УДК 517.9

С. А. Щеголев, канд. физ.-мат. наук (Одес. ун-т)

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ И МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

The boundary-value problem for a parabolic partial differential equation, coefficients of which are given as Fourier series with the coefficients and frequency slowly changing in time, is considered.

Досліджується крайова задача для рівняння параболічного типу, коефіцієнти якого мають вигляд рядів Фур'є з повільно змінними за часом коефіцієнтами і частотою.

Теория дифференциальных уравнений в частных производных с периодическими коэффициентами представляет собой интенсивно развивающуюся область математики [1, 2]. В настоящей работе результаты, полученные в [3, 4], распространяются на уравнения в частных производных параболического типа.

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(t,\varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(t,\varepsilon)u + c(x,t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) + \mu f\left(x,t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon),u,\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad (1)$$

$$0 \le x \le l < +\infty, \quad -\infty < t < +\infty, \quad 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0 < +\infty,$$

$$u(0,t,\varepsilon) = p(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(t,\varepsilon)e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$

$$u(l,t,\varepsilon) = q(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n(t,\varepsilon)e^{in\theta(t,\varepsilon)}, \quad (2)$$

$$c(x,t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(x,t,\varepsilon)e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$

$$\theta(t,\varepsilon) = \int_0^t \varphi(\tau,\varepsilon)d\tau, \quad 0 < \varphi_0 \le |\varphi(t,\varepsilon)| \le \varphi^0 < +\infty,$$

$$\frac{d\varphi(t,\varepsilon)}{dt} = \varepsilon\tilde{\varphi}(t,\varepsilon), \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sup_{t,\varepsilon}\begin{Bmatrix}|p_n(t,\varepsilon)|\\|q_n(t,\varepsilon)|\end{Bmatrix} < +\infty,$$

$$\sup_{t,\varepsilon}\begin{Bmatrix}|a(t,\varepsilon)|\\|b(t,\varepsilon)|\end{Bmatrix} < +\infty, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sup_{x,t,\varepsilon}|c_n(x,t,\varepsilon)| < +\infty,$$

$$\frac{d}{dt}\begin{Bmatrix}p_n(t,\varepsilon)\\q_n(t,\varepsilon)\end{Bmatrix} = \varepsilon\begin{Bmatrix}\tilde{p}_n(t,\varepsilon)\\\tilde{q}_n(t,\varepsilon)\end{Bmatrix}, \quad \sup_{n,t,\varepsilon}\begin{Bmatrix}|\tilde{p}_n(t,\varepsilon)|\\|\tilde{q}_n(t,\varepsilon)|\end{Bmatrix} < +\infty, \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt}\begin{Bmatrix}a(t,\varepsilon)\\b(t,\varepsilon)\end{Bmatrix} = \varepsilon\begin{Bmatrix}\tilde{a}(t,\varepsilon)\\\tilde{b}(t,\varepsilon)\end{Bmatrix}, \quad \sup_{t,\varepsilon}\begin{Bmatrix}|\tilde{a}(t,\varepsilon)|\\|\tilde{b}(t,\varepsilon)|\end{Bmatrix} < +\infty,$$

$$\frac{\partial c_n(x,t,\varepsilon)}{\partial t} = \varepsilon\tilde{c}_n(x,t,\varepsilon), \quad \sup_{n,x,t,\varepsilon}|\tilde{c}_n(x,t,\varepsilon)| < +\infty,$$

μ — вещественный положительный параметр.

На функцию f налагается следующее ограничение: пусть

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(x, t, \varepsilon) e^{in\theta(t,\varepsilon)}. \tag{4}$$

Тогда

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n\left(x, t, \varepsilon, U, \frac{\partial U}{\partial x}\right) e^{in\theta(t,\varepsilon)}, \tag{5}$$

где $U = \operatorname{colon}(u_n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Исследуется вопрос о наличии у задачи (1) – (3) решения вида (4), где $u_n(x, t, \varepsilon)$ имеет свойства

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sup_{x,t,\varepsilon} |u_n(x, t, \varepsilon)| < +\infty,$$

$$\frac{\partial u_n(x,t,\varepsilon)}{\partial t} = \varepsilon \tilde{u}_n(x, t, \varepsilon), \quad \sup_{n,x,t,\varepsilon} |\tilde{u}_n(x, t, \varepsilon)| < +\infty.$$

С помощью замены

$$u = p + \frac{x}{l}(q - p) + v,$$

где v — новая неизвестная функция, сведем задачу (1) – (3) к задаче с однородными граничными условиями:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a(t, \varepsilon)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b(t, \varepsilon)v + c^*(x, t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon)) + \mu f^*\left(x, t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon), v, \frac{\partial v}{\partial x}\right), \tag{6}$$

$$v(0, t, \varepsilon, \theta) = v(l, t, \varepsilon, \theta) = 0. \tag{7}$$

Решения задачи (6), (7) будем искать в виде

$$v(x, t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon)) = \sum_{-\infty}^{\infty} v_n(x, t, \varepsilon) e^{in\theta(t,\varepsilon)}. \tag{8}$$

Подставляя (8) в равенство (6) и учитывая условия (7), получаем

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} = a(t, \varepsilon)\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + (b(t, \varepsilon) - in\varphi(t, \varepsilon))v_n +$$

$$+ c_n^*(x, t, \varepsilon) + \mu f_n^*\left(x, t, \varepsilon, V^*, \frac{\partial V^*}{\partial x}\right), \tag{9}$$

$$v_n(0, t, \varepsilon) = v_n(l, t, \varepsilon) = 0, \tag{10}$$

где c_n^* и f_n^* — коэффициенты разложения в ряд Фурье по θ функций c^* и f^*, $V^* = \operatorname{colon}(v_n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Следуя основной идее метода разделения переменных [5], ищем решение задачи (9), (10) в виде ряда

$$v_n(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} v_{nk}(t, \varepsilon) \sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{11}$$

предполагая, что в этом случае функция f_n^* допускает представление

$$f_n^* = \sum_{k=1}^{\infty} f_{nk}^*(t, \varepsilon, V) \sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{12}$$

где

$$V = \operatorname{colon}(v_{nk}), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$\frac{dv_{nk}}{dt} = g_{nk}(t,\varepsilon)v_{nk} + c_{nk}^*(t,\varepsilon) + \mu f_{nk}^*(t,\varepsilon,V), \tag{13}$$

где

$$g_{nk}(t,\varepsilon) = b(t,\varepsilon) - \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 a(t,\varepsilon) - in\varphi(t,\varepsilon),$$

$$c_{nk}^*(t,\varepsilon) = \frac{2}{l}\int_0^l c_n^*(\xi,t,\varepsilon)\sin\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Теорема 1. *Пусть система* (13) *такова, что:*

1) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \sup\limits_{t,\varepsilon} |c_{nk}^*(t,\varepsilon)| \le C_k$;

2) $\dfrac{dc_{nk}^*(t,\varepsilon)}{dt} = \varepsilon\tilde{c}_{nk}(t,\varepsilon), \quad \sup\limits_{n,t,\varepsilon} |\tilde{c}_{nk}(t,\varepsilon)| < \tilde{C}_k, \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}\left(C_k + \tilde{C}_k\right) < +\infty$;

3) *для любых векторов* $V = \operatorname{colon}(v_{nk})$, $U = \operatorname{colon}(u_{nk})$ *таких, что*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sup_{t,\varepsilon} \begin{Bmatrix} |v_{nk}(t,\varepsilon)| \\ |u_{nk}(t,\varepsilon)| \end{Bmatrix} \le \frac{\alpha}{k^2}, \quad \frac{d}{dt}\begin{Bmatrix} v_{nk}(t,\varepsilon) \\ u_{nk}(t,\varepsilon) \end{Bmatrix} = \varepsilon \begin{Bmatrix} \tilde{v}_{nk}(t,\varepsilon) \\ \tilde{u}_{nk}(t,\varepsilon) \end{Bmatrix},$$

$$\sup_{n,t,\varepsilon} \begin{Bmatrix} |\tilde{v}_{nk}(t,\varepsilon)| \\ |\tilde{u}_{nk}(t,\varepsilon)| \end{Bmatrix} \le \frac{\beta}{k^2}, \quad \alpha,\beta < +\infty,$$

выполняются соотношения

а) $\sup\limits_{t,\varepsilon} |f_{nk}^*(t,\varepsilon,V)| \le \overline{H}_{nk}(\alpha)$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{H}_{nk}(\alpha) = \overline{H}_k(\alpha), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{H}_k(\alpha)}{k^2} = \overline{H}(\alpha) < +\infty;$$

б) $\sup\limits_{t,\varepsilon} |f_{nk}^*(t,\varepsilon,V) - f_{nk}^*(t,\varepsilon,U)| \le L_{nk}(\alpha) \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}\sum\limits_{r=1}^{\infty} \sup\limits_{t,\varepsilon} |v_{jr}(t,\varepsilon) - u_{jr}(t,\varepsilon)|$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} L_{nk}(\alpha) = L_k(\alpha), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L_k(\alpha)}{k^2} = L(\alpha) < +\infty;$$

в) $\dfrac{df_{nk}^*(t,\varepsilon,V)}{dt} = \varepsilon\tilde{f}_{nk}(t,\varepsilon,V,\tilde{V}), \ \sup\limits_{t,\varepsilon} |\tilde{f}_{nk}(t,\varepsilon,V,\tilde{V})| < \tilde{H}_k(\alpha,\beta) \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{H}_k(\alpha,\beta)}{k^2} = \tilde{H}(\alpha,\beta) < +\infty;$$

г) $\sup\limits_{t,\varepsilon} |\tilde{f}_{nk}(t,\varepsilon,V,\tilde{V}) - \tilde{f}_{nk}(t,\varepsilon,U,\tilde{U})| \le$

$$\le L_k^*(\alpha,\beta) \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} \sup_{t,\varepsilon} |v_{jr}(t,\varepsilon) - u_{jr}(t,\varepsilon)| +$$

$$+ \; L_k^{**}(\alpha,\beta) \sum_{r=1}^{\infty} \max_{-\infty<j<+\infty} \sup_{t,\varepsilon} |\, \tilde{v}_{jr}(t,\varepsilon) - \tilde{u}_{jr}(t,\varepsilon)|,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{L_k^{**}(\alpha,\beta)}{k^2} = L^{**}(\alpha,\beta) < +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L_k^{*}(\alpha,\beta)}{k^2} = L^{*}(\alpha,\beta) < +\infty,$$

где $\tilde{U} = \operatorname{colon}(\tilde{u}_{nk})$, $\tilde{V} = \operatorname{colon}(\tilde{v}_{nk})$*;*

4) $\inf\limits_{t,\varepsilon} \left| b(t,\varepsilon) - \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 a(t,\varepsilon) \right| \geq \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \gamma, \quad \gamma > 0.$

Тогда существует $\mu_0 > 0$ *такое, что для каждого* $\mu \in [0, \mu_0)$ *система* (13) *имеет единственное частное решение* $v_{nk}(t,\varepsilon,\mu)$, *характеризующееся следующими свойствами:*

1) $\sup\limits_{t,\varepsilon} |\, v_{nk}(t,\varepsilon,\mu)| \leq \frac{v_{nk}^0(\mu)}{k^2}, \quad \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{v_{nk}^0(\mu)}{k^2} < +\infty;$

2) $\frac{dv_{nk}(t,\varepsilon,\mu)}{dt} = \varepsilon \tilde{v}_{nk}(t,\varepsilon,\mu),$

$$\sup_{n,t,\varepsilon} |\, \tilde{v}_{nk}(t,\varepsilon,\mu)\,| \leq \frac{v_k^0(\mu)}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k^0(\mu)}{k^2} < +\infty.$$

Доказательство. Полагая в системе (13) $\mu = 0$, получаем систему

$$\frac{dv_{nk0}}{dt} = g_{nk}(t,\varepsilon) v_{nk0} + c_{nk}^{*}(t,\varepsilon), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{14}$$

Рассмотрим следующее ее решение:

$$v_{nk0} = \int_A^t c_{nk}^{*}(\tau,\varepsilon) \exp \int_\tau^t g_{nk}(\sigma,\varepsilon)\, d\sigma\, d\tau, \tag{15}$$

где

$$A = \begin{cases} -\infty, & \text{если } b - \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 a < 0; \\ +\infty, & \text{если } b - \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 a > 0. \end{cases}$$

Используя условия 4 теоремы и известные [6] оценки для интегралов вида (15), имеем

$$\sup_{t,\varepsilon} |\, v_{nk0}(t,\varepsilon)| \leq \frac{1}{\gamma} \left(\frac{l}{k\pi}\right)^2 \sup_{t,\varepsilon} |\, c_{nk}^{*}(t,\varepsilon)|.$$

Заменой

$$v_{nk0} = -\frac{c_{nk}^{*}(t,\varepsilon)}{g_{nk}(t,\varepsilon)} + w_{nk0}$$

приведем (14) к виду

$$\frac{dw_{nk0}}{dt} = g_{nk}(t,\varepsilon) w_{nk0} + \frac{d}{dt}\left(\frac{c_{nk}^{*}(t,\varepsilon)}{g_{nk}(t,\varepsilon)}\right).$$

Из условий теоремы вытекает, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{c_{nk}^{*}(t,\varepsilon)}{g_{nk}(t,\varepsilon)}\right) = \varepsilon h_{nk}(t,\varepsilon),$$

$$\sup_{t,\varepsilon}|h_{nk}(t,\varepsilon)| \le h_{nk}^0\left(\sup_{t,\varepsilon}|c_{nk}^*(t,\varepsilon)|+\sup_{t,\varepsilon}|\tilde{c}_{nk}(t,\varepsilon)|\right),$$

где h_{nk}^0 зависит только от b, a, φ и их производных и не зависит от c_{nk}^*. Кроме того, величины $k^2 h_{nk}^0$ и $|n|\, h_{nk}^0$ ограничены при $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$, следовательно,

$$\sup|w_{nk0}(t,\varepsilon)| \le \frac{l^2}{\gamma\pi^2 k^2}\varepsilon h_{nk}^0\left(\sup_{t,\varepsilon}|c_{nk}^*(t,\varepsilon)|+\sup_{t,\varepsilon}|\tilde{c}_{nk}(t,\varepsilon)|\right).$$

Отсюда и из соотношения

$$\frac{dv_{nk0}}{dt} = g_{nk}(t,\varepsilon)w_{nk0}$$

вытекает, что существует K_1 такое, что для любых $k \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{Z}$

$$\frac{dv_{nk0}(t,\varepsilon)}{dt} = \varepsilon\tilde{v}_{nk0}(t,\varepsilon),$$

причем

$$\sup_{t,\varepsilon}|\tilde{v}_{nk0}(t,\varepsilon)| \le \frac{l^2 K_1}{\gamma\pi^2 k^2}\left(\sup_{t,\varepsilon}|c_{nk}^*(t,\varepsilon)|+\sup_{t,\varepsilon}|\tilde{c}_{nk}(t,\varepsilon)|\right).$$

Искомое решение системы (13) построим с помощью итерационного процесса:

$$v_{nk,s+1} = \int_A^t \left(c_{nk}^*(\tau,\varepsilon)+\mu f_{nk}^*(\tau,\varepsilon,V^s)\right)\exp\int_\tau^t g_{nk}(\sigma,\varepsilon)\,d\sigma\,d\tau,$$

$$V^s = \operatorname{colon}(v_{nks}), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Определим область Ω_1 следующим образом:

$$\Omega_1 = \Bigg\{ V = \operatorname{colon}(v_{nk}), n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}:$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{t,\varepsilon}|v_{nk}(t,\varepsilon)-v_{nk0}(t,\varepsilon)| \le W, 0 < W < +\infty\Bigg\}.$$

Тогда из условий теоремы вытекает, что неравенство

$$\frac{\mu l^2}{\gamma\pi^2}\overline{H}(\alpha) \le w < W,$$

где

$$\alpha = W + \frac{l^2}{\gamma\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sup_{t,\varepsilon}|c_{nk}^*(t,\varepsilon)|,$$

гарантирует выполнение включения

$$V^s \in \Omega_1, \quad s = 0, 1, 2, \ldots .$$

Методом математической индукции несложно установить справедливость оценок

$$\sup_{t,\varepsilon}|v_{nk1}(t,\varepsilon,\mu)-v_{nk0}(t,\varepsilon)| \le \frac{\mu l^2}{\gamma\pi^2 k^2}\overline{H}_{nk}(\alpha),$$

$$\sup_{t,\varepsilon}|v_{nk,s+1}(t,\varepsilon,\mu)-v_{nks}(t,\varepsilon,\mu)| \le$$

$$\leq (L(\alpha))^{s-1}\overline{H}(\alpha)\left(\frac{\mu l^2}{\gamma\pi^2}\right)^{s+1}\frac{L_{nk}(\alpha)}{k^2}, \quad s = 1, 2, \ldots .$$

Отсюда следует, что при выполнении условия

$$\frac{\mu l^2}{\gamma\pi^2}L(\alpha) < 1 \tag{16}$$

последовательность $v_{nks}(t, \varepsilon, \mu)$, $s = 0, 1, 2, \ldots$, равномерно по t и ε сходится к решению $v_{nk}(t, \varepsilon, \mu)$ системы (13), причем справедлива оценка

$$\sup_{t,\varepsilon}|v_{nk}(t, \varepsilon, \mu)| \leq$$

$$\leq \frac{l^2}{\gamma\pi^2 k^2}\left(\sup_{t,\varepsilon}|c^*_{nk}(t,\varepsilon)| + \mu\overline{H}_{nk}(\alpha) + \left(\frac{\mu l^2}{\gamma\pi^2}\right)\frac{L_{nk}(\alpha)}{k^2}\frac{\overline{H}(\alpha)}{1-\left(\mu l^2/\gamma\pi^2\right)L(\alpha)}\right). \tag{17}$$

Это решение ограничено при $-\infty < t < +\infty$, $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$. Из условия (16) следует, что других ограниченных решений система (13) не имеет.

Покажем теперь, что производная найденного решения пропорциональна первой степени параметра ε. Обозначим

$$\tilde{v}_{nks}(t, \varepsilon, \mu) = \varepsilon^{-1} dv_{nks}(t, \varepsilon, \mu)/dt$$

(при $\varepsilon = 0$ — $v_{nks}(t, \varepsilon, \mu) \equiv \text{const}$, и $\tilde{v}_{nks}(t, \varepsilon, \mu) = 0$).

Определим область Ω_2 следующим образом:

$$\Omega_2 = \Big\{ \tilde{V} = \text{colon}(\tilde{v}_{nk}(t,\varepsilon)), n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}:$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\max_{-\infty<n<+\infty}\sup_{t,\varepsilon}|\tilde{v}_{nk}(t,\varepsilon) - \tilde{v}_{nk0}(t,\varepsilon)| \leq W_1,\ 0 < W_1 < +\infty\Big\}.$$

Тогда неравенство

$$\frac{\mu l^2}{\gamma\pi^2}K_1\left(\overline{H}(\alpha) + \tilde{H}(\alpha,\beta)\right) \leq w_1 < W_1,$$

где

$$\beta = W_1 + \frac{l^2 K_1}{\gamma\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sup_{t,\varepsilon}|c^*_{nk}(t,\varepsilon)| + \max_{-\infty<n<+\infty}\sup_{t,\varepsilon}|\tilde{c}_{nk}(t,\varepsilon)|\right),$$

гарантирует выполнение включения

$$\tilde{V}^s \equiv \text{colon}(\tilde{v}_{nks}) \in \Omega_2, \quad s = 0, 1, 2, \ldots .$$

Методом математической индукции несложно установить справедливость оценок

$$\sup_{t,\varepsilon}|\tilde{v}_{nk1}(t, \varepsilon, \mu) - \tilde{v}_{nk0}(t, \varepsilon)| \leq \frac{\mu l^2}{\gamma\pi^2 k^2}K_1\left(\overline{H}_{nk}(\alpha) + \tilde{H}_k(\alpha,\beta)\right),$$

$$\sup_{t,\varepsilon}|\tilde{v}_{nk,s+1}(t, \varepsilon, \mu) - \tilde{v}_{nks}(t, \varepsilon, \mu)| \leq \frac{aM_k}{k^2}\rho^{s-1} +$$

$$+ \frac{\nu K_1 L^{**}_k}{k^2}\left(aM\frac{\rho^{s-1} - (\nu K_1 L^{**})^{s-1}}{\rho - \nu K_1 L^{**}} + (\nu K_1 L^{**})^{s-1} d\right), \quad s = 1, 2, \ldots ,$$

где

$$M_k = L_k + L_k^{**}, \quad M = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k}{k^2}, \quad \nu = \frac{\mu l^2}{\gamma\pi^2},$$

$$a = \nu^2 K_1 \overline{H}, \quad \rho = \nu L, \quad d = \nu K_1 (\overline{H} + \tilde{H}).$$

Отсюда вытекает, что при выполнении условий

$$\rho < 1, \quad \frac{\mu l^2}{\gamma\pi^2} K_1 L^{**}(\alpha) < 1$$

последовательность $\tilde{v}_{nks}(t, \varepsilon, \mu)$, $s = 0, 1, 2, \ldots$, равномерно по t и ε сходится к функции $\tilde{v}_{nk}(t, \varepsilon, \hat{\mu})$ такой, что

$$\frac{dv_{nk0}(t,\varepsilon,\mu)}{dt} = \varepsilon \tilde{v}_{nk}(t,\varepsilon,\mu), \tag{18}$$

причем справедлива оценка

$$\sup_{t,\varepsilon} | \tilde{v}_{nk}(t,\varepsilon,\mu) | \le \frac{K_1 l^2}{\gamma\pi^2 k^2} \left(\sup_{t,\varepsilon} | c_{nk}^*(t,\varepsilon) | + \sup_{t,\varepsilon} | \tilde{c}_{nk}(t,\varepsilon) | \right) + \frac{\nu K_1}{k^2} \left(\overline{H}_{nk} + \tilde{H}_k \right) +$$

$$+ \frac{aM_k}{k^2} \frac{1}{1-\rho} + \frac{\nu K_1 L_k^{**}}{k^2} \left(\frac{aM}{(1-\rho)(1-\nu K_1 L^{**})} + \frac{d}{1-\nu K_1 L^{**}} \right). \tag{19}$$

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы и соотношений (8), (11) вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть для краевой задачи* (1) – (3) *выполнены следующие условия:*

1) *функция* f *удовлетворяет ограничению* (4), (5);

2) *функции* f_n^* *допускают представление* (12);

3) *выполнены все условия теоремы* 1.

Тогда задача (1) – (3) *имеет единственное частное решение вида*

$$u(x, t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon), \mu) = p(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon)) + \frac{x}{l} \times$$

$$\times \left(q(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) - p(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) \right) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} v_{nk}(t,\varepsilon,\mu) \sin\frac{k\pi x}{l} \right) e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$

где $v_{nk}(t, \varepsilon, \mu)$ *удовлетворяет неравенствам* (17) – (19).

1. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И.* Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. – Киев: Наук. думка, 1991. – 232 с.
2. *Самойленко А. М., Ткач Б. П.* Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1992. – 238 с.
3. *Костин А. В., Щеголев С. А.* Об одном классе решений дифференциальной системы с медленно меняющимися параметрами // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 1. – С. 101–103.
4. *Щеголев С. А.* О решениях квазилинейной дифференциальной системы с периодическими коэффициентами // Там же. – 1993. – **45**, №8. – С. 1157–1161.
5. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1980. – 686 с.
6. *Костин А. В.* К вопросу о существовании у системы обыкновенных дифференциальных уравнений ограниченных частных решений и частных решений, стремящихся к нулю при $t \to \infty$ // Дифференц. уравнения. – 1965. – **1**, № 5. – С. 585–604.

Получено 05.04.94