$ для всіх $n = 1, 2, \ldots$ (зокрема, $H_k^{-1}(e_k; n) = H_k^{-1}(e_k) = h_k^{-1}(e_k; n) = h_k^{-1}(e_k)$, якщо e_k — кінець дуги B_k, $e_k \neq d_k$), а тому виконується також умова 5 леми 1.

Переконаємось, що $\lim\limits_{n\to\infty} H_k(t;n) = H_k(t)$ рівномірно на I. З визначення відображень $l_n(t)$ і з (5) випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} l_n(t) = l(t)$ рівномірно на I. Використовуючи далі визначення відображень $H_k(t;n)$ і $\tilde{H}_{k-1}(t;n)$, для всіх досить великих номерів n дістаємо нерівності

$$|H_k(t;n) - H_k(t)| \leq \left|\tilde{H}_{k-1}\left(l_{in}(t);n\right) - H_{k-1}\left(l_{in}(t);n\right)\right| +$$

$$+ |H_{k-1}(l_{in}(t);n) - H_{k-1}(l(t))|, \text{ якщо } t \in \Delta_i,\ i = 1, 2, 5, 6,$$

або

$$|H_k(t;n) - H_k(t)| \leq |h_k(l_{in}(t);n) - h_k(l(t))|, \text{ якщо } t \in \Delta_i,\ i = 3, 4.$$

З цих нерівностей на основі властивості одностайної неперервності рівномірно збіжної послідовності відображень випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} H_k(t;n) = H_k(t)$ рівномірно на I. Отже, $H_k(t)$ — м. п. відображення і для нього виконується умова 6 леми 1. Оскільки $H_k(I) = D_k$, то околи $U_n\left(D_k^*\right)$ стягуються до множини D_k^*, і виконується також умова 1 леми. Лема 1 доведена для випадку, коли точка d_k, — кінець дуги B_k, — не є кінцевою точкою дендрита D_{k-1}.

Коли точка d_k є кінцевою точкою дендрита D_{k-1}, то її зручно розглядати як внутрішню точку об'єднання околів $U_n\left(D_{k-1}^*\right)$ і $U_n\left(B_k^*\right)$ (чого можна досягти за рахунок невеликого розширення цих околів). Доведення леми вдається провести за тією ж схемою, що і вище, і ми його не наводимо. Лема 1 доведена.

Зауваження 2. Побудована у пп. 2, 3 A-послідовність $A(D_k, H_k(t))$, а також зауваження 1 свідчать про те, що для дендрита D_{k-1} і дуги B_k є вірною лема 2. Тобто, лема 2 доведена для випадку, коли дендрит і дуга мають єдину спільну точку, що є кінцевою точкою дуги.

Доведення леми 2. Позначимо через $e_1, \ldots, e_n$ кінцеві точки дендрита E, відмінні від точки d_1, і подамо дендрит $G = D \cup E$ у вигляді об'єднання $G = D \cup E_1 \cup \ldots \cup E_n$, де $E_i = \cup d_i e_i$, $i = 1, \ldots, n$, — незвідна дуга між дендритом $D_{i-1} = D \cup E_1 \cup \ldots \cup E_{i-1}$ і точкою e_i (дендрит D позначається D_0). Згідно з зауваженням 2 лема 2 вірна для дендрита D і дуги E_1, а тому існують такі точка $t_1 \in H_D^{-1}\left(d_1\right)$, число $\alpha_1 > 0$, відрізок $I_1 = [t_1 - \alpha_1; t_1 + \alpha_1] \subset I$ і A-послідовність $A(D_1, H_1(t))$ дендрита $D_1 = D \cup E_1$, що справджується твердження леми:

$$\begin{aligned} H_1(t) &\in H_D(I_1) \cup E_1, \text{ якщо } t \in I_1; \\ H_1(t) &= H_D(t), \text{ якщо } t \in I \setminus I_1. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Очевидно також, що $H_1^{-1}\left(E_1\right) \subset I_1$, $d_2 \in E_1$.

Далі, знову застосовуючи лему 2 до дендрита D_1 і E_2, виберемо такі точку $t_2 \in H_1^{-1}\left(d_2\right) \subset H_1^{-1}\left(E_1\right) \subset I_1$, число α_2, відрізок $I_2 = [t_2 - \alpha_2; t_2 + \alpha_2] \subset \subset I_1 \subset I$ і A-послідовність $A(D_2, H_2(t))$ дендрита $D_2 = D_1 \cup E_2$, що

$$\begin{aligned} H_2(t) &\in H_1(I_2) \cup E_2, \text{ якщо } t \in I_2 \subset I_1 \subset I; \\ H_2(t) &= H_1(t), \text{ якщо } t \in I \setminus I_2. \end{aligned} \tag{6.2}$$

З умов (6.1) і (6.2) дістаємо

$$H_2(t) \in H_D(I_1) \cup E_1 \cup E_2, \text{ якщо } t \in I_1;$$
$$H_2(t) = H_D(t), \text{ якщо } t \in I \setminus I_1,$$

тобто лема 2 доведена для дендритів D і $E_1 \cup E_2$.

Аналогічним способом, послідовно застосовуючи лему 2 до дендритів D_{j-1} і дуг E_j, $j = 3, \ldots, n$, будуємо A-послідовності $A(D_j, H_j(t))$ такі, що

$$H_j(t) \in H_D(I_1) \cup E_1 \cup \ldots \cup E_j, \text{ якщо } t \in I_1;$$
$$H_j(t) = H_D(t), \text{ якщо } t \in I \setminus I_1.$$

При $j = n$ дістаємо A-послідовність $A(D_n, H_n(t))$. Оскільки $D_n = G$, то лема 2 доведена.

Доведення теореми. Наблизимо локально зв'язний континуум M послідовністю скінченних дендритів $D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_n \subset \ldots$ [2] (теорема 2). Для доведення теореми буде побудована рівномірно збіжна послідовність м. п. відображень $H_n\colon I \to D_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Нехай $n = 1$. За лемою 1 для скінченного дендрита D_1 існує A-послідовність $A(D_1, H_1(t))$, де $H_1\colon I \to D_1$ — м. п. відображення.

Для $n = 2$ розглянемо дендрит D_2. Замикання кожної компоненти множини $D_2 \setminus D_1$ є скінченним дендритом, що має тільки одну спільну точку з дендритом D_1, і нехай a_j, $j = 1, \ldots, m$, — всі такі спільні точки. Для кожної множини $H_1^{-1}(a_j)$ виберемо окіл $V(a_j)$ цієї множини на відрізку I так, щоб околи різних множин взаємно не перетинались і щоб $\operatorname{diam} H_1(V(a_j)) < 2^{-n} = 2^{-2}$, $j = 1, \ldots, m$.

Виберемо точку a_1. Позначимо через $\overline{C}_1, \ldots, \overline{C}_k$ замикання компонент множини $D_2 \setminus D_1$, для кожної з яких точка a_1 є кінцевою точкою, $\operatorname{diam} C_i < 2^{-n} = 2^{-2}$. Позначимо $D_{1,0} = D_1$, $D_{1,i} = D_{1,i-1} \cup \overline{C}_i$, $i = 1, \ldots, k$, $D_1(a_1) = D_{1,k}$, $H_{1,0}(t) = H_1(t)$ і опишемо побудову A-послідовності $A(D_1(a_1), H_1(t; a_1))$.

Застосовуючи лему 2 до дендритів $D_{1,0}$ і $\overline{C}_1$, виберемо такі точку $t_1 \in H_{1,0}^{-1}(a_1)$, число $\alpha_1 > 0$, відрізок $I_1 = [t_1 - \alpha_1; t_1 + \alpha_1] \subset V(a_1)$ (вибір числа α_1, а також інших чисел $\alpha_2, \ldots, \alpha_k$, що вводяться нижче, буде уточнений) і побудуємо таку A-послідовність $A(D_{1,1}, H_{1,1}(t))$ дендрита $D_{1,1}$, що

$$\begin{aligned} &H_{1,1}(t) \in H_{1,0}(I_1) \cup \overline{C}_1 \subset H_{1,0}(V(a_1)) \cup \overline{C}_1, \text{ якщо } t \in I_1; \\ &H_{1,1}(t) = H_{1,0}(t), \text{ якщо } t \in I \setminus I_1. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Далі знову застосуємо лему 2 до дендритів $D_{1,1}$ і $\overline{C}_2$ і виберемо такі точку $t_2 \in H_{1,1}^{-1}(a_1)$, число $\alpha_2 > 0$, відрізок $I_2 = [t_2 - \alpha_2; t_2 + \alpha_2] \subset V(a_1)$ і A-послідовність $A(D_{1,2}, H_{1,2}(t))$ дендрита $D_{1,2}$, що

$$\begin{aligned} &H_{1,2}(t) \in H_{1,1}(I_2) \cup \overline{C}_2, \text{ якщо } t \in I_2; \\ &H_{1,2}(t) = H_{1,1}(t), \text{ якщо } t \in I \setminus I_2. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Зменшуючи, якщо потрібно, число α_2 так, щоб або $I_2 \subset I_1$, якщо $t_2 \in I_1$, або $I_2 \cap I_1 = \varnothing$, якщо $t_2 \notin I_1$, з (7.1) і (7.2) маємо

$$H_{1,2}(t) \in H_{1,0}(V(a_1)) \cup \overline{C}_1 \cup \overline{C}_2, \text{ якщо } t \in I_1 \cup I_2;$$
$$H_{1,2}(t) = H_{1,0}(t), \text{ якщо } t \in I \setminus (I_1 \cup I_2).$$

Продовжуючи описану побудову за індукцією, дістанемо A-послідовності $A(D_{1,i}, H_{1,i}(t))$, $i = 1, \dots, k$, причому відображення $H_{1,k}$ задовольняє умови

$$H_{1,k}(t) \in H_{1,0}(V(a_1)) \cup \overline{C}_1 \cup \dots \cup \overline{C}_k, \text{ якщо } t \in \bigcup_{j=1}^{k} I_j \subset V(a_1);$$
$$H_{1,k}(t) = H_{1,0}(t), \text{ якщо } t \in I \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k} I_j \right). \tag{8}$$

Оскільки всі множини $\overline{C}_1, \dots, \overline{C}_k$ і $H_{1,0}(V(a_1))$ мають спільну точку і діаметр кожної з них не більший за $2^{-n} = 2^{-2}$, то з (8) одержуємо, що для $t \in I$ $|H_{1,k}(t) - H_{1,0}(t)| < 2^{-1}$, причому $H_{1,k}(t) = H_{1,0}(t)$, якщо $t \in I \setminus V(a_1)$. Шуканою A-послідовністю дендрита $D_1(a_1) = D_{1,k}$, $D_1 \subset D_1(a_1) \subset D_2$ є A-послідовність $A(D_{1,k}, H_{1,k}(t))$.

Продовжимо побудову м. п. відображення $H_2 \colon I \to D_2$ подібним способом для всіх інших точок $a_2, \dots, a_m$, що є спільними для замикання компонент множини $D_2 \setminus D_1$ і дендрита D_1. Враховуючи, що кожна така компонента має діаметр, менший за $2^{-n} = 2^{-2}$ і сама побудова змінює м. п. відображення лише в околах $V(a_j)$, $j = 2, \dots, m$, дістанемо в результаті побудови таку A-послідовність $A(D_2, H_2(t))$ дендрита D_2, що

$$|H_1(t) - H_2(t)| < 2^{-1} \text{ для всіх } t \in I,$$

причому

$$H_1(t) = H_2(t), \text{ якщо } t \in I \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{m} V(a_j) \right).$$

Далі для кожного дендрита D_n будуємо A-послідовність $A(D_n, H_n(t))$. Оскільки компоненти множини $D_n \setminus D_{n-1}$ мають діаметри, менші за 2^{-n}, то

$$|H_{n-1}(t) - H_n(t)| < 2^{-n+1} \text{ для всіх } t \in I.$$

Отже, послідовність $H_n(t)$ рівномірно збігається на I. Нехай $H(t) = \lim_{n \to \infty} H_n(t)$. Оскільки послідовність дендритів наближає локально зв'язний континуум M, а відображення $H_n(t)$ майже прості, то $H(t)$ — м. п. відображення відрізка I на континуум M. Теорема доведена.

1. *Куратовский К.* Топология: В 2-х т. – М.: Мир, 1969. – Т. 2. – 624 с.
2. *Ward L. E.* A generalization of the Hahn–Mazurkiewicz theorem // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – **58**. – P. 369–374.
3. *Келдыш Л. В.* Топологические вложения в евклидово пространство / Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1966. – **81**. – 184 с.

Одержано 16.09.93