УДК 517.5

В. Ф. Бабенко, д-р физ.-мат. наук (Днепропетр. ун-т)

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ВЕСОВЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ*

For an arbitrary continuous weight function which is positive on $[-1, 1]$ almost everywhere, and for a wide class of modulus of continuity $\omega(t)$, asymptotically optimal formulas on the class $H^{\omega}[-1, 1]$ are found.

Для довільної неперервної вагової функції, майже всюди додатної на $[-1, 1]$, та широкого класу модулів неперервності $\omega(t)$ знайдені асимптотично оптимальні квадратурні формули на класі $H^{\omega}[-1, 1]$.

1. Пусть H^{ω} — класс вещественных функций, определенных на отрезке $[-1, 1]$ и имеющих заданную мажоранту $\omega(t)$ модулей непрерывности; $q(x) \in L_1[-1, 1]$ — почти всюду положительная весовая функция. Набор узлов $X^m = \{x_1, \ldots, x_m\} \subset [-1, 1]$ и коэффициентов $P^m = \{p_1, \ldots, p_m\} \subset \mathbb{R}$ задает квадратурную формулу

$$\int_{-1}^{1} q(x) f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{m} p_k f(x_k) + R(f; q; X^m, P^m). \tag{1}$$

Положим

$$R(H^{\omega}; q; X^m, P^m) = \sup_{f \in H^{\omega}} |R(f; q; X^m, P^m)|,$$

$$R(H^{\omega}; q; X^m) = \inf_{P^m} R(H^{\omega}; q; X^m, P^m),$$

$$R_m(H^{\omega}; q) = \inf_{X^m} R(H^{\omega}; q; X^m).$$

Квадратурная формула (1) с таким набором узлов P^m, что

$$R(H^{\omega}; q; X^m) = R(H^{\omega}; q; X^m, P^m),$$

называется оптимальной для класса H^{ω} по коэффициентам при заданном наборе узлов X^m. Квадратурная формула с таким набором узлов X^m и коэффициентов P^m, что

$$R_m(H^{\omega}; q) = R(H^{\omega}; q; X^m, P^m),$$

называется оптимальной для класса H^{ω}. Последовательность квадратурных формул с наборами узлов X^m и коэффициентов P^m называется асимптотически оптимальной для класса H^{ω}, если

$$R(H^{\omega}; q; X^m, P^m) = R_m(H^{\omega}; q) + o\big(R_m(H^{\omega}; q)\big) \quad \text{при } m \to \infty.$$

В случае $q(x) \equiv 1$ оптимальные для классов H^{ω} квадратурные формулы найдены Н. П. Корнейчуком [1]. Оптимальные по коэффициентам при любом заданном наборе узлов квадратурные формулы для классов H^{ω} в случае, когда

* Выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий.

$q(x)$ — произвольная неотрицательная интегрируемая функция, для функций одной переменной найдены Г. К. Лебедем [2], а для функций многих переменных — В. Ф. Бабенко [3]. Асимптотически оптимальные кубатурные формулы для классов H^{ω} в случае $q(x) \equiv 1$ найдены В. Ф. Бабенко [3].

Для классов H^{α} ($H^{\alpha} = H^{\omega}$, если $\omega(t) = t^{\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$) в [3] найдена точная асимптотика при $m \to \infty$ погрешности оптимальных квадратурных (и кубатурных) формул при условии, что $q(x)$ — неотрицательная, ограниченная, измеримая по Жордану функция. Для классов функций одного переменного эта асимптотика имеет вид

$$R_m(H^{\omega}; q) = \frac{(2m)^{-\alpha}}{\alpha+1}\left(\int_{-1}^{1} q(x)^{1/(1+\alpha)}dx\right)^{\alpha+1} + o\left(\frac{1}{m^{\alpha}}\right) \quad \text{при } m \to \infty. \tag{2}$$

В. П. Моторный [4] нашел асимптотически оптимальную последовательность квадратурных формул для класса H^{α} и доказал (2) при следующих предположениях относительно весовой функции $q(x)$: 1) $q(x) > 0$ почти всюду; 2) $q(x)$ непрерывна в $(-1, 1)$; 3) $q(x)$ монотонна в некоторой окрестности точек -1 и 1, если там $q(x)$ неограничена. Премером весовых функций, удовлетворяющих условиям 1 – 3, являются классические веса $q(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, $\alpha, \beta > -1$.

Цель данной работы — найти асимптотически оптимальные последовательности кваратурных формул для классов H^{ω} в случае достаточно произвольных весовых функций $q(x)$ и существенно более широкого (по сравнению с $\omega(t) = t^{\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$) набора модулей непрерывности.

2. Для формулировки и доказательства основного результата нам понадобятся некоторые предварительные рассмотрения, которые, по нашему мнению, представляют и самостоятельный интерес.

Если $\omega(t)$ — заданный модуль непрерывности, то положим

$$\Omega(x) = \int_0^x \omega(t/2)\,dt. \tag{3}$$

Ясно, что функция $\Omega(x)$ неотрицательна, строго возрастает, выпукла вниз и $\Omega(0) = 0$. Обратная функция $\Omega^{-1}(x)$ неотрицательна, строго возрастает, выпукла вверх и $\Omega^{-1}(0) = 0$. Кроме того, функции Ω и Ω^{-1} непрерывно дифференцируемы.

Пусть на $[-1, 1]$ задана неотрицательная функция $q(x)$ и задано разбиение $\Delta = \{x_0 = -1 < x_1 < \ldots < x_{m+1} = 1\}$ отрезка $[-1, 1]$, $\lambda(\Delta) = \max\{x_{k+1} - x_k : k = \overline{0, m}\}$ — параметр разбиения Δ. Выбирая в каждом из отрезков $[x_k, x_{k+1}]$ по точке ξ_k, получаем разбиение (Δ, ξ) с отмеченными точками. Во множестве всех разбиений с отмеченными точками введем базу $\lambda(\Delta) \to 0$ [5, с. 337], элементами которой являются множества вида $\{(\Delta, \xi) : \lambda(\Delta) < \delta\}$, где δ — произвольное положительное число. Функции $q(x)$ и произвольному разбиению (Δ, ξ) с отмеченными точками сопоставим сумму

$$\sigma(q; \Delta, \xi) = \sum_{k=0}^{m} \Omega^{-1}(q(\xi_k)\Omega(x_{k+1} - x_k)), \tag{4}$$

которая при $\Omega(t) = t$ является интегральной суммой Римана.

Пусть для заданного числа $c>0$ функция $\gamma_c(x)$ определяется из уравнения

$$c\int_0^x \omega(t/2)\,dt = \int_0^{\gamma_c(x)} \omega(t/2)\,dt, \tag{5}$$

или, что то же,

$$c\Omega(x) = \Omega(\gamma_c(x)).$$

Тогда

$$\gamma_c(x) = \Omega^{-1}(c\Omega(x)),$$

и, следовательно, $\gamma_c(x)$ непрерывно дифференцируема. Дифференцируя (5), получаем

$$c\omega(x/2) = \omega(\gamma_c(x)/2)\gamma_c'(x),$$

и, следовательно, для $x>0$

$$\gamma_c'(x) = \frac{c\omega(x/2)}{\omega(\gamma_c(x)/2)}.$$

Отметим также, что если $c>1$, то

$$1 \le \frac{\gamma_c(x)}{x} \le c, \tag{6}$$

а в случае $c<1$

$$c \le \frac{\gamma_c(x)}{x} \le 1. \tag{7}$$

Докажем, например, (6). Неравенство $\gamma_c(x) \ge x$ при $c>1$ очевидно. С другой стороны, $\gamma_c(x) \le cx$, так как

$$\int_0^{cx} \omega(t/2)\,dt = \int_0^x \omega(t/2)\,dt + \int_x^{cx} \omega(t/2)\,dt \ge$$

$$\ge \int_0^x \omega(t/2)\,dt + (c-1)x\omega(x/2) \ge$$

$$\ge \int_0^x \omega(t/2)\,dt + (c-1)\int_0^x \omega(t/2)\,dt = c\int_0^x \omega(t/2)\,dt.$$

В силу (6) и (7) при любом $c>0$ функция $\gamma_c(x)/x$, $x>0$, ограничена. Следовательно, если $\gamma_c(x)/x$, $x>0$, монотонна, то существует

$$\lim_{x\to 0} \frac{\gamma_c(x)}{x} =: A(c).$$

Ясно, что в случае, когда $\omega(t)=t^{\alpha}$, $0<\alpha\le 1$, функция $\gamma_c(x)/x$ постоянна. Достаточные условия монотонности функции $\gamma_c(x)/x$ при любом $c>0$ содержатся в следующей лемме.

Лемма 1. *Если функция* $x\omega'(x)/\omega(x)$ *монотонна в правой окрестности* *нуля, то при любом* $c > 0$ *функция* $\gamma_c(x)/x$ *также монотонна в этой окрестности нуля.*

Действительно,

$$\left(\frac{\gamma_c(x)}{x}\right)' = \frac{x\gamma_c'(x) - \gamma_c(x)}{x^2} = \frac{x\dfrac{c\omega(x/2)}{\omega(\gamma_c(x)/2)} - \gamma_c(x)}{x^2} =$$

$$= \frac{cx\omega(x/2) - \gamma_c(x)\omega(\gamma_c(x)/2)}{x^2\omega(\gamma_c(x)/2)}.$$

Следовательно, функция $(\gamma_c(x)/x)'$ будет знакопостоянной, а значит, $\gamma_c(x)/x$ — монотонной, если знакопостоянной будет функция

$$\psi(x) = cx\omega(x/2) - \gamma_c(x)\omega(\gamma_c(x)/2).$$

Но $\psi(0) = 0$ и, следовательно, для знакопостоянства функции $\psi(x)$ достаточно, чтобы она оказалась монотонной, т. е. достаточно знакопостоянства $\psi'(x)$. Но

$$\psi'(x) = c\omega(x/2) + \frac{c}{2}x\omega'(x/2) - \gamma_c'(x)\omega(\gamma_c(x)/2) -$$

$$- \gamma_c(x)\frac{\gamma_c'(x)}{2}\omega'(\gamma_c(x)/2) = c\omega(x/2) + \frac{c}{2}x\omega'(x/2) -$$

$$- \frac{c\omega(x/2)}{\omega(\gamma_c(x)/2)}\omega(\gamma_c(x)/2) - \frac{\gamma_c(x)}{2}\frac{c\omega(x/2)}{\omega(\gamma_c(x)/2)}\omega'(\gamma_c(x)/2) =$$

$$= c\omega(x/2)\left[\frac{(x/2)\omega'(x/2)}{\omega(x/2)} - \frac{(\gamma_c(x)/2)\omega'(\gamma_c(x)/2)}{\omega(\gamma_c(x)/2)}\right].$$

Значит, если функция $x\omega'(x)/\omega(x)$ будет монотонной, то $\psi'(x)$ — знакопостоянной. Лемма доказана.

Отметим, что функция $x\omega'(x)/\omega(x)$ будет монотонной в некоторой окрестности нуля для многих модулей непрерывности, отличных от $\omega(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha \le 1$. Так, это свойство имеет выпуклый вверх модуль непрерывности $\omega(t)$, который в правой окрестности нуля равен $1/\ln t^{-1}$, а также при любом $\alpha \in (0, 1)$ модуль непрерывности $\omega(t)$, который в правой окрестности нуля равен $t^\alpha(1 + |\ln t|)$. Вместе с тем существуют выпуклые вверх модули непрерывности, для которых функция $\gamma_c(x)/x$ не является монотонной, и, более того, $\lim\limits_{x\to 0}\gamma_c(x)/x$ не существует. Действительно, рассмотрим модуль непрерывности, который определяется так:

$$\omega(t) = \begin{cases} t^{1/2}, & t \in \bigcup\limits_{i=0}^{\infty}\left[\dfrac{1}{4^{2i+1}}, \dfrac{1}{4^{2i}}\right]; \\ \dfrac{1}{2^{2i+2}} + \dfrac{4^{i+1}}{3}\left(t - \dfrac{1}{4^{2i+2}}\right), & t \in \left[\dfrac{1}{4^{2i+2}}, \dfrac{1}{4^{2i+1}}\right], \qquad i = 0, 1, \ldots. \end{cases}$$

Как нетрудно подсчитать, в этом случае при любом i

$$\frac{\gamma_2(1/4^{2i+1})}{1/4^{2i+1}} = \left(\frac{124}{63}\right)^{2/3} < \sqrt[3]{4},$$

а

$$\frac{\gamma_2\left(1/4^{2i}\right)}{1/4^{2i}} = 3\sqrt{\frac{818}{567}} - 2 > 1{,}6.$$

Следовательно,

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\gamma_2\left(1/4^{2i+1}\right)}{1/4^{2i+1}} = \left(\frac{124}{63}\right)^{2/3} < 3\sqrt{\frac{818}{567}} - 2 = \lim_{i\to\infty} \frac{\gamma_2\left(1/4^{2i+1}\right)}{1/4^{2i+1}},$$

так что предел при $x \to 0$ отношения $\gamma_2(x)/x$ в рассматриваемом случае не существует.

Теперь докажем, что если функция $q(x)$ кусочно-постоянна на $[-1, 1]$, а модуль непрерывности $\omega(t)$ таков, что при любом $c > 0$ функция $\gamma_c(x)/x$ монотонна в правой окрестности нуля (в частности, если монотонна функция $x\omega'(x)/\omega(x)$), то существует предел сумм (4) при $\lambda(\Delta) \to 0$.

Лемма 2. *Если* $a_0 = -1 < a_1 < \ldots < a_{l+1} = 1$ *и* $q(x) = c_k \geq 0$ *для* $x \in [a_k, a_{k+1})$ (*для* $x \in [a_l, a_{l+1}]$, *если* $k = l$), *а модуль непрерывности* $\omega(t)$ *таков, что при любом* $c > 0$ *функция* $\gamma_c(x)/x$ *монотонна в правой окрестности нуля, то*

$$\lim_{\lambda(\Delta)\to 0} \sigma(q; \Delta, \xi) = \sum_{k=0}^{l} A(c_k)(a_{k+1} - a_k),$$

где

$$A(c_k) = \lim_{x\to 0} \frac{\gamma_{c_k}(x)}{x}, \quad \text{если } c_k \neq 0,\ A(0) = 0.$$

Доказательство. В условиях леммы

$$\sigma(q; \Delta, \xi) = \sum_{k=0}^{m} \Omega^{-1}\left(q(\xi_k)\Omega(x_{k+1} - x_k)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{l} \sum_{\xi_i \in (a_k, a_{k+1})} \Omega^{-1}\left(c_k \Omega(x_{i+1} - x_i)\right) =$$

$$= \sum_{k: c_k > 0} \sum_{\xi_i \in (a_k, a_{k+1})} (x_{i+1} - x_i) \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \Omega^{-1}\left(c_k \Omega(x_{i+1} - x_i)\right) =$$

$$= \sum_{k: c_k > 0} \sum_{\xi_i \in (a_k, a_{k+1})} (x_{i+1} - x_i) \frac{\gamma_{c_k}(x_{i+1} - x_i)}{x_{i+1} - x_i}.$$

Учитывая монотонность $\gamma_c(x)/x$, получаем

$$\frac{\gamma_{c_k}(x_{i+1} - x_i)}{x_{i+1} - x_i} \to A(c_k) \quad \text{при } \lambda(\Delta) \to 0.$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta\,(0 < \delta < \varepsilon/l)$ такое, что если $\lambda(\Delta) < \delta$, то для любого i

$$\left| \frac{\gamma_{c_k}(x_{i+1} - x_i)}{x_{i+1} - x_i} - A(c_k) \right| < \varepsilon.$$

Следовательно, если $\lambda(\Delta) < \delta$, то

$$\left|\sigma(q;\Delta,\xi)-\sum_{k=0}^{l}A(c_k)(a_{k+1}-a_k)\right| \le$$

$$\le \left|\sum_{k:c_k>0}\sum_{\xi_i\in(a_k,a_{k+1})}(x_{i+1}-x_i)\frac{\gamma_{c_k}(x_{i+1}-x_i)}{x_{i+1}-x_i}-\sum_{k:c_k>0}A(c_k)\sum_{\xi_i\in(a_k,a_{k+1})}(x_{i+1}-x_i)\right|+$$

$$+\left|\sum_{k:c_k>0}A(c_k)\left(\sum_{\xi_i\in(a_k,a_{k+1})}(x_{i+1}-x_i)-(a_{k+1}-a_k)\right)\right| \le$$

$$\le \sum_{k:c_k>0}\sum_{\xi_i\in(a_k,a_{k+1})}(x_{i+1}-x_i)\left|\frac{\gamma_{c_k}(x_{i+1}-x_i)}{x_{i+1}-x_i}-A(c_k)\right|+$$

$$+\ 2l\delta\max_k A(c_k) < 2\varepsilon\left(1+\max_k A(c_k)\right).$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Если функция* $q(x)$ *почти всюду положительна и непрерывна на* $[-1,1]$, *а модуль непрерывности* $\omega(t)$ *таков, как в лемме 2, то* $\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0}\sigma(q;\Delta,\xi)$ *существует.*

Доказательство. Для $n\in\mathbb{N}$ и $k=-2^n,-2^n+1,\ldots,2^n-2$ пусть $\delta_{n,k}=[k/2^n,(k+1)/2^n)$, $\delta_{n,2^n-1}=[(2^n-1)/2^n,1]$. Для $x\in[-1,1]$ положим $q_n'(x)=\inf\{q(x),\ x\in\delta_{n,k}\}$ и $q_n''(x)=\sup\{q(x),\ x\in\delta_{n,k}\}$, если $x\in\delta_{n,k}$, $k=-2^n,\ldots,2^n-1$. Ясно, что при $n\to\infty$ последовательность кусочно-постоянных функций $q_n'(x)$ (соответственно $q_n''(x)$), оставаясь снизу (соответственно сверху) от $q(x)$, монотонно не убывая (не возрастая), равномерно на $[-1,1]$ сходится к функции $q(x)$. При этом для каждого n существует

$$\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\sigma(q_n';\Delta,\xi)=:\ A_n' \quad\text{и}\quad \lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\sigma(q_n'';\Delta,\xi)=:\ A_n'',$$

причем при всех $n,m\in\mathbb{N}$ будет $A_n'\le A_m''$ и

$$A_n''-A_n'=\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}(\sigma(q_n'';\Delta,\xi)-\sigma(q_n';\Delta,\xi)).$$

Зададим произвольное $\varepsilon>0$ и выберем n_0 настолько большим, чтобы при всех $n>n_0$ и $x\in[-1,1]$ было $q_n''(x)-q_n'(x)<\varepsilon$. При таких n, учитывая выпуклость вверх функции Ω^{-1}, для любого разбиения (Δ,ξ) будем иметь

$$\sigma(q_n'';\Delta,\xi)-\sigma(q_n';\Delta,\xi)=$$

$$=\sum_{k=-2^n}^{2^n-1}\sum_{\xi_i\in\delta_{nk}}(\Omega^{-1}(q_n''(\xi_i)\Omega(x_{i+1}-x_i))-\Omega^{-1}(q_n'(\xi_i)\Omega(x_{i+1}-x_i)))=$$

$$=\sum_{k=-2^n}^{2^n-1}\sum_{\xi_i\in\delta_{nk}}\left(\Omega^{-1}\left(\sup_{x\in\delta_{nk}}q(x)\Omega(x_{i+1}-x_i)\right)-\Omega^{-1}\left(\inf_{x\in\delta_{nk}}q(x)\Omega(x_{i+1}-x_i)\right)\right)\le$$

$$\le\sum_{k=-2^n}^{2^n-1}\sum_{\xi_i\in\delta_{nk}}\Omega^{-1}\left(\left(\sup_{x\in\delta_{nk}}q(x)-\inf_{x\in\delta_{nk}}q(x)\right)\Omega(x_{i+1}-x_i)\right)\le$$

$$\leq \sum_{k=-2^n}^{2^n-1} \sum_{\xi_i \in \delta_{nk}} \Omega^{-1}(\varepsilon\Omega(x_{i+1}-x_i)) = \sum_{j=1}^{m} (x_{j+1}-x_j)\frac{\gamma_\varepsilon(x_{j+1}-x_j)}{x_{j+1}-x_j}$$

(в последней сумме m — количество точек разбиения Δ). Отсюда следует, что при всех $n > n_0$ и достаточно малых $\lambda(\Delta)$

$$\sigma(q_n''; \Delta, \xi) - \sigma(q_n'; \Delta, \xi) < 3A(\varepsilon) \tag{8}$$

и

$$A_n'' - A_n' \leq 2A(\varepsilon). \tag{9}$$

Убедимся в том, что при $\varepsilon \to 0$ будет $A(\varepsilon) \to 0$. Предположим, что для некоторой последовательности $\varepsilon_k \to 0$ при всех k справедливо неравенство $A(\varepsilon_k) > d > 0$, или, что то же,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\gamma_{\varepsilon_k}(x)}{x} > d > 0.$$

Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можем считать, что

$$\frac{8\varepsilon_k}{d}\left(\frac{4}{d}+1\right) < 1. \tag{10}$$

Для каждого k выберем x_k (близкое к нулю) так, чтобы $\gamma_{\varepsilon_k}(x_k)/x_k > d/2$. Будем иметь

$$\varepsilon_k x_k \omega(x_k/2) > \varepsilon_k \int_0^{x_k} \omega(t/2)\,dt = \int_0^{\gamma_{\varepsilon_k}(x_k)} \omega(t/2)\,dt > \int_0^{dx_k/2} \omega(t/2)\,dt. \tag{11}$$

В силу известной леммы Стечкина для любого модуля непрерывности $\omega(t)$ найдется выпуклый вверх модуль непрерывности $\overline{\omega}(t)$ такой, что при всех t будет $\omega(t) \leq \overline{\omega}(t) \leq 2\omega(t)$. Поэтому

$$\int_0^{dx_k/2} \omega(t/2)\,dt \geq \frac{1}{2}\int_0^{dx_k/2} \overline{\omega}(t/2)\,dt \geq \frac{1}{4}\,\overline{\omega}\left(\frac{d}{4}x_k\right)\frac{d}{2}x_k \geq \frac{dx_k}{8}\,\omega\left(\frac{dx_k}{4}\right). \tag{12}$$

Сопоставляя (11) и (12), получаем

$$\varepsilon_k \omega\left(\frac{x_k}{2}\right) > \frac{d}{8}\,\omega\left(\frac{dx_k}{4}\right),$$

или

$$\omega\left(\frac{dx_k}{4}\right) < \frac{8\varepsilon_k}{d}\,\omega\left(\frac{4}{d}\cdot\frac{dx_k}{4}\right) \leq \frac{8\varepsilon_k}{d}\left(\frac{4}{d}+1\right)\omega\left(\frac{dx_k}{4}\right).$$

Отсюда с учетом (10) получаем противоречивое неравенство

$$\omega\left(\frac{dx_k}{4}\right) < \omega\left(\frac{dx_k}{4}\right).$$

Таким образом, действительно, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} A(\varepsilon) = 0$.

Учитывая (8) и (9), видим, что для любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших n и достаточно малых $\lambda(\Delta)$

$$\sigma(q_n''; \Delta, \xi) - \sigma(q_n'; \Delta, \xi) < \varepsilon \tag{13}$$

и

$$A_n'' - A_n' < \varepsilon. \tag{14}$$

Так как $A_n' \le A_m''$ при всех $n, m \in \mathbb{N}$, то учитывая (14), получаем

$$\inf_n A_n' = \sup_n A_n'' =: B.$$

Докажем, что

$$\lim_{\lambda(\Delta)\to 0} \sigma(q; \Delta, \xi) = B.$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем $n_0 \in \mathbb{N}$ и $\delta > 0$ так, чтобы при $n > n_0$ и $\lambda(\Delta) < \delta$ выполнялось (13), а также соотношения

$$|A_n'' - B| < \varepsilon/3, \quad |A_n' - B| < \varepsilon/3,$$

$$|\sigma(q_n''; \Delta, \xi) - A_n''| < \varepsilon/3, \quad |\sigma(q_n'; \Delta, \xi) - A_n'| < \varepsilon/3.$$

Тогда при $\lambda(\Delta) < \delta$, учитывая неравенства

$$\sigma(q_n'; \Delta, \xi) \le \sigma(q; \Delta, \xi) \le \sigma(q_n''; \Delta, \xi),$$

имеем

$$|\sigma(q; \Delta, \xi) - B| \le$$

$$\le |\sigma(q; \Delta, \xi) - \sigma(q_n''; \Delta, \xi)| + |\sigma(q_n''; \Delta, \xi) - A_n''| + |A_n'' - B| \le$$

$$\le |\sigma(q_n'; \Delta, \xi) - \sigma(q_n''; \Delta, \xi)| + |\sigma(q_n''; \Delta, \xi) - A_n''| + |A_n'' - B| < \frac{5}{3}\varepsilon,$$

так что $\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0} \sigma(q; \Delta, \xi)$ действительно существует и равен B.

Лемма доказана.

Из лемм 2 и 3 непосредственно вытекает такое следствие.

Следствие. *Если весовая функция такова, как в лемме 2 или в лемме 3, а $\omega(t)$ таков, как в лемме 2, то существует*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n+1}^{n} \Omega^{-1}\left(q\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\Omega\left(\frac{1}{n}\right)\right) =: B(q; \omega). \tag{15}$$

3. Теперь перейдем к оптимизации квадратурных формул на классах H^ω с такими $\omega(t)$, которые удовлетворяют условиям леммы 2. Пусть $X^m = \left\{x_1^m, \ldots, x_m^m\right\}$ — асимптотически оптимальная последовательность наборов узлов. Если $q(x)$ — непрерывная и почти всюду положительная весовая функция, то

$$\max \Delta x_k^m \to 0 \quad \text{при } m \to \infty, \tag{16}$$

где $\Delta x_k^m = x_{k+1}^m - x_k^m$, $x_0^m = -1$, $x_{m+1}^m = 1$, $k = \overline{0,m}$. Действительно, предполагая противное, нетрудно убедиться в том, что $R(H^\omega; q; X^m)$ не стремится к нулю при $m \to \infty$, что противоречит асимптотической оптимальности последовательности наборов узлов X^m.

Используя результаты [2], погрешность оптимальной по коэффициентам для класса H^ω квадратурной формулы с набором узлов X^m представим в виде

$$R(H^\omega; q; X^m) = \int_{-1}^{x_1^m} \omega\left(x_1^m - x\right) q(x)\, dx +$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}\int\limits_{x_k^m}^{x_{k+1}^m} q(x)\varphi_k(x)\,dx + \int\limits_{x_m^m}^{1}\omega\left(x-x_m^m\right)q(x)\,dx,$$

где $\varphi_k(x) = \min\left\{\omega\left(x-x_k^m\right), \omega\left(x_{k+1}^m - x\right)\right\},\ x\in\left(x_k^m, x_{k+1}^m\right)$.

Получим для $R(H^{\omega}; q; X^m)$ оценку снизу. Используя непрерывность весовой функции и теорему о среднем для интеграла, будем иметь

$$R(H^{\omega}; q; X^m) \geq 2\sum_{k=0}^{m} q(\xi_k)\int\limits_{0}^{\Delta x_k^m/2}\omega(t)\,dt, \tag{17}$$

где ξ_k — подходящая точка из (x_k, x_{k+1}). Отметим, что задача минимизации суммы

$$\sum_{k=0}^{m} q(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)^{\alpha+1},$$

в которую сумма, стоящая в правой части (17), превращается при $\omega(t)=t^{\alpha}$, известна и рассматривалась в [6].

С учетом определений функций Ω и Ω^{-1}, применяя неравенство Иенсена, получаем

$$\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} 2q(\xi_k)\int\limits_{0}^{\Delta x_k^m/2}\omega(t)\,dt = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} q(\xi_k)\,\Omega\left(\Delta x_k^m\right) =$$

$$= \Omega\left(\Omega^{-1}\left(\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} q(\xi_k)\Omega\left(\Delta x_k^m\right)\right)\right) \geq$$

$$\geq \Omega\left(\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\Omega^{-1}\left(q(\xi_k)\Omega\left(\Delta x_k^m\right)\right)\right).$$

В силу леммы 3 и соотношения (15)

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\Omega^{-1}\left(q(\xi_k)\Omega\left(\Delta x_k^m\right)\right) = B(q;\omega) = B.$$

Поэтому для любого $\varepsilon>0$ при всех достаточно больших m

$$\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\Omega^{-1}\left(q(\xi_k)\Omega\left(\Delta x_k^m\right)\right) \geq \frac{(1-\varepsilon)B}{m}.$$

Учитывая (17), при всех достаточно больших m получаем

$$R(H^{\omega}; q; X^m) \geq m\,\Omega\left(\frac{(1-\varepsilon)B}{m}\right).$$

Следовательно, для любого $\varepsilon>0$

$$\varliminf_{m\to\infty}\frac{R(H^{\omega};q;X^m)}{m\Omega(B/m)} \geq \varliminf_{m\to\infty}\frac{m\Omega\left((1-\varepsilon)B/m\right)}{m\Omega(B/m)} \geq$$

$$\geq \varliminf_{m\to\infty}\frac{\Omega(B/m)-(\varepsilon B/m)\Omega'(B/m)}{m\Omega(B/m)} =$$

$$= 1 - \varepsilon \varliminf_{m\to\infty} \frac{\omega\bigl(B/(2m)\bigr)B/m}{\int_0^{B/m}\omega(t/2)\,dt} \ge 1 - 2\varepsilon \varliminf_{m\to\infty} \frac{\overline{\omega}\bigl(B/(2m)\bigr)B/m}{\int_0^{B/m}\overline{\omega}(t/2)\,dt},$$

где $\overline{\omega}(t)$ — выпуклая вверх оболочка функции $\omega(t)$. Но для выпуклой вверх функции $\overline{\omega}(t)$

$$\overline{\omega}\bigl(B/(2m)\bigr)B/m \le 2\int_0^{B/m}\overline{\omega}(t/2)\,dt.$$

Следовательно,

$$\varliminf_{m\to\infty} \frac{R(H^{\omega};q;X^m)}{m\Omega(B/m)} \ge 1 - \varepsilon,$$

и, так как это верно для любого $\varepsilon > 0$,

$$\varliminf_{m\to\infty} \frac{R(H^{\omega};q;X^m)}{m\Omega(B/m)} \ge 1. \tag{18}$$

Получим теперь оценку сверху. Рассмотрим последовательность векторов узлов $X^m = \left\{x_1^m = -1 < x_2^m < \ldots < x_m^m = 1\right\}$ таких, что

$$\int_{x_1^m}^{x_2^m} q(x)\varphi_1(x)\,dx = \int_{x_2^m}^{x_3^m} q(x)\varphi_2(x)\,dx = \ldots = \int_{x_{m-1}^m}^{x_m^m} q(x)\varphi_m(x)\,dx =: c_m. \tag{19}$$

Для этой последовательности будет

$$R(H^{\omega};q;X^m) = (m-1)c_m. \tag{20}$$

Используя теорему о среднем для интеграла, в каждом интервале $\left(x_k^m, x_{k+1}^m\right)$ найдем такую точку ξ_k, что

$$c_m = q(\xi_k)\int_{x_k^m}^{x_{k+1}^m}\varphi_k(t)\,dt = 2q(\xi_k)\int_0^{\Delta x_k^m/2}\omega(t)\,dt = q(\xi_k)\,\Omega\bigl(\Delta x_k^m\bigr).$$

Далее получим

$$\frac{1}{m-1}\Omega^{-1}(c_m) = \frac{1}{m-1}\Omega^{-1}\Bigl(q(\xi_k)\Omega\bigl(\Delta x_k^m\bigr)\Bigr),$$

и, следовательно,

$$\Omega^{-1}(c_m) = \frac{1}{m-1}\sum_{k=1}^{m-1}\Omega^{-1}\Bigl(q(\xi_k)\Omega\bigl(\Delta x_k^m\bigr)\Bigr).$$

Значит,

$$c_m = \Omega\left(\frac{1}{m-1}\sum_{k=1}^{m-1}\Omega^{-1}\Bigl(q(\xi_k)\Omega\bigl(\Delta x_k^m\bigr)\Bigr)\right). \tag{21}$$

Ясно, что узлы, определяемые условиями (19), имеют свойство (16). Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших m

$$\frac{1}{m-1}\sum_{k=1}^{m}\Omega^{-1}\Bigl(q(\xi_k)\Omega\bigl(\Delta x_k^m\bigr)\Bigr) \le \frac{(1+\varepsilon)B}{m}. \tag{22}$$

Сопоставляя (20) – (22), при всех достаточно больших m получаем

$$R(H^{\omega}; q; X^{m}) \le m\Omega\left(\frac{(1+\varepsilon)B}{m}\right).$$

Значит,

$$\varlimsup_{m\to\infty} \frac{R(H^{\omega};q;X^{m})}{m\Omega(B/m)} \le \varlimsup_{m\to\infty} \frac{\Omega((1+\varepsilon)B/m)}{\Omega(B/m)} =$$

$$= \varlimsup_{m\to\infty} \frac{\int_0^{(1+\varepsilon)B/m} \omega(t/2)\,dt}{\int_0^{B/m} \omega(t/2)\,dt} = 1 + \varlimsup_{m\to\infty} \frac{\int_{B/m}^{(1+\varepsilon)B/m} \omega(t/2)\,dt}{\int_0^{B/m} \omega(t/2)\,dt} \le$$

$$\le \varlimsup_{m\to\infty} \frac{\omega(2B/(2m))\varepsilon B/m}{\frac{1}{2}\int_0^{B/m} \overline{\omega}(t/2)\,dt} + 1 \le 1 + \varlimsup_{m\to\infty} \frac{2\omega\big(B/(2m)\big)\varepsilon B/m}{\frac{1}{4}\omega\big(B/(2m)\big)B/m} = 1 + 8\varepsilon.$$

Поскольку это верно для любого $\varepsilon > 0$, то

$$\varlimsup_{m\to\infty} \frac{R(H^{\omega};q;X^{m})}{m\Omega(B/m)} \le 1. \tag{23}$$

Сопоставляя (18) и (23), видим, что справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если модуль непрерывности* $\omega(t)$ *таков, что при любом* $c > 0$ *функция* $\gamma_c(x)/x$ *монотонна в правой окрестности нуля, а весовая функция непрерывна и почти всюду положительна на* $[-1, 1]$, *то*

$$\varlimsup_{m\to\infty} \frac{R(H^{\omega};q)}{m\Omega(B/m)} = 1, \tag{24}$$

где функция Ω *определена соотношением* (3), *а константа* $B = B(q; \omega)$ — *соотношением* (15). *При этом асимптотически оптимальная последовательность* $\{X^{m}\}$ *наборов узлов задается соотношениями* (19).

1. *Корнейчук Н. П.* Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных // Мат. заметки. – 1968. – **3**, №5. – С. 565–576.
2. *Лебедь Г. К.* О квадратурных формулах с наименьшей оценкой остатка на некоторых классах функций // Там же. – С. 577–586.
3. *Бабенко В. Ф.* Асимптотическая точная оценка остатка наилучших для некоторых классов функций кубатурных формул // Там же. – 1976. – **19**, №3. – С. 313–322.
4. *Моторный В. П.* Исследования днепропетровских математиков по оптимизации квадратурных формул // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, №1. – С. 18–33.
5. *Зорич В. А.* Математический анализ. – М.: Наука, 1981. – Ч. 1. – 544 с.
6. *Стечкин С. Б.* Одна оптимизационная задача // Numerishe Methoden der Approximationstheorie. – Basel; Stuttgart: Birkhaüser, 1972. – S. 205–208.

Получено 11.05.94