УДК 517.5

О. А. Новиков,
В. И. Рукасов, кандидаты физ.-мат. наук (Славян. пед. ин-т)

ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССОВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ОБОБЩЕННЫМИ СУММАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА

Generalized Vallee Poussin sums are introduced and their approximation properties for classes of continuous periodic functions, $C^{\psi}_{\beta,\infty}$, are studied.

Вводяться узагальнені суми Валле Пуссена і досліджуються їх апроксимаційні властивості на классах неперервних періодичних функцій $C^{\psi}_{\beta,\infty}$.

В работе А. И. Степанца [1] введена классификация периодических функций на основе преобразований их рядов Фурье с помощью мультипликаторов и сдвигов по аргументу, охватывающая широкий спектр функций, включая функции с расходящимися рядами Фурье, гладкие, бесконечно дифференцируемые. В частности, им введены классы $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ следующим образом.

Пусть C — множество непрерывных 2π-периодических функций и

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \tag{1}$$

— ряд Фурье функции $f \in C$.

Пусть, далее, $\psi(k)$ — произвольная функция натурального аргумента и β — фиксированное действительное число.

Предположим, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k \cos(kx + \beta\pi/2) + b_k \sin(kx + \beta\pi/2)\right) \tag{2}$$

является рядом Фурье некоторой суммируемой функции, имеющей на периоде среднее значение, равное нулю.

Функцию, для которой ряд (2) является рядом Фурье, обозначают $f^{\psi}_{\beta}(x)$ и называют (ψ, β)-производной функции $f(x)$. Множество функций $f \in C$ таких, что $\operatorname{ess\,sup} \left| f^{\psi}_{\beta}(x) \right| \le 1$, обозначают $C^{\psi}_{\beta,\infty}$.

Придерживаясь определений, сделанных в работе [2], будем считать, что значения $\psi(k)$ являются значениями некоторой выпуклой вниз при всех $x \ge 1$ функции $\psi(x)$ непрерывного аргумента.

Множество $\mathfrak{M}$ всех выпуклых вниз при $x \ge 1$ функций $\psi(x)$, удовлетворяющих условию $\lim\limits_{x\to\infty} \psi(x) = 0$, далеко не однородно по скорости их убывания к нулю. В связи с этим в работе [2] предложено выделить из $\mathfrak{M}$ подмножества $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_C$, $\mathfrak{M}_\infty$ согласно следующей характеристике.

Пусть $\psi \in \mathfrak{M}$ и $\eta(t) = \eta(\psi, t)$ — функция, связанная с $\psi(t)$ равенством

$$\eta(t) = \psi^{-1}\left[\frac{1}{2}\psi(t)\right],$$

где $\psi^{-1}(x)$ — функция, обратная $\psi(x)$.

Пусть

$$\mu(t) = \mu(\psi, t) = \frac{t}{\eta(t) - t}.$$

Функцию $\mu(\psi, t)$ называют модулем полураспада функции $\psi(t)$.

К множеству $\mathfrak{M}_C$ относят все функции $\psi \in \mathfrak{M}$ такие, что $0 < K_1 \leq \mu(\psi, t) \leq K_2 < \infty$; к множеству $\mathfrak{M}_0$ — функции $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых $\mu(\psi, t) \leq K < < \infty$; к множеству $\mathfrak{M}_\infty$ — все функции $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых $\mu(\psi, t)$ монотонно возрастает с ростом t и неограничена при $t \to \infty$.

В работе [2] показано, что к $\mathfrak{M}_\infty$ относятся функции $\psi \in \mathfrak{M}$, при которых класс $C^\psi_{\beta,\infty}$ содержит бесконечно дифференцируемые функции, включая аналитические и целые.

Обозначим через $\mathfrak{M}'_\infty$ множество функций $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, для которых $\lim\limits_{t \to \infty} \mu(\psi, t)/t = 0$. Из результатов работы [2] вытекает, что если $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$, то класс $C^\psi_{\beta,\infty}$ содержит бесконечно дифференцируемые функции, которые, однако, не являются аналитическими.

Кроме того, через F, следуя [2], обозначим множество функций $\psi \in \mathfrak{M}$ таких, что

$$\int\limits_1^\infty x^{-1} \psi(x)\, dx < \infty.$$

В работах [1 – 7] на классах $C^\psi_{\beta,\infty}$ исследовались аппроксимационные свойства классических методов Фурье, Валле Пуссена, Зигмунда, Рогозинского, Фавара и др. В работах [8, 9] на классах $C^\psi_{\beta,\infty}$ рассматривались аппроксимационные свойства обобщенных сумм Зигмунда и некоторых других обобщенных методов приближения.

В работе [10] нами введены так называемые обобщенные суммы Валле Пуссена следующим образом.

Пусть $f \in C^\psi_{\beta,\infty}$ имеет ряд Фурье вида (1), p — некоторое натуральное число из промежутка $[1, n-1]$. Пусть далее $\lambda^{\varphi,h}_{n,p}(x)$ — последовательность непрерывных при $x \geq 0$ функций, задаваемых соотношением

$$\lambda^{\varphi,h}_{n,p}(x) = \lambda_n(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \dfrac{n-p}{n}; \\ 1 - \dfrac{\varphi_n(nx)}{\varphi_n(n)} h_n(x), & \dfrac{n-p}{n} \leq x \leq 1; \\ 0, & 1 \leq x, \end{cases}$$

где $h_n(x)$ — последовательность дважды дифференцируемых при $x \in \in [(n-p)/n, 1]$ функций, имеющих ограниченные абсолютной константой свои значения и значения вторых производных, причем $h_n((n-p+1)/n) \neq 0$, $h_n(1) = 1$; $\varphi_n(x)$ — последовательность функций, дифференцируемых и монотонно возрастающих при $x \in [n-p+1, n]$, причем, если $x \in [(n-p)/n, (n- -p+1)/n]$, то

$$\varphi_n(nx) = \frac{\psi(n-p+1)\varphi_n(n-p+1)h_n((n-p+1)/n)(nx-n+p)}{\psi(nx)h_n(x)}.$$

Рассмотрим операторы вида

$$V^{\varphi,h}_{n,p}(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty \lambda^{\varphi,h}_{n,p}(k/n)(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

При $\varphi_n(x) = (x-n+p)p^{-1}$, $x \in [n-p, n]$ и $h_n(x) \equiv 1$, $x \in [(n-p)/n, 1]$, эти операторы совпадают с известными суммами Валле Пуссена $V_{n,p}(f,x) \overset{\mathrm{df}}{=} \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{k=n-p}^{n} S_k(f,x)/p$, где $S_k(f,x)$ — частные суммы Фурье порядка k функции $f(x)$. Поэтому функции $V_{n,p}^{\varphi,h}(f,x)$ мы называем обобщенными суммами Валле Пуссена.

Здесь мы исследуем асимптотическое поведение при $n \to \infty$ величины

$$\varepsilon\left(C_{\beta,\infty}^{\psi}; V_{n,p}^{\varphi,h}\right) = \sup_{f \in C_{\beta,\infty}^{\psi}} \left\| f(x) - V_{n,p}^{\varphi,h}(f,x) \right\|_C \tag{3}$$

в предположении, что $\lim\limits_{n\to\infty} p/n$ существует и равен θ, $0 \le \theta \le 1$.

Для величины (3) при $\psi \in F$ нами получены асимптотические равенства, которые при $\psi \in (F \cap \mathfrak{M}_0) \cup \mathfrak{M}'_\infty$ обеспечивают решение задачи Колмогорова – Никольского [2]. При $\varphi_n(x) = (x+p-n)/p$, $x \in [n-p, n]$, $h_n(x) \equiv 1$, $x \in [(n-p)/n, 1]$ и $\psi(x) = x^{-r}$, $r > 0$, и целых β такие результаты получены Б. Надем [11], для произвольных β — С. А. Теляковским [12], для классов $C_{\beta,\infty}^{\psi}$ — А. И. Степанцом [1, 2] и одним из авторов настоящей статьи [3, 4].

Из результатов работы [13], в частности, следует, что суммы $V_{n,p}(f,x)$ при $p \sim 2n - \eta(n)$, $n \to \infty$, обеспечивают наилучший порядок приближения на классе $C_{\beta,\infty}^{\psi}$ в случае, когда $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$.

В настоящей статье найдены условия, при которых суммы $V_{n,p}^{\varphi,n}(f,x)$ на классе $C_{\beta,\infty}^{\psi}$ при $\psi \in \mathfrak{M}_C \cup \mathfrak{M}_\infty \overset{\mathrm{df}}{=} \mathfrak{M}_{C,\infty}$ дают приближение по порядку, совпадающее с наилучшим, а в случае $\psi \in \mathfrak{M}_C \cup \mathfrak{M}'_\infty$ для величины (3) получены асимптотические равенства, обеспечивающие решение задачи Колмогорова – Никольского.

1. Вспомогательные утверждения. Пусть при некотором натуральном $p \in [1, n-1]$ метод приближения задан с помощью последовательности непрерывных функций $\lambda_n(x)$ таких, что функции

$$\tau_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le \dfrac{n-p}{n}; \\ (1-\lambda_n(x))\psi(nx), & \dfrac{n-p}{n} \le x \le 1; \\ \psi(nx), & 1 \le x, \end{cases} \tag{4}$$

непрерывны при $x \ge 0$.

Тогда согласно лемме 2 работы [3] в случае сходимости интегралов

$$A(\tau_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} \tau_n(x) \cos(xt + \beta\pi/2)\, dx \right| dt \tag{5}$$

справедливо равенство

$$\varepsilon\left(C_{\beta,\infty}^{\psi}, U_n\right) = A(\tau_n) + O(a(\tau_n)), \quad n \to \infty, \tag{6}$$

где

$$a(\tau_n) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t| \geq \pi n/2} \left| \int\limits_0^\infty \tau_n(x) \cos(xt + \beta\pi/2)\, dx \right| dt. \tag{7}$$

Введем обозначения:

$$I_1^*(m) = \int\limits_{(n-m)/n}^{1} \frac{|\tau_n(x) - (n(x-1)/m+1)\psi(n)|}{1-x} dx, \quad m \in [1, n],$$

$$I_2^* = \int\limits_0^1 \frac{|\tau_n(x)|}{x} dx,$$

$$I_3^* = \int\limits_0^1 (x - x^2) |d\tau_n'(x)|.$$

Следующее утверждение является некоторым усилением теоремы 1 работы [3].

Лемма 1. *Пусть функции* $\tau_n(x)$ *абсолютно непрерывны при* $x \in [0, 1]$, *интегралы* $I_1^*(n)$ *сходятся, функции* $\tau_n'(x)$ *в тех точках, где они не существуют, можно доопределить так, что сходятся интегралы* I_3^*.

Тогда если $\psi \in F$, *то при* $n \to \infty$ *справедливы равенства*

$$\varepsilon\left(C^\psi_{\beta,\infty}, U_n\right) = \frac{2|\sin\, \beta\pi/2|}{\pi} I_2^* + \frac{4}{\pi^2} \int\limits_D \frac{|\tau_n(x) - \psi(n)x|}{1-x} dx + O\left(\psi(n) \ln^+ \mu(n) + I_3^* + \int\limits_0^{2/n\pi} \frac{|\tau_n(1-x) - \psi(n)(1-x)|}{x} dx + |\sin\, \beta\pi/2| \left\{ \int\limits_n^\infty \frac{\psi(t)}{t} dt + \int\limits_D \frac{|\tau_n(x)|}{x} dx \right\} \right), \tag{8}$$

$$\varepsilon\left(C^\psi_{\beta,\infty}, U_n\right) = \frac{\psi(n)}{\pi} \int\limits_{1 \leq |t| \leq \mu(n)} \left| \frac{\sin(t + \beta\pi/2)}{t} \right| dt + O\left(\psi(n)) \ln^+ (\mu(n)/n) + |\sin \beta\pi/2| \left\{ I_2^* + \int\limits_n^\infty \frac{\psi(t)}{t} dt \right\} + I_1^*(n) + I_3^* \right), \tag{9}$$

где

$$D = \left\{ x \in [0,1] : \left| \sin\frac{\beta\pi}{2} \tau_n(x) \right| < |\tau_n(1-x) - \psi(n)(1-x)| \right\},$$

$$\ln^+ t = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1; \\ \ln t, & t \geq 1. \end{cases} \tag{10}$$

Если же $\psi \in \mathfrak{M}_{C,\infty}$ *и выполнено условие*

$$K_1 n/\mu(n) \leq p \leq K_2 n/\mu(n), \tag{11}$$

то при всех $n \in N$ *справедлива оценка*

$$\varepsilon\left(C^\psi_{\beta,\infty}, U_n\right) \leq K\left(I_1^*(p) + |\sin \beta\pi/2| I_2^* + I_3^* + \psi(n)\right). \tag{12}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\nu_{n,m}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le \dfrac{n-m}{n}; \\ ((n(x-1)/m)+1)\psi(n), & \dfrac{n-m}{n} \le x \le 1; \\ \psi(nx), & 1 \le x. \end{cases}$$

Такие вспомогательные функции введены А. И. Степанцом (см., например, [2, с. 5]) для исследования аппроксимационных свойств различных линейных методов.

Повторяя рассуждения леммы 3 работы [3], можно показать, что интегралы $A(\tau_n)$ сходятся. Поэтому, если показать, что сходятся интегралы $A(\nu_{n,m})$, то, используя соотношения (6), имеем

$$\varepsilon\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}, U_n\right) = A(\nu_{n,m}) + O(A(\delta_{n,m}) + a(\nu_{n,m})), \tag{13}$$

$$\varepsilon\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}, U_n\right) = A(\delta_{n,m}) + O(A(\nu_{n,m}) + a(\delta_{n,m})), \tag{14}$$

где $\delta_{n,m}(x) = \tau_n(x) - \nu_{n,m}(x)$.

Используя формулы (13), (14), получаем соотношения (8), (9), (12). С этой целью найдем асимптотические представления для величин, стоящих в правых частях этих формул. Имеем

$$A(\nu_{n,m}) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t| \ge \mu(n)} \left| \int\limits_0^{\infty} \nu_{n,m}(x) \cos(xt + \beta\pi/2)\, dx \right| dt \; +$$

$$+ \; \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t| \le \mu(n)} \left| \int\limits_0^{\infty} \nu_{n,m}(x) \cos(xt + \beta\pi/2)\, dx \right| dt \;\stackrel{\mathrm{df}}{=}\; \frac{1}{\pi}(I_1 + I_2). \tag{15}$$

Для величины I_1 после интегрирования по частям получаем

$$I_1 \le \int\limits_{|t| \ge \mu(n)} \left| \int\limits_{(n-m)/n}^{1} \frac{\psi(n)n}{m} \frac{\sin(xt + \beta\pi/2)}{t} dx \right| dt \; +$$

$$+ \int\limits_{|t| \ge \mu(n)} \left| \int\limits_1^{\infty} \frac{n}{t} \psi'(nx) \sin\left(xt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dx \right| dt.$$

Используя соотношения (4.22) и (7.66′) из работы [2, с. 60, 121] при $\psi \in \mathfrak{M}_{C,\infty}$ находим

$$I_1 \le \frac{\psi(n)n}{m} \int\limits_{|t| \ge \mu(n)} \frac{dt}{t^2} + K\psi(n) \le K\psi(n)\left(1 + \frac{n}{m\mu(n)}\right). \tag{16}$$

Далее имеем

$$I_2 = \int\limits_{1 \le |t| \le \mu(n)} \left| \int\limits_0^1 \nu_{n,m}(x) \cos(xt + \beta\pi/2)\, dx \right| dt \; +$$

$$+ \; O\left(\int\limits_{|t| \le \mu(n)} \left| \int\limits_1^{\infty} \psi(nx) \cos(xt + \beta\pi/2)\, dx \right| dt + \int\limits_{-1}^{1} \left| \int\limits_0^1 \nu_{n,m}(x) \cos(xt + \beta\pi/2)\, dx \right| dt \right). \tag{17}$$

Используя рассуждения работы [2. с. 59] и соотношения (7.66) из работы [2, с. 121], при $\psi \in \mathfrak{M}_{C,\infty}$ получаем

$$I_2 = \psi(n) \int\limits_{1 \le |t| \le \mu(n)} \Bigg| \frac{\sin(t+\beta\pi/2)}{t} + \frac{n}{mt^2}\big(\cos(t+\beta\pi/2) - \cos((n-m)t/n+\beta\pi/2)\big)\Bigg| dt + O(\psi(n)). \tag{18}$$

Используя свойства равномерно сходящихся рядов при $m = p$, $|t| \le \mu(n)$ и при выполнении условия (11), можно показать, что

$$\left|\frac{\sin(t+\beta\pi/2)}{t} + \frac{n}{pt^2}\big(\cos(t+\beta\pi/2) - \cos((n-p)t/n+\beta\pi/2)\big)\right| \le K\frac{n}{pt^2}.$$

Поэтому при выполнении условия (11)

$$I_2 \le K\left(\psi(n) + \frac{\psi(n)n}{p\mu(n)}\right) \le K\psi(n). \tag{19}$$

Объединяя соотношения (15), (16), (18) при $\psi \in \mathfrak{M}_{C,\infty}$ и $m = n$, имеем

$$A(\nu_{n,m}) = \frac{\psi(n)}{\pi} \int\limits_{1 \le |t| \le \mu(n)} \left|\frac{\sin(t+\beta\pi/2)}{t}\right| dt + O(\psi(n)). \tag{20}$$

Из соотношений (15), (16), (19) при $\psi \in \mathfrak{M}_{C,\infty}$ и при выполнении условия (11) вытекает оценка

$$A(\nu_{n,p}) \le K\psi(n). \tag{21}$$

Пусть теперь $\psi \in \mathfrak{M}_0 \cap F$. Имеем

$$A(\nu_{n,n}) \le \frac{2}{\pi}\left\{|\cos\beta\pi/2| \int\limits_0^\infty \left|\int\limits_0^\infty \nu_{n,n}(x)\cos xt\,dx\right| dt + |\sin\beta\pi/2| \int\limits_0^\infty \left|\int\limits_0^\infty \nu_{n,n}(x)\sin xt\,dx\right| dt\right\} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{2}{\pi}\big\{I_3|\cos\beta\pi/2| + I_4|\sin\beta\pi/2|\big\}. \tag{22}$$

Представим функцию $\nu_{n,n}(x)$ в виде суммы $\nu_{n,n}(x) = P_n(x) + Q_n(x)$, где

$$P_n(x) = \begin{cases} \psi'(n)nx + \psi(n) - \psi'(n)n, & 0 \le x \le 1; \\ \psi(nx), & 1 \le x. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$I_3 \le \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty (-P_n'(x))\frac{\sin xt}{t}\,dx\,dt + \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty (-Q_n'(x))\frac{\sin xt}{t}\,dx\,dt.$$

Так как интегралы, стоящие в правой части этого неравенства, равномерно сходятся, то, изменив порядок интегрирования, получаем

$$I_3 \le \pi\big(\psi(n) + |\psi'(n)|n\big) \le K\psi(n). \tag{23}$$

Для величины I_4 имеем

$$I_4 \le \psi(n)\int\limits_0^1 \left|\int\limits_0^1 x\sin xt\,dx\right| dt + \int\limits_0^1 \left|\int\limits_1^\infty \psi(nx)\sin xt\,dx\right| dt + \int\limits_1^\infty \left|\int\limits_0^\infty \nu_{n,n}(x)\sin xt\,dx\right| dt \overset{\mathrm{df}}{=} I_5 + I_6 + I_7. \tag{24}$$

Используя рассуждения работы [2, с. 60], получаем

$$I_5 + I_6 \le K\left(\psi(n) + \int_n^\infty \frac{\psi(t)}{t}dt\right). \tag{25}$$

Для величины I_7 после повторного интегрирования по частям находим

$$I_7 \le \int_1^\infty \left|\psi(n)\frac{\sin t}{t^2} + \int_1^\infty \psi''(nx)n^2 \frac{\sin xt}{t^2}dx\right|dt \le K\psi(n). \tag{26}$$

Объединяя соотношения (22) – (26), при $\psi \in \mathfrak{M}_0 \cap F$ получаем

$$A(\nu_{n,n}) \le K\left(\psi(n) + |\sin\beta\pi/2|\int_n^\infty \frac{\psi(t)}{t}dt\right). \tag{27}$$

Повторяя рассуждения, с помощью которых получена оценка (20), имеем

$$a(\tau_n) = \frac{1}{\pi}\int_{\pi n/2 \le |t| \le \mu(n)} \left|\int_0^\infty \nu_{n,n}(x)\cos(xt + \beta\pi/2)dx\right|dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{|t| \le \mu(n)} \left|\int_0^\infty \nu_{n,n}(x)\cos(xt + \beta\pi/2)dx\right|dt \le$$

$$\le K\int_{\pi n/2 \le |t| \le \mu(n)} \left|\frac{\sin(t + \beta\pi/2)}{t}\right|dt + I_1 \le K\psi(n)\ln^+\frac{\mu(n)}{n}. \tag{28}$$

После повторного интегрирования по частям видим, что при $\psi \in \mathfrak{M}_0 \cap F$

$$a(\nu_{n,n}) \le K|\psi'(n)| \le K\frac{\psi(n)}{n}. \tag{29}$$

Повторяя рассуждения работы [10, с. 60], для $\psi \in F$ при $n \to \infty$ получаем

$$A(\delta_{n,n}) + a(\delta_{n,n}) = \frac{2|\sin\beta\pi/2|}{\pi}I_2^* + \frac{4}{\pi^2}\int_D \frac{|\tau_n(x) - \psi(n)x|}{1-x}dx +$$

$$+ O\left(\psi(n) + I_3^* + |\sin\beta\pi/2|\int_{D\cup[0,2/(n\pi)]}\left|\frac{\tau_n(x)}{x}\right|dx + \int_0^{2/(n\pi)} \frac{|\tau_n(1-x) - \psi(n)(1-x)|}{x}dx\right) \tag{30}$$

и для $\psi \in \mathfrak{M}_{C,\infty}$ при всех $n \in N$

$$A(\delta_{n,p}) \le K\left(|\sin\beta\pi/2|I_2^* + I_1^*(p) + I_3^* + \psi(n)\right). \tag{31}$$

Объединяя соотношения (14), (20) и (28) – (30), (31) получаем равенство (8).

Из соотношений (13), (20) и (28) – (30) вытекает равенство (9).

При $\psi \in \mathfrak{M}_{C,\infty}$ в случае выполнения условия (11) из соотношений (13), (21), (31) вытекает оценка (12).

Лемма доказана.

2. Приближение классов $C^\psi_{\beta,\infty}$ обобщенными суммами Валле Пуссена. Для исследования величин $\varepsilon\left(C^\psi_{\beta,\infty}, V^{\varphi,h}_{n,p}\right)$ функцию $\tau_n(x)$ возьмем в виде

$$\tau_n(x) =$$

$$= \begin{cases} 0, & 0 \le x \le \dfrac{n-p}{n}; \\ \dfrac{\psi(n-p+1)\varphi_n(n-p+1)}{\varphi_n(n)} h_n\left(\dfrac{n-p+1}{n}\right)(nx-n+p), & \dfrac{n-p}{n} \le x \le \dfrac{n-p+1}{n}; \\ \dfrac{\psi(nx)\varphi_n(nx)}{\varphi_n(n)} h_n(x), & \dfrac{n-p}{n} \le x \le 1; \\ \psi(nx), & 1 \le x. \end{cases} \tag{32}$$

Докажем следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть* $\psi \in F$, $p \in [1, n-1]$, *функции* $\tau_n(x)$, *заданные соотношением* (32), *таковы, что при* $x \ge n-p+1$ *функции* $g_n(x) = \psi(x)\varphi_n(x)$ *не убывают, выпуклы вверх или вниз и выполняется соотношение*

$$g_n'(x)x \overset{\text{df}}{=} g_n'(x+0)x \le K g_n(x). \tag{33}$$

Тогда справедливы следующие соотношения:

$$I_2^* = \frac{|h_n((n-p+1)/n)|}{\varphi_n(n)} \int\limits_{n-p+1}^{n} \frac{g_n(x)}{x} dx + O(\psi(n)), \tag{34}$$

$$I_3^* \le K\psi(n). \tag{35}$$

Если $\theta \in]0, 1]$, *то при* $m \in [1, n]$

$$I_1^*(m) \le K\psi(n). \tag{36}$$

Если же $\theta = 0$, *то*

$$I_1^*(p) \le K\psi(n), \tag{37}$$

$$I_1^*(n) = \psi(n) \ln\frac{n}{p} + O(\psi(n)), \quad n \to \infty. \tag{38}$$

Доказательство. Докажем сначала равенства (34). Учитывая, что функции $h_n(x)$ дважды дифференцируемы, представим их в виде суммы $h_n(x) = h_n((n-p+1)/n) + h_n^*(x)$, где $h_n^*(x) \le K(x-(n-p+1)/n)$. Тогда, выполняя элементарные преобразования, находим

$$I_2^* = \int\limits_0^1 \frac{|\tau_n(x)|}{x} dx = \int\limits_{(n-p+1)/n}^{1} \frac{g_n(nx)h_n((n-p+1)/n)}{\varphi_n(n)x} dx +$$

$$+ O\left(\int\limits_{(n-p+1)/n}^{1} \frac{g_n(nx)h_n^*(x)}{\varphi_n(n)x} dx + \int\limits_{(n-p)/n}^{(n-p+1)/n} \frac{|\tau_n(x)|}{x} dx \right). \tag{39}$$

Учитывая, что

$$\int\limits_{(n-p)/n}^{(n-p+1)/n} \frac{\psi(n-p+1)\varphi_n(n-p+1)}{\varphi_n(n)} h_n\left(\frac{n-p+1}{n}\right)\left(\frac{nx-n+p}{x}\right) dx \le$$

$$\le K\psi(n)\left(n \int\limits_{(n-p)/n}^{(n-p+1)/n} dx + (n-p) \int\limits_{(n-p)/n}^{(n-p+1)/n} \frac{dx}{x} \right) \le$$

$$\le K\psi(n)\left(1 + (n-p)\ln\left(1 + \frac{1}{n-p}\right)\right) \le K\psi(n),$$

из соотношения (39) получаем равенство (34).

Используя условие (33), после преобразований убеждаемся в справедливости оценки (35):

$$I_3^* = \int\limits_{(n-p+1)/n}^{1} (x-x^2)\left|d\big(g_n'(nx)nh_n(x)\big)+d\big(g_n(nx)h_n'(x)\big)\right| \le$$

$$\le K\left(\psi(n)+\frac{g_n'(n-p+1)(n-p+1)}{\varphi_n(n)}\right) \le K\psi(n).$$

Теперь изучим величину $I_1^*(m)$ при $m\in[1,n]$. Пусть сначала $\theta\in\,]0,1]$. Имеем

$$I_1^*(m) = \int\limits_{(n-m)/n}^{1} \frac{|\tau_n(x)-(n(x-1)/m+1)\psi(n)|}{1-x}dx \le$$

$$\le K\psi(n) + \int\limits_{(n-m)/n}^{1}\frac{g_n(n)-g_n(nx)}{\varphi_n(n)(1-x)}dx. \tag{40}$$

Понятно, что если функции $g_n(x)$ выпуклы вверх, то

$$g_n(n) - g_n(nx) \le (g_n(n)-g_n(n-p+1))\,\frac{n}{p-1}(1-x),$$

а если функции $g_n(x)$ выпуклы вниз, то

$$g_n(n) - g_n(nx) \le g_n'(n)n(1-x).$$

Поэтому, учитывая соотношение (33) и (40), видим, что справедлива оценка (36).

Пусть теперь $\theta=0$. Повторяя рассуждения, с помощью которых получена оценка (36), получаем оценку (37). Кроме того, имеем

$$I_1^*(n) = \int\limits_0^1 \frac{|\tau_n(x)-\psi(n)x|}{1-x}dx =$$

$$= \int\limits_0^{(n-p)/n}\frac{\psi(n)x}{1-x}dx + O\left(\int\limits_{(n-p)/n}^{1}\frac{|\tau_n(x)-\psi(n)x|}{1-x}dx\right). \tag{41}$$

Используя рассуждения, с помощью которых получена оценка (36), легко показать, что

$$\int\limits_{(n-p)/n}^{1}\frac{|\tau_n(x)-\psi(n)x|}{1-x}dx \le K\psi(n).$$

Благодаря этому из соотношения (41) получаем равенство (38).

Лемма доказана.

Теперь сформулируем основные утверждения, доказательство которых основано на результатах лемм 1 и 2.

Теорема 1. *Пусть* $\theta\in\,]0,1]$, *функции* $g_n(x)$ *удовлетворяют условиям леммы* 2.

Тогда если $\psi\in F$, *то при* $n\to\infty$ *справедливо равенство*

$$\varepsilon\big(C^{\varphi}_{\beta,\infty},V^{\varphi,h}_{n,p}\big) = \frac{2|h_n((n-p+1)/n)\sin\beta\pi/2|}{\pi\varphi_n(n)}\int\limits_{n-p+1}^{n}\frac{g_n(x)}{x}dx +$$

$$+ \ O\left(\psi(n)\ln^+\mu(n) + |\sin\beta\pi/2|\int\limits_n^\infty \frac{\psi(t)}{t}dt\right). \qquad (42)$$

Если же $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, *то*

$$\varepsilon\left(C^\psi_{\beta,\infty}, V^{\varphi,h}_{n,p}\right) = \frac{\psi(n)}{\pi}\int\limits_{1\le|t|\le\mu(n)}\left|\frac{\sin(t+\beta\pi/2)}{t}\right|dt + O\left(\psi(n)\ln^+\frac{\mu(n)}{n}\right). \qquad (43)$$

Доказательство. Равенство (42) получается в результате объединения соотношений (8), (34) – (36). При объединении соотношений (9), (34) – (36) при $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$ получаем равенство (43).

Теорема 2. *Пусть* $\psi \in F$, $\theta = 0$, *функции* $g_n(x)$ *удовлетворяют условиям леммы* 2.

Тогда при $n \to \infty$ *справедливо соотношение*

$$\varepsilon\left(C^\psi_{\beta,\infty}, V^{\varphi,h}_{n,p}\right) = \frac{4}{\pi^2}\psi(n)\ln\frac{n}{p} + O\left(\psi(n)\ln^+\mu(n) + |\sin\beta\pi/2|\int\limits_n^\infty \frac{\psi(t)}{t}dt\right). \qquad (44)$$

Доказательство. Соотношение (44) непосредственно вытекает из соотношений (8), (34), (35), (37) и оценки

$$\int\limits_0^{2/(n\pi)} \frac{|\tau_n(1-x) - \psi(n)(1-x)|}{x}dx \le I_1^*\left(\frac{2}{\pi}\right) + \int\limits_{1-2/(n\pi)}^1 (\pi n/2 - 1)\,dx\,\psi(n) \le K\psi(n).$$

Теорема 3. *Пусть* $\psi \in \mathfrak{M}_{C,\infty}$, *функции* $g_n(x)$ *удовлетворяют условиям леммы* 2 *и выполнено условие* (11).

Тогда при $n \to \infty$ *справедливо равенство*

$$\varepsilon\left(C^\psi_{\beta,\infty}, V^{\varphi,h}_{n,p}\right) = A(\tau_n) + O(\alpha_n), \qquad (45)$$

где

$$A(\tau_n) \le K\psi(n), \qquad (46)$$

$$\alpha_n = \begin{cases} |\psi'(n)| + \dfrac{1}{\varphi_n(n)}, & \psi \in \mathfrak{M}_C \cup \mathfrak{M}'_\infty; \\ \psi(n), & \psi \in \mathfrak{M}_\infty \setminus \mathfrak{M}'_\infty. \end{cases} \qquad (47)$$

Доказательство. Оценка (46) непосредственно вытекает из соотношений (12), (34), (35), (37).

Так как интегралы $A(\tau_n)$ сходятся, то справедливо равенство (6).

Понятно, что $a(\tau_n) \le A(\tau_n) \le K\psi(n)$.

При $\psi \in \mathfrak{M}_C \cup \mathfrak{M}'_\infty$ после повторного интегрирования по частям для величины $a(\tau_n)$ можно получить более точную оценку

$$a(\tau_n) \le K\left(\frac{n}{\varphi_n(n)} + \frac{g'_n(n-p+1)n}{\varphi_n(n)} + |\psi'(n)|n\right)\int\limits_{|t|\ge\pi n/2}\frac{dt}{t^2} \le$$

$$\le K\left(\frac{1}{\varphi_n(n)} + |\psi'(n)|\right).$$

Следовательно, справедливы равенство (45) и оценки (46), (47).

Отметим, что если $\varphi_n(x) = (x-n+p)/p$ и $h_n(x) \equiv 1$, то соотношения (42), (44), (45) при $\psi_k(k) = k^{-r}$, $r > 0$, представляют собой известные равенства для сумм $V_{n,p}(f, x)$ (см. [12, 14 – 17]); а соотношения (44), (45) при $\psi \in \mathfrak{M}_C$ — равенства для сумм $V_{n,p}(f, x)$, полученные в работах [1 – 4].

Из соотношений (45) – (47) вытекает, что при $\psi \in \mathfrak{M}_{C,\infty}$ и выполнении условия (11) суммы $V_{n,p}^{\varphi,h}(f, x)$ обеспечивают порядок наилучшего приближения на классах $C_{\beta,\infty}^{\psi}$.

В качестве примера рассмотрим класс $C_{\beta,\infty}^{\psi}$, определяемый с помощью функции $\psi(x) = e^{-\sqrt{x}} \in \mathfrak{M}'_{\infty}$. Легко показать, что $\mu(\psi, x) = x((\ln 2)^2 + \sqrt{x}\ln 4)^{-1}$. В качестве приближающего агрегата возьмем $V_{n,p}^{\varphi,h}$ — метод, задаваемый при $p \sim \sqrt{n}$ функциональными последовательностями $h_n(x) \equiv 1$, $\varphi_n(x) = e^{\sqrt{x}}(x - n + \sqrt{n})$. При этом $g_n(n) = \sqrt{n}$. Следовательно, $\alpha_n = o(\psi(n))$, $n \to \infty$, и равенство (44) доставляет решение задачи Колмогорова – Никольского.

Приближенные вычисления для величины $\varepsilon(C_{\beta,\infty}^{\psi}, V_{n,p}^{\varphi,h})$ в указанном примере при $n = 10,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50,\ 100,\ 500$ дают оценки $\varepsilon(C_{\beta,\infty}^{\psi}; V_{n,p}^{\varphi,h}) \leq (1{,}7 \pm 0{,}3)\psi(n)$.

1. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье. – Киев, 1983. – 57 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.10).
2. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 286 с.
3. *Рукасов В. И.* Приближение периодических функций линейными средними их рядов Фурье. – Киев, 1983. – 55 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.62).
4. *Рукасов В. И.* Приближение функций класса $C_{\beta,\infty}^{\psi}$ линейными средними их рядов Фурье // Укр. мат. журн. – 1987. – **39,** № 4. – С. 478–483.
5. *Гаврилюк В. Т.* О характеристике класса насыщения L_{∞} // Там же. – 1986. – **38,** № 4. – С. 421 – 427.
6. *Бушев Д. Н.* Приближение классов непрерывных периодических функций суммами Зигмунда. – Киев, 1984. – 64 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.56).
7. *Ковальчук И. Р.* Приближение классов (ψ, β)-дифференцируемых функций полиномами Рогозинского. – Киев, 1988. – 58 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.4).
8. *Островская О. В.* Приближение классов непрерывных периодических функций обобщенными суммами Зигмунда // Исследование по теории приближения функций. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991. – С. 57–71.
9. *Новиков О. А.* Приближение классов непрерывных периодических функций линейными методами. – Киев, 1991. – 38 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 91.21).
10. *Новиков О. А., Рукасов В. И.* Приближение классов непрерывных периодических функций аналогами сумм Валле Пуссена // Ряды Фурье: теория и приложения. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992. – С. 57–63.
11. *Nady B.* Sur une classe generale de procedes de sommations pour les Series de Fourier // Hung. Acta Math. – 1948. – **1**, №3. – P. 14–62.
12. *Теляковский С. А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций средними их рядов Фурье. I // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1961. – **62**. – С. 61–97.
13. *Степанец А. И.* Приближения в пространствах локально интегрируемых функций. – Киев, 1993. – 47 с. – (Препринт / АН Украины. Ин-т математики; 93.18).
14. *Kolmogoroff A.* Zur Grossenordnung des Restgludes Fourierchen differenzier barer Funktionen // Ann. Math. – 1935. – **36.** – P. 521–526.
15. *Пинкевич В. Т.* О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Вейля // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1940. – **4,** № 5. – С. 521–528.
16. *Никольский С. М.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1945. – **15**. – С. 3–73.
17. *Тиман А. Ф.* Аппроксимативные свойства линейных методов суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1953. – **17.** – С. 99–134.

Получено 02.02.94