УДК 519.21

**М. В. Працьовитий**, канд. фіз.-мат. наук (Ін-т математики НАН України, Київ),
**Г. М. Торбін**, асп. (Укр. пед. ун-т, Київ)

# СУПЕРФРАКТАЛЬНІСТЬ МНОЖИНИ ЧИСЕЛ, ЯКІ НЕ МАЮТЬ ЧАСТОТИ $n$-АДИЧНИХ ЗНАКІВ, ТА ФРАКТАЛЬНІ РОЗПОДІЛИ ЙМОВІРНОСТЕЙ

We study the fractal properties (we find the Hausdorff – Besicovich dimension and Hausdorff measure) of the spectrum of a random variable with independent $n$-adic digits, the infinite set of which is fixed ($n \geq 2$, $n \in N$). We prove that the subset of $[0; 1]$ of numbers, which do not have at least one $n$-adic digit, is superfractal.

Вивчено фрактальні властивості (знайдено розмірність Хаусдорфа – Безиковича і міру Хаусдорфа) спектра випадкової величини з незалежними $n$-адичними ($n \geq 2$, $n \in N$) знаками (цифрами), нескінченна множина яких фіксована. Доведено, що множина чисел відрізка $[0; 1]$, які не мають частоти хоча б одного $n$-адичного знаку, є суперфракталом.

Нехай $n$ — фіксоване натуральне число більше одиниці. Розглянемо випадкову величину (в. в.) $\xi$, зображену у вигляді $n$-адичного дробу

$$\xi = \sum_{i=1}^{\infty} n^{-i}\eta_i = 0.\eta_1\eta_2\ldots\eta_i\ldots,$$

де $\eta_i$ — незалежні в. в., що набувають значень $0, 1, \ldots, n-1$ з імовірностями $P_{0i}, P_{1i}, \ldots, P_{(n-1)i}$ відповідно, $P_{ki} \geq 0$.

Функція розподілу (ф. р.) в. в. $\xi$ записується у вигляді

$$F_\xi(x) = \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} \beta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} P_{\alpha_j(x)j}, \tag{1}$$

де $\alpha_k(x)$ — $k$-адичний знак числа $x$,

$$\beta_{\alpha_k(x)} = \prod_{j=0}^{\alpha_k(x)-1} P_{jk}, \quad k \in N.$$

В. в. $\xi$, що є сумою незалежних дискретних в. в., згідно з теоремою Джессена – Вінтнера має чистий розподіл (дискретний, абсолютно неперервний, сингулярний). Необхідні і достатні умови належності розподілу тому чи іншому типу знайдено в [1], для більш загальної моделі — в [2]. У разі сингулярності лише у випадку однакової розподіленості $\eta_i$ та у випадку, коли існує лише скінченна множина значень $i$ таких, що $0 < P_{ki} < 1$, $k = \overline{0, n-1}$, задача про розмірність Хаусдорфа – Безиковича спектра розподілу в. в. розв'язана до кінця [3]. Розв'яжемо цю задачу для випадку, коли $\eta_i$, будучи незалежними, мають такі розподіли: $P\{\eta_i = k\} = P_{ki} > 0$, $\forall k \in N_{n-1}^0 = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ при $i \in \{r_m - 2^m - \tau\}$, $\tau = \overline{0, 2^m s - 1}$, $s$ — довільне фіксоване натуральне число, $r_m = 2(s+1)(2^m - 1)$, $m \in N$; $P\{\eta_i = 0\} = 1$ при $i \in \{r_m - 2^{m-1} - \theta\}$; $P\{\eta_i = 1\} = 1$ при $i \in \{r_m - \theta\}$, $\theta = \overline{0, 2^{m-1} - 1}$, $m \in N$, тобто $\xi$ має вигляд

$$\xi = 0.(\eta_1 \ldots \eta_{2^1 s} 01)(\eta_{r_1+1} \ldots \eta_{r_1+2^2 s} \underbrace{0011}_{2^2}) \ldots (\eta_{r_{m-1}+1} \ldots \eta_{r_{m-1}+2^m s} \underbrace{0 \ldots 0}_{2^{m-1}} \underbrace{1 \ldots 1}_{2^{m-1}}) \ldots.$$

**Лема 1.** *Спектром $S_\xi$ розподілу в. в. $\xi$ є множина*

$$A_s = \left\{ x : x = \sum_{i=1}^{\infty} n^{-i}\alpha_i(x) = 0.(\alpha_1 \ldots \alpha_{2s} 01)(\alpha_{r_1+1} \ldots \alpha_{r_1+2^2 s} 0011) \ldots \right.$$

$$\ldots\left(\alpha_{i_{m-1}+1}\ldots\alpha_{i_{m-1}+2^m}\underbrace{0\ldots0}_{2^{m-1}}\underbrace{1\ldots1}_{2^{m-1}}\right)\ldots\Bigg\},$$

де $\alpha_{i_m+j}\in N_{n-1}^0$, $j=\overline{1,2^{m+1}s}$, $m\in N$.

***Доведення.*** Нехай $x_0\in A_s$. Зафіксуємо $\varepsilon>0$. Виберемо $k$ таким великим, щоб виконувалися умови $x_0-\varepsilon<x'<x_0<x''<x_0+\varepsilon$, де

$$\alpha_j(x_0')=\alpha_j(x_0)=\alpha_j(x_0''),\quad \forall j=\overline{1,r_k-2^k};$$

$$\alpha_j(x_0')=\alpha_j(x_0'')=\alpha_{r_k-2^k+1}(x_0')=0,\quad \forall j>r_k-2^k+2;\quad \alpha_{r_k-2^k+1}(x_0'')=1.$$

Тоді

$$F_\xi(x_0+\varepsilon)-F_\xi(x_0-\varepsilon)>F(x_0'')-F(x_0')=\prod_{j=1}^{r_k-2^k+1}p_{\alpha_j(x_0)j}>0,$$

тобто $x_0\in S_\xi$.

Нехай тепер $\bar{x}\in A_s$, тобто $\bar{x}$ належить одному з суміжних інтервалів множини $A_s$. Тоді існує такий номер $k$, що $n$-адичні знаки $\bar{x}$ до $k$-го місця включно задовольняють такі ж умови, як і числа з множини $A_s$, а на $(k+1)$-му місці — ні. Розглянемо числа $\bar{x}'$ і $\bar{x}''$, які задовольняють умови $\alpha_j(\bar{x}')=$ $=\alpha_j(\bar{x})=\alpha_j(\bar{x}'')$ для $j\le k+1$,

$$\alpha_{k+2}(\bar{x}')=\alpha_{k+2+i}(\bar{x}')=\alpha_{k+2+i}(\bar{x}')=0,\quad i\in N,\quad \alpha_{k+2}(\bar{x}'')=n-1.$$

Враховуючи (1), легко бачити, що, покладаючи $\varepsilon>0$ таким, що $\bar{x}'<\bar{x}-\varepsilon<$ $<\bar{x}<\bar{x}+\varepsilon<\bar{x}''$, маємо $F(\bar{x}+\varepsilon)-F(\bar{x}-\varepsilon)=0$. Отже, $\bar{x}$ не є точкою зростання $F_\xi(x)$, тобто $\bar{x}\notin S_\xi$. Таким чином, $S_\xi=A$ і лема 1 доведена.

Отже, спектром розподілу в. в. $\xi$ є множина точок з $[0;1]$, в $n$-адичному розкладі яких на одних фіксованих місцях стоїть цифра 0, на інших — цифра 1, а решта $n$-адичних знаків довільні. Числа з множини $S_\xi$ є $n$-адично-ірраціональними, оскільки $n$-адичні дроби, якими вони задаються, є нескінченними неперіодичними. Множина $S_\xi$ ніде не щільна, досконала, а, будучи обмеженою, і компактна.

**Теорема 1.** *В. в. $\xi$ має фрактальний сингулярний розподіл канторівського типу з розмірністю Хаусдорфа – Безиковича спектра $S_\xi$, рівною $s/(s+1)$ і $s/(s+1)$-мірною мірою Хаусдорфа, рівною 1.*

Означення і термінологію див. в [3, 4].

***Доведення.*** Розглянемо послідовність $\{B_i^{(k)}(r_k)\}$, $k\in N$, спеціальних покриттів множини $A_s$ відрізками $r_k$-рангу, які будемо називати ранговими покриттями (нагадаємо, що $r_k=2(s+1)(2^k-1)$).

Очевидно, множина $A_s$ повністю міститься в $n^{2s}$ відрізках $(2^1s+2)$-го рангу, тобто останні утворюють її $\{B_i^1(r_1)\}$ покриття, $\alpha$-об'єм якого рівний $l_1^{(\alpha)}[A_s]=n^{2s}n^{-\alpha r_1}$. Аналогічно $A_s$ міститься в $n^{2s(2^k-1)}$ відрізках рангу $2(s+1)(2^k-1)$. Вони утворюють покриття $\{B_i^{(k)}(r_k)\}$ з $\alpha$-об'ємом

$$l_k^{(\alpha)}[A_s]=n^{2s(2^k-1)}n^{-\alpha 2(s+1)(2^k-1)}=\left[n^{s-(s+1)\alpha}\right]^{2(2^k-1)}.$$

Звідси $0<l_k^{(\alpha)}[A_s]<\infty$ тоді і лише тоді, коли $s-(s+1)\alpha=0$, тобто коли $\alpha=$

$= s/(s+1)$. Більш того, $l_k^{(s/(s+1))}[A_s] = 1$ незалежно від $k$. Далі $\alpha$ зафіксуємо саме таким.

Як відомо [3], при визначенні розмірності Хаусдорфа – Безиковича можна обмежитися покриттями $n$-адичними інтервалами (відрізками), не обов'язково одного рангу. Покажемо, що розглянуті вище покриття є „найекономнішими", а отже, міра Хаусдорфа $H_\alpha(A_s) = \lim\limits_{k\to\infty} l_k^{(\alpha)}[A_s] = 1$ при $\alpha = s/(s+1)$. З цією метою розглянемо довільне покриття множини $A_s$ $n$-адичними інтервалами, взагалі кажучи, різних рангів. Оскільки $A_s$ — компакт, то з нього можна виділити скінченне підпокриття, після чого інтервали замінити відрізками, що не вплине на його $\alpha$-об'єм. Нехай тепер $u$ — один з відрізків останнього покриття. Тоді існує таке $r$, що $|u| = n^{-r}$. Покажемо, що знайдеться $m$ таке, що

$$|u|^\alpha \geq l_m^{(\alpha)}[A_s \cap u]. \tag{2}$$

Очевидно, існує таке $m$, що має місце один з двох взаємно доповнюючих випадків: 1) $r_m - 2^m < r \leq r_m$; 2) $r_{m-1} < r \leq r_m - 2^m$.

Розглянемо випадок 1. Нехай $r = r_m - \nu$, $\nu \in \{1, 2, \ldots, 2^m\}$. Тоді

$$|u|^\alpha = n^{-r\alpha} = n^{-2s(2^m-1)+\nu s/(s+1)},$$

$$l_m^{(\alpha)}[A_s \cap u] = 1 \cdot n^{-\alpha \cdot 2(s+1)(2^m-1)} = n^{-2s(2^m-1)}.$$

Звідси випливає, що для випадку 1 нерівність (2) виконується.

Тепер розглянемо випадок 2. Нехай $r = r_m - 2^m - \tau$, $\tau \in \{0, 1, \ldots, 2^m - 1\}$. Тоді

$$|u|^\alpha = n^{-[2(s+1)(2^m-1)-2^m-\tau]\alpha} = n^{-2s(2^m-1)+(2^m+\tau)s/(s+1)},$$

$$l_m^{(\alpha)}[A_s \cap u] = n^\tau n^{-2ms} = n^{-2s(2^m-1)+\tau}.$$

Оскільки функція $f(x) = x - (2^m + x)s/(s+1)$, $x \in \{0, 2^m - 1\}$, для фіксованих натуральних $m$ і $s$ є зростаючою ($f'(x) = 1 - s/(s+1) > 0$), то її найбільше значення досягається при найбільшому $x = \tau = 2^m - 1$ і рівне $f(2^m - 1) = 2^m(1 - 2s/(s+1)) - (1 - s/(s+1)) < 0$, тобто і в цьому випадку виконується нерівність (2). Легко довести, що $l_k^{(\alpha)}[A_s \cap u] = l_m^{(\alpha)}[A_s \cap u]$ для $k > m$.

Отже, для кожного відрізка $u_i$ знайдеться число $m_i$ таке, що виконується нерівність (2). Оскільки ж таких відрізків скінченне число, то, вибравши $m$ найбільшим серед $\{m_i\}$, одержимо

$$\sum_i |u_i|^\alpha \geq l_m^{(\alpha)}[A_s], \quad \alpha = \frac{s}{s+1}.$$

Звідси випливає

$$H_{s/(s+1)}(A_s) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\inf_{|u_i|<\varepsilon} \sum |u_i|^{s/(s+1)}\right] = \lim_{m\to\infty} l_m^{(s/(s+1))}[A_s] = 1.$$

Оскільки розмірність Хаусдорфа – Безиковича спектра розподілу в. в. $\xi$ задовольняє нерівність $0 < \alpha_0(S_\xi) < 1$, то її розподіл є фрактальним сингулярним і канторівського типу. Теорема 1 доведена.

**Лема 2** [1, 8]. *Якщо в точці існує похідна (скінченна чи нескінченна) ф. р. $F_\xi(x)$, то вона зображається у вигляді*

$$F'_\xi(x') = \prod_{j=1}^{\infty} [nP_{\alpha_j(x')j}]. \tag{3}$$

**Теорема 2.** *Для того щоб носій розподілу в. в.* $\xi$, *тобто множина* $N_\xi = \{x : F'(x) \neq 0\}$, *співпадав зі спектром, достатньо, щоб виконувалася нерівність*

$$B = \prod_{\substack{\tau=\overline{0,\,2^m s-1}\\ m\in N}} \min_{0\le k<n} \{nP_{k(r_m-2^m-\tau)}\} > 0. \tag{4}$$

*Умова* (4) *є необхідною для* $N_\xi = S_\xi$ *у випадку, коли в точці* $x_0$ *такій, що*

$$P_{\alpha_j(x_0)i} = \min_{0\le k<n} \{P_{ki},\ i\in\{r_m-2^m-\tau\},\ \tau = \overline{0,\,2^m s-1},\ m\in N\}, \tag{5}$$

*існує похідна* $F'(x_0)$.

***Доведення.*** *Достатність.* Розглянемо довільне $x'\in S_\xi$. Якщо $F'_\xi(x')$ не існує, то $x'\in N_\xi$.

Якщо $F'_\xi(x')$ існує, то вона набуває вигляду (3) і, очевидно, $F'_\xi(x') \ge B > 0$. Звідси $x'\in N_\xi$. Враховуючи те, що $N_\xi \subset S_\xi$, маємо $N_\xi = S_\xi$.

*Необхідність.* Припустимо супротивне, тобто нехай $N_\xi = S_\xi$, а (4) не виконується, тобто $B=0$. Розглянемо $x_0$, яке задовольняє (5). Оскільки $x_0\in N_\xi$, то $F'_\xi(x_0) > 0$ і згідно з лемою 1 $F'_\xi(x_0) = B$. А це суперечить тому, що $x_0 \in N_\xi$. Це протиріччя доводить необхідність і теорему 2 в цілому.

**Лема 3.** *Кожне число* $x$ *множини* $A_s$ *не має частоти цифр* 0 *і* 1, *тобто не існує границь* $\lim\limits_{k\to\infty} [k^{-1}N_i(x,k)]$, *де* $N_i(x,k)$ — *кількість цифр* $i$ *в* $n$-*адичному розкладі* $x$ *до* $k$-*го місця включно*, $i = 0, 1$.

***Доведення*** досить провести для цифри 0, оскільки з цифрою 1 вони в рівнозначному положенні. Розглянемо послідовність $k_m = r_m$. Маємо

$$N_0(x, r_m) = g_0(m) + (2^m - 1), \tag{6}$$

де через $g_0(m)$ позначено кількість нулів серед $\alpha_{r_i+j}(x)$, $r_0 = 0$, $j = \overline{1,\,2^{i+1}s}$, $i = \overline{1,\,m-1}$, тобто серед усіх членів перших $m$ груп $n$-адичних знаків числа $x$, де може стояти будь-яка з цифр $0, 1, \ldots, n-1$, до $r_m$-го місця включно. Очевидно, $0 < g_0(m) < 2s(2^m-1)$. Враховуючи (6), маємо

$$\nu_0(r_m) = \frac{N_0(x, r_m)}{r_m} = \frac{g_0(m) + (2^m-1)}{2(s+1)(2^m-1)} = \frac{g_0(m)/2^m + 1 - 1/2^m}{2(s+1)(1-1/2^m)}. \tag{7}$$

Розглянемо послідовність $k'_m = r_m - 2^{m-1}$. Для неї $N_0(x, k'_m) = N_0(x, r_m)$ і

$$\nu'_0(k'_m) = \frac{N_0(x_0, k'_m)}{r_m - 2^{m-1}} = \frac{g_0(m)/2^m + 1 - 1/2^m}{2(s+1)(1-1/2^m) - 1/2}. \tag{8}$$

З (7) і (8) випливає

$$\nu'_0(k'_m) > \nu_0(r_m) \quad \text{і} \quad \lim_{m\to\infty} \nu'_0(k'_m) \neq \lim_{m\to\infty} \nu_0(r_m).$$

А це означає, що число $x$ не має частоти цифри 0. Лема 3 доведена.

**Лема 4.** *Множина* $M$ *чисел відрізка* $[0;1]$, *які не мають частоти хоча б однієї з* $n$-*адичних цифр, є:* 1) *всюди щільною;* 2) *всюди розривною;* 3) *континуальною множиною.*

***Доведення.*** Твердження 1 і 2 випливають безпосередньо з того факту, що належність числа $x$ множині $M$ не залежить від будь-якої скінченної кількості $n$-адичних знаків.

З метою доведення твердження 3 розглянемо множину $M_1$:

$$M_1 = \left\{ x : x = 0,(01x_1)(0011x_2)(00001111x_3)\ldots \right.$$

$$\left. \ldots \big(\underbrace{0\ldots0}_{2^{m-1}}\underbrace{1\ldots1}_{2^{m-1}}x_{m+1}\big)\ldots,\ x_i \in N_{n-1}^0 \right\}.$$

Оскільки

$$N_0(x, k_m) = (2^m - 1) + \tau_m(x), \quad k_m = 2^{m+1} - 1 + m,$$

$$\frac{N_0(x, k_m)}{k_m} = \frac{2^m - 1 + \tau_m(x)}{2^{m+1} - 1 + m} = \frac{1 - 1/2^m + \tau_m(x)/2^m}{2 - 1/2^m + m/2^m} \to 2 \quad (m \to \infty),$$

$$N_0(x, k_m - 2^{m-1} - 1) = N_0(x, k_m),$$

$$\frac{N_0(x, k_m - 2^{m-1} - 1)}{k_m - 2^{m-1} - 1} = \frac{1 - 1/2^m + \tau_m(x)/2^m}{2 - 1/2 - 1/2^{m-1} + m/2^m} \to \frac{2}{3} \quad (m \to \infty),$$

то $x$ не має частоти цифри 0 і $M_1 \subset M$.

Точці $x \in M_1$ поставимо у відповідність число $z = 0, x_1 x_2 \ldots x_k \ldots$. Оскільки $x_k$ може набувати будь-якого значення з множини $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, то цим встановлена взаємноодпозначна відповідність між $M_1$ і $[0; 1]$. А це означає, що $M_1$, а отже, і $M$ є континуальними. Лема 4 доведена.

**Теорема 3.** *Множина $M$ чисел з $[0; 1]$, що не мають частоти хоча б однієї з $n$-адичних цифр, є суперфракталом, тобто має розмірність Хаусдорфа – Безиковича $\alpha_0(M) = 1$ і одновимірну міру Хаусдорфа $H_1(M) = 0$.*

***Доведення.*** Очевидно, $\bigcup_{s \in N} A_s \subset M$. За властивостями 7 і 8 розмірності Хаусдорфа – Безиковича [3, с. 47]

$$\alpha_0([0; 1]) \geq \alpha_0(M) \geq \alpha_0\Big(\bigcup_{s \in N} A_s\Big) = \sup_{s \in N} \alpha_0(A_s) = \sup_{s \in N} \frac{s}{s+1} = 1.$$

Отже, $\alpha_0(M) = 1$.

Оскільки кожне число $x \in M$ не є нормальним за основою $n$, а множина нормальних чисел з $[0; 1]$ має міру Лебега, рівну 1 [3, с. 94, 174], то множина $M$ має міру Лебега $\lambda(M) = 0$. І тому що одновимірна міра Хаусдорфа співпадає з зовнішньою лінійною мірою Лебега, то $H_1(M) = 0$. Отже, $M$ — суперфрактал. Теорема 3 доведена.

1. *Марсалья Дж.* Случайные величины с независимыми двоичными цифрами // Кибернет. сб. – 1983. – **20**. – С. 216 – 224.
2. *Працевитый Н. В.* Сингулярные распределения канторовского и салемовского типов. – Киев, 1988. – 60 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 88.6).
3. *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – Киев: Наук. думка, 1992. – 208 с.
4. *Працевитый Н. В.* Классификация сингулярных распределений в зависимости от свойств спектра // Случайные эволюции: теоретические и прикладные задачи: Сб. науч. тр. – Ин-т математики АН Украины. – Киев, 1992. – С. 77 – 83.

Одержано 10.10.94

УДК 519.21

**A. V. Swishchuk,** doct. phys.-math. sci. (Inst. Math. National Acad. Sci. Ukraine, Kiev)

# HEDGING OF OPTIONS UNDER MEAN-SQUARE CRITERION AND SEMI-MARKOV VOLATILITY

# ХЕДЖУВАННЯ ОПЦІОНУ ЗА УМОВ СЕРЕДНЬОКВАДРАТИЧНОГО КРИТЕРІЮ ТА ПІВМАРКОВСЬКИХ МІНЛИВОСТЕЙ

We consider a problem of hedging of the European call option for a model such that appreciation rate and volatility are functions of a semi-Markov process. In such a model, the market is incomplete.

Розглядається задача хеджування Європейського опціону купівлі для моделі з нормою повернення та коефіцієнтом мінливості, що залежать від півмарковського процесу. В такій моделі ринок є неповним.

**1. Introduction.** In famous Black – Scholes model, which is used for evaluation of option prices, it is supposed that the dynamic of stocks prices is set by the linear stochastic differential equation

$$dS_t = aS_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

where $a$ and $\sigma$ are deterministic functions (in the simplest case – constants).

We suppose that, in our model, the coefficients $a$ and $\sigma$, appreciation rate and volatility respectively, are depended on a semi-Markov process $X_t$, which doesn't depend on standard Wiener process $W_t$. We consider the hedging problem of the European call option with terminal payment $H = f(S_T)$.

Since the additional source of randomness exists (the semi-Markov process $X_t$) in addition to the Wiener process $W_t$, the market is incomplete and perfect hedging is not possible. We find a strategy, which locally minimizes the risk.

**2. Description of the model and preliminary notions.** Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = (\mathcal{F}_t), \mathcal{P})$ be a probability space. We suppose that risk assets (stock) exist and their price evolution is given by the following stochastic differential equation [5]:

$$dS_t = a(X_t)S_t dt + \sigma(X_t)S_t dW_t, \tag{1}$$

where $W_t$ is a Wiener process, $X_t$ is some observed variable, which is described by a semi-Markov process [4, 5] with the phase space $(\mathbf{X}, \mathcal{X})$, $X_t := X_{\nu(t)}$, $\nu(t) := \max\{n : \tau_n \le t\}$, $\tau_n := \sum_{k=1}^{n} \theta_k$, $(X_n, \theta_n : n \ge 0)$ is a Markov renewal process, $\mathcal{P}\{\omega : X_{n+1} \in A,\ \theta_{n+1} \le t / X_n = x\} = P(x, A) \cdot G_x(t)$, $x \in \mathbf{X}$, $A \in \mathcal{X}$, $t \ge 0$. We suppose that $G_x(t)$ is a differentiable function of $t$ and $g_x(t) := dG_x(t)/dt$, $\forall x \in \mathbf{X}$. Coefficients $a$ and $\sigma$ are measurable functions on $\mathbf{X}$, $\sigma > 0$, processes $W_t$ and $X_t$ are independent, and filtration $\mathbf{F}$ is generated by $X_t$ and $W_t$.

We solve the problem of hedging of the European call option which is sold at the moment $t = 0$, with terminal payment $H = f(S_T)$ at a cancellation moment $T$. It's considered that $EH^{2+\varepsilon} < +\infty$, $\varepsilon > 0$.

Besides the risk assets, we have nonrisk assets (bond or bank account), and we suppose that its price is a constant and is equal to one (without of loss generality) at all moments (i.e., percentage rate is equal to zero).

* The work is supported in part by Grant No. K43100 from the Joint fund of the Government of Ukraine and International Science Foundation.

*Stock exchange strategy (SES)* $\pi$ is a pair $(\gamma, \beta)$, where $\gamma = (\gamma_t)$ is such a predictable process that

$$E \int_0^T \gamma_t^2 \sigma^2(X_t) S_t^2 dt + E\left( \int_0^T |\gamma_t| \, |a(X_t)| S_t dt \right)^2 < +\infty, \tag{2}$$

$\beta = (\beta_t)$ is a coordinated process, $E\beta_t^2 < +\infty$, $\forall t \le T$.

SES defines a portfolio with a number of units of risk assets $\gamma_t$ (which the holder has at the moment $t$) and with a number of means that were invested in bonds at the moment $t$.

*The value process* $V(\pi)$ of the portfolio with respect to the strategy $\pi$ is defined as

$$V_t(\pi) = \gamma_t \cdot S_t + \beta_t, \tag{3}$$

and the *cost process*

$$C_t(\pi) = V_t(\pi) - \int_0^t \gamma_t \, dS_t \tag{4}$$

SES $\pi$ is said to be *H-admissible* if $V_T(\pi) = H$; SES $\pi$ is said to be *self-financing* (or mean-value self-financing) if the cost process $C_t(\pi)$ is a constantine time (or martingale).

The *residual risk* is defined by the formula

$$\mathcal{R}_t(\pi) := E\{|C_T(\pi) - C_t(\pi)|^2 / \mathcal{F}_t\}. \tag{5}$$

The SES $H$-admissible strategy $\pi^*$ is called a *risk-minimizing* if, for any $H$-admissible SES $\pi$ and for any $t$,

$$\mathcal{R}_t(\pi^*) \le \mathcal{R}_t(\pi)$$

The purpose of this article is to find a risk-minimizing $H$-admissible SES.

It was stated in [2] that existence of a risk-minimizing $H$-admissible SES is equivalent to the existence of the expansion of the terminal payment $H$ in the form

$$H = H_0 + \int_0^T \gamma_r^H dS_r + L_T^H \quad (\mathcal{P}-\text{a.s.}), \tag{6}$$

where $H_0 \in L^2(\mathcal{F}_0, \mathcal{P})$, $\gamma_H$ satisfies (2), and $L_T^H$ is a square-integrable martingale, which is orthogonal to the martingale component $S$. Then the $\gamma$-component of a risk-minimizing strategy $\pi$ is $\gamma = \gamma^H$ and $C_\pi = H_0 + L^H$.

To obtain expansion (6), it is introduce a *minimal martingale measure* $\tilde{\mathcal{P}}$ [2].

For our model (1), the minimal martingale measure is $\tilde{\mathcal{P}} = \rho_T \mathcal{P}$, where the density $\rho_T$ is defined by the equality

$$\rho_T = \exp\left\{ -\int_0^T \frac{a(X_r)}{\sigma(X_r)} dW_r - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{a^2(X_r)}{\sigma^2(X_r)} dr \right\}. \tag{7}$$

In our situation, when the process $S_t$ has continuous paths, the process $a(X)/\sigma(X)$ is bounded and $H \in L^{2+\varepsilon}(\mathcal{P})$, $\varepsilon > 0$, and the desired expansion (6) can be obtained from Kunita – Watanabe's expansion (as $t = T$) with respect to the measure $\tilde{\mathcal{P}}$:

$$\tilde{E}(H/\mathcal{F}_t) = \tilde{E}H + \int_0^t \tilde{\gamma}_r^H dS_r + \tilde{L}_t^H. \tag{8}$$

In such a way, it is need to find the Kunita – Watanabe's expansion.

Let's introduce some notations.

A jump measure for $X_t$ has the following form:

$$\mu([0,t]\times A) = \sum_{n\ge 0} I(X_n \in A,\ \tau_n \le t),\quad A \in \mathcal{X},\quad t\ge 0. \tag{9}$$

It's known [4], that **F**-dual predictable projection for $\mu$ has the form:

$$\nu(dt, dy) = \sum_{n\ge 0} I(\tau_n < t \le \tau_{n+1}) \frac{P(X_n, dy) g_{X_n}(t)}{\overline{G}_{X_n}(t)} dt, \tag{10}$$

where $\overline{G}_x(t) := 1 - G_x(t)$, $g_x(t) := dG_x(t)/dt$, $\forall x \in \mathbf{X}$, $t \ge 0$.

For given $H \in L_2(\tilde{\mathcal{P}})$, we find the expansion

$$\tilde{E}(H/\mathcal{F}_t) = \tilde{E}H + \int_0^t \tilde{\gamma}_r^H dS_r + \int_0^t \int_{\mathbf{X}} \tilde{\psi}^H(r, y)(\mu - \nu)(ds, dy). \tag{11}$$

We note that the last integral in (11) is $\tilde{\mathcal{P}}$-orthogonal to $S$ (it's an $(\mathbf{F}, \tilde{\mathcal{P}})$-martingale), and the uniqueness of the Kunita – Watanabe's expansion is a guarantee that (11) is the desired expansion of (8) for our case.

Finally, a risk-minimizing $H$-admissible strategy $\pi^*$ is defined by $\pi^* = (\gamma^*, \beta^*)$, where $\gamma^* = \tilde{\gamma}^H$, and $\beta^*$ is such that $V_t(\pi^*) = \tilde{E}(H/\mathcal{F}_t)$, i.e.,

$$\beta_t^* = \tilde{E}(H/\mathcal{F}_t) - \tilde{\gamma}_t^H S_t. \tag{12}$$

In the next section we will obtain an exact representation for $\pi^* = (\gamma^*, \beta^*)$.

**3. The result.** Let $f(z)$ be a function such that $|f(z)| \le c\cdot(1+|z|)^m$ for some $m \ge 0$. Let's consider a function $u(t, z, x)$ on $[0, T]\times \mathbf{R}_+ \times \mathbf{X}$ such that it is a solution of the Cauchy problem:

$$\begin{cases} u_t(t,z,x) + \dfrac{1}{2}\sigma^2(x)\cdot z^2\cdot u_{zz}(t,z,x) + Au(t,z,x) = 0, \\ u(T,z,x) = f(z), \end{cases} \tag{13}$$

where

$$Au(t,z,x) := \frac{g_x(t)}{\overline{G}_x(t)} \int_{\mathbf{X}} P(x,dy)[u(t,z,y) - u(t,z,x)]. \tag{14}$$

**Theorem 1.** *The risk-minimizing $H$-admissible stock exchange strategy $\pi^* = (\gamma^*, \beta^*)$ is given by the following formula:*

$$\begin{aligned} \gamma_t^* &= u_z(t, S_t, X_t), \\ \beta_t^* &= V_t(\pi^*) - \gamma_t^*\cdot S_t, \end{aligned} \tag{15}$$

*where*

$$V_t(\pi^*) = \tilde{E} f(S_T) + \int_0^t u_z(r, S_r, X_r) dS_r + \int_0^t \int_{\mathbf{X}} \psi(r, y)(\mu - \nu)(dr, dy), \tag{16}$$

$$\psi(r, y) = u(r, S_r, y) - u(r, S_r, X_{r-}).$$

*The residual risk process has the form*

$$\mathcal{R}_t(\pi^*) = E\left( \int_t^T [A u^2(r, S_r, X_r) - 2u(r, S_r, X_r) A u(r, S_r, X_r)] \, ds / \mathcal{F}_t \right).$$

*In particular, the residual risk at the moment* $t = 0$ *is equal to*

$$\mathcal{R}_0(\pi^*) = E\left( \int_0^T [A u^2(r, S_r, X_r) - 2u(r, S_r, X_r) A u(r, S_r, X_r)] \, ds \right), \tag{17}$$

*where the operator* $A$ *was defined in* (14).

**4. Proof.** By applying Ito's formula to the solution of (13) we obtain:

$$f(S_T) = u(T, S_T, X_T) = u(0, z, x) + \int_0^T u_z(r, S_r, X_r) dS_r +$$

$$+ \int_0^T \left[ u_t(r, S_r, X_r) + \frac{1}{2} \sigma^2(X_r)(S_r)^2 u_{zz}(r, S_r, X_r) \right] dr +$$

$$+ \sum_{r \le T} [u(r, S_r, X_r) - u(r-, S_{r-}, X_{r-})]. \tag{18}$$

We note that, for any function $h$ on $[0, T] \times \mathbf{X}$, right-continuous and left-limit of $t$, we have

$$\sum_{r \le T} [h(r, X_r) - h(r-, X_{r-})] = \int_0^t \int_{\mathbf{X}} [h(r, y) - h(r-, X_{r-})] \mu(dr, dy) =$$

$$= \int_0^t \int_{\mathbf{X}} [h(r, y) - h(r-, X_{r-})](\mu - \nu)(dr, dy) +$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbf{X}} [h(r, y) - h(r-, X_{r-})] \nu(dr, dy) =$$

$$= \int_0^t \int_{\mathbf{X}} [h(r, y) - h(r-, X_{r-})](\mu - \nu)(dr, dy) +$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbf{X}} \frac{g_{X_{r-}}(r)}{\overline{G}_{X_{r-}}(r)} P(X_{r-}, dy) [h(r, y) - h(r-, X_{r-})] \, dr =$$

$$= \int_0^t \int_{\mathbf{X}} [h(r, y) - h(r-, X_{r-})](\mu - \nu)(dr, dy) + \int_0^t A h(r-, X_{r-}) \, dr \tag{19}$$

(see, (10) and (14).

Hence, from (13), (18), and (19) we obtain

$$f(S_T) = u(T, S_T, X_T) = u(0, z, x) + \int_0^T u_z(r, S_r, X_r)\,dS_r +$$

$$+ \int_0^T \int_{\mathbf{X}} [u(r, S_r, X_r) - u(r, S_r, X_{r-})](\mu - \nu)(dr, dy), \tag{20}$$

and relations (15), (16) are valid.

Residual risk process can be expressed in the following was (see (11)):

$$\mathcal{R}_t(\pi^*) = E\left(\left[\int_t^T \int_{\mathbf{X}} \psi(r, y)(\mu - \nu)(dr, dy)\right]^2 / \mathcal{F}_t\right) =$$

$$= E\left(\int_t^T \int_{\mathbf{X}} [u(r, S_r, y) - u(r, S_r, x_r)]^2 \nu(dr, dy) / \mathcal{F}_t\right) =$$

$$= E\left(\int_t^T \int_{\mathbf{X}} \frac{g_{X_r}(r)}{\overline{G}_{X_r}(r)} P(X_{r-}, dy)[u(r, S_r, y) - u(r, S_r, X_{r-})]^2 / \mathcal{F}_t\right) =$$

$$= E\left(\int_t^T [Au^2(r, S_r, X_r) - 2u(r, S_r, X_r)Au(r, S_r, X_r)]\,dr / \mathcal{F}_t\right),$$

and the theorem is proved.

We must only prove that the solution of Cauchy problem (13) exists. We do it in the next section.

**5. Random evolution approach.** Let $\tilde{S}_t$ be a solution of the stochastic differential equation

$$d\tilde{S}_t = \sigma(X_t)\tilde{S}_t\,dW_t, \quad \tilde{S}_0 = z. \tag{21}$$

This solution has the form

$$\tilde{S}_t = z \exp\left\{\int_0^t \sigma(X_r)\,dW_r - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(X_r)\,dr\right\}. \tag{22}$$

We note that $\tilde{S}_t$ is a continuous semi-Markov random evolution [5; 4, p. 77], $V^c(t)$:

$$V^c(t)f(z) := E[\,f(\tilde{S}_t)\,/\,X(s),\ 0 \le s \le t\,]. \tag{23}$$

i.e., random evolution underlying the semi-Markov process $X_t$. This evolution is generated by the following generating operators:

$$\Gamma(x)f(z) := \frac{1}{2}\sigma^2(x)z^2 f''(z) \quad \forall f(z) \in \mathbf{C}^2(\mathbf{R}_+). \tag{24}$$

Further, let's consider the following process $(X_t, t - \tau_{\nu(t)})$. It is a Markov process on $\mathbf{X} \times \mathbf{R}_+$ with the infinitesimal operator $\hat{A} = A + d/dt$, where $A$ is defined in (14).

The expectation for the random evolution $V^c(t)$ of Markov process $(X_t, t - \tau_{\nu(t)})$ satisfies the following equation:

$$v(t, z, x) := E[V^c(t)f(z, X_t, t - \tau_{\nu(t)})].$$

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = \Gamma(x)v + \hat{A}v, \\ v(0, z, x) = f(z, x, 0), \end{cases} \tag{25}$$

where $\Gamma(x)$ is defined in (24).

Let $(\tilde{S}_t^{z,x}, X_t^x, t - \tau_{\nu(t)})$ be a Markov process with the initial point $(z, x, 0)$ with the first component $\tilde{S}_t$ in (21). $X_t^x$ be a semi-Markov process. From (21)–(25) we obtain the following result:

**Lemma 1.** *Function*

$$u(t, z, x) := E f(\tilde{S}_{T-t}^{z,x}) \tag{26}$$

*is a solution of problem* (13).

***Proof.*** From (22) we have

$$u(T-t, z, x) = E f(\tilde{S}_t^{z,x}) = \int f(y) y^{-1} h(y; t, z, x) dy, \tag{27}$$

where

$$h(y; t, z, x) = \int \varphi\left( \xi, \ln\frac{y}{z} + \frac{1}{2}\xi \right) F_t^x(d\xi) = E\varphi\left( z_t^x, \ln\frac{y}{z} + \frac{1}{2} z_t^x \right), \tag{28}$$

$\varphi(t, x) = (2\pi t)^{-1/2} \exp\{-x^2/2t\}$. $F_t^x$ is a distribution of the random variable

$$Z_t^x = \int_0^t \sigma^2(X_r^x) dr. \tag{29}$$

Let $v$ be a solution of the equation

$$v_z(t, \eta, x) = \sigma^2(x) v_z(t, \eta, x) + \hat{A} v(t, \eta, x) \tag{30}$$

with the initial condition $v(0, \eta, x) = g(\eta)$. From Ito's formula we have that

$$v(t, \eta, x) = E g(\eta + Z_t^x). \tag{31}$$

By substituting in this formula $g(\eta) = \varphi(\eta - \ln(y/x), (\ln(y/x) + \eta)/2)$, we obtain that

$$h(y; t, z, x) = v\left( \ln\frac{y}{z}, t, x \right). \tag{32}$$

From (30) and (32) we have:

$$h_t(y; t, z, x) = \sigma^2(x) E\left[ \varphi_t\left( Z_t^x, \ln\frac{y}{z} + \frac{1}{2} Z_z^x \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \varphi_z\left( Z_t^x, \ln\frac{y}{z} + \frac{1}{2} Z_z^x \right) \right] + \hat{A} h(y; t, z, x).$$

Differentiation of (28) gives the equality

$$h_{zz} = z^{-2} E[\varphi_{zz} + \varphi_z].$$

Since $\varphi$ satisfies the heat equation $\varphi_t = 1/2\, \varphi_{zz}$,

$$h_t = \frac{1}{2} \sigma^2(x) z^{-2} h_{zz} + \hat{A} h.$$

Hence, the function $u$ in (26) is a solution of (13).

***Remark* 1.** Let's define the following process:

$$m_t := f(\tilde{S}_t, X_t, t-\tau_{\nu(t)}) - f(z, x, 0) - \int_0^t \left( A + \frac{d}{dr} \right) f(\tilde{S}_r, X_r, r-\tau_{\nu(r)})\, dr. \quad (33)$$

It's an $\mathcal{F}_t$-martingale, where $\mathcal{F}_t := \sigma\{X_s, W_s; 0 \le s \le t\}$. It's quadratic variation is equal to

$$\langle m_t \rangle = \int_0^t \left[ \left( A + \frac{d}{dr} \right) f^2(\tilde{S}_r, X_r, r-\tau_{\nu(r)}) - \right.$$

$$\left. - 2f(\tilde{S}_r, X_r, r-\tau_{\nu(r)}) \left( A + \frac{d}{dr} \right) f(\tilde{S}_r, X_r, r-\tau_{\nu(r)}) \right] dr =$$

$$= \int_0^t [A f^2(\tilde{S}_r, X_r, r-\tau_{\nu(r)}) - 2f(\tilde{S}_r, X_r, r-\tau_{\nu(r)}) A f(\tilde{S}_r, X_r, r-\tau_{\nu(r)})]\, dr. \quad (34)$$

In such a way, from (17) and (34), it follows that $\mathcal{R}_0(\pi^*) = \langle m_T \rangle$ with the function $u$ replacing $f$ in (33).

***Remark* 2.** In the Markov case, the operator $A$ in (14) has the following form:

$$A f(x) = \lambda(x) \int_{\mathbf{X}} P(x, dy)[f(y) - f(x)], \quad (35)$$

where $\lambda(x)$ are an intensities of jumps of the jump Markov process $X_t$; in this case

$$Q(x, A, t) = P(x, dy)(1 - e^{-\lambda(x)t}),$$

$$G_x(t) = 1 - e^{-\lambda(x)t},$$

$$\overline{G}_x(t) = e^{-\lambda(x)t},$$

$$g_x(t) = \lambda(x) e^{-\lambda(x)t},$$

and

$$\frac{g_x(t)}{\overline{G}_x(t)} = \lambda(x).$$

In this way, the operator $A$ in (35) is an infinitesimal operator of the jump Markov process $X_t$.

**Corollary 1.** *Initial capital for hedging strategy in our model is defined by the formula:*

$$V_0(\pi) = \tilde{E} f(S_T) = \int \left( \int f(y) y^{-1} \varphi\left( \eta, \ln \frac{y}{z} + \frac{1}{2}\eta \right) dy \right) F_T^x(d\eta).$$

*In particular, for the European call options $f(y) = (y-K)^+$, we have*

$$V_0(\pi) = \int C_{BS}((z/T)^{1/2}, T) F_T^x(dz),$$

*where $C_{BS}(\hat{\sigma}, T)$ is the Black – Scholes price for call option with volatility $\hat{\sigma}$.*

*i.e.*, $C_{BS}((z/T)^{1/2}, T) = S_0\Phi(d_+) - K\Phi(d_-)$, *where*

$$d_{\pm} = \left[\ln \frac{S_0}{K} \pm \frac{S_0}{2}\right] / \sqrt{S_0}.$$

***Corollary* 2.** *Let* $X = (1, 2)$, *and* $\nu(t)$ *be a counting process for* $X_t$, *then*

$$Z_T^1 = \int_0^T [\sigma^2(1)I(X_t = 1) + \sigma^2(2)I(X_t = 2)]\,dt = aT + bJ_T,$$

*where*

$$J_T = \int_0^T (-1)^{\nu(t)}\,dt,$$

$$a = \frac{1}{2}(\sigma^2(1) + \sigma^2(2)),$$

$$b = \frac{1}{2}(\sigma^2(1) - \sigma^2(2)).$$


1. *Föllmer H., Sondermann D.* Hedging of nonredundant contingent claims // Contributions to Mathematical Economics / Ed. W. Hildenbrand, A. MasColell. – Amsterdam–New York: North-Holland, 1986. – P. 205–223.
2. *Fölmer H., Schweizer M.* Hedging of contingent claims under incomplete information // Appl. Stoch. Anal. – New York–London: Gordon and Breach, 1991. – P. 389–414.
3. *Di-Masi G., Kavanov Yu., Runggaldier W.* Hedging of options under mean-square criterion and Markov volatility // Theory Probab. Appl. – 1994. – **39**, № 1. – P. 211–222.
4. *Koroljuk V. S., Swishchuk A. V.* Semi-Markov random evolutions. – Kiev: Nauk. Dumka, 1992. – 256 p.
5. *Swishchuk A. V.* Limit theorems for stochastic differential equations with semi-Markov switchings // Proceed. III Int. conf. "Evolution Stochastic Systems: Theory and Applications", Katsively, Ukraine. – 1992. – Utrecht–Moscow: VSP–TVP, 1994. – 14 p.


Received 11.01.95