УДК 519.21

М. П. Моклячук, канд. фіз.-мат. наук (Нац. ун-т, Київ)

РОБАСТНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ОДНОРІДНИХ ЗА ЧАСОМ ІЗОТРОПНИХ НА СФЕРІ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ, ЩО СПОСТЕРІГАЮТЬСЯ З ШУМОМ

We study the problem of the optimal linear estimation of the functional

$$A_N\xi = \sum_{k=0}^{N} \int_{S_n} a(k,x)\xi(k,x)m_n(dx)$$

which depends on unknown values of a random field $\xi(k,x)$, $k \in Z$, $x \in S_n$, which is homogeneous in time and isotropic on the sphere S_n, if the field $\xi(k,x)+\eta(k,x)$ with $k \in Z\setminus\{0, 1, \ldots, N\}$, $x \in S_n$ is observed, where $\eta(k,x)$ is an uncorrelated with $\xi(k,x)$ random field, which is homogeneous in time and anisotropic on the sphere S_n. Formulas for calculation of the value of the mean square error and the spectral characteristic of the optimal estimate of the functional $A_N\xi$ are given. The least favorable spectral densities and the minimax (robust) spectral characteristics are found for optimal estimates of the functional $A_N\xi$.

Досліджується задача оптимального лінійного оцінювання функціоналу

$$A_N\xi = \sum_{k=0}^{N} \int_{S_n} a(k,x)\xi(k,x)m_n(dx)$$

від невідомих значень однорідного за часом ізотропного на сфері S_n випадкового поля $\xi(k,x)$, $k \in Z$, $x \in S_n$, за даними спостережень поля $\xi(k,x)+\eta(k,x)$ при $k \in Z\setminus\{0, 1, \ldots, N\}$, $x \in S_n$, де $\eta(k,x)$ — некорельоване з $\xi(k,x)$ однорідне за часом ізотропне на сфері S_n випадкове поле. Виведені формули для обчислення величини середньоквадратичної похибки та спектральної характеристики оптимальної оцінки функціоналу $A_N\xi$. Знайдені найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні (робастні) спектральні характеристики оптимальних оцінок функціоналу $A_N\xi$.

1. Класичний метод лінійної інтерполяції. Нехай S_n — одинична сфера в n-вимірному евклідовому просторі, $m_n(dx)$ — міра Лебега на сфері S_n, $S_m^l(x)$, $m = 0, 1, \ldots$, $l = 1, \ldots, h(m,n)$ — ортогональні сферичні гармоніки, $h(m,n)$ — кількість лінійно незалежних ортонормованих сферичних гармонік порядку m [1–3]. Випадкове поле $\xi(k,x)$, $k \in Z$, $x \in S_n$, називається однорідним за часом ізотропним на сфері, якщо [4, 5]

$$E\xi(k,x) = 0, \quad E\xi(k,x)\xi(s,y) = B(k-s, \cos\langle x,y\rangle),$$

де $\cos\langle x,y\rangle = (x,y)$ — кутова відстань між точками $x, y \in S_n$. Таке поле допускає зображення [4, 5]

$$\xi(k,x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \xi_m^l(k)\, S_m^l(x),$$

$$\xi_m^l(k) = \int_{S_n} \xi(k,x) S_m^l(x) m_n(dx),$$

де $\xi_m^l(k)$ — некорельовані між собою стаціонарні випадкові процеси

$$E\xi_m^l(k)\,\xi_u^v(s) = \delta_m^u\,\delta_l^v\, b_m^\xi(k-s), \quad m = 0, 1, \ldots, \quad l = 1, \ldots, h(m,n).$$

Кореляційна функція поля $\xi(k,x)$ допускає зображення

$$B(k-s,\cos\langle x,y\rangle) = \frac{1}{\omega_n}\sum_{m=0}^{\infty} h(m,n)\frac{C_m^{(n-2)/2}(\cos\langle x,y\rangle)}{C_m^{(n-2)/2}(1)}\, b_m^{\xi}(k-s),$$

де $\omega_n = 2\pi^{n/2}\Gamma(n/2)$, а $C_m^l(z)$ — поліноми Гегенбауера [1].

Нехай $\eta(k,x)$, $k\in Z$, $x\in S_n$, — некорельоване з $\xi(k,x)$ однорідне за часом ізотропне на сфері S_n випадкове поле, що допускає зображення

$$\eta(k,x) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{h(m,n)} \eta_m^l(k)\, S_m^l(x),$$

де

$$\eta_m^l(k) = \int_{S_n} \eta(k,x) S_m^l(x) m_n(dx)$$

— некорельовані з $\xi_m^l(k)$ стаціонарні процеси з кореляційними функціями

$$E\eta_m^l(k)\,\eta_u^v(s) = \delta_m^u\,\delta_l^v\, b_m^{\eta}(k-s), \quad m,u = 0,1,\ldots,\quad l,v = 1,\ldots,h(m,n).$$

Випадкові поля $\xi(k,x)$ та $\eta(k,x)$ мають спектральні щільності $f(\lambda) = \{f_m(\lambda): m=0,1,\ldots\}$, $g(\lambda) = \{g_m(\lambda): m=0,1,\ldots\}$, якщо кореляційні функції процесів $\xi_m^l(k)$, $\eta_m^l(k)$ можна зобразити у вигляді

$$b_m^{\xi}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f_m(\lambda)\,d\lambda, \quad b_m^{\eta}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} g_m(\lambda)\,d\lambda.$$

Позначимо через $M(f+g)$ множину таких $m\in Z$, що щільності $f_m(\lambda) + g_m(\lambda)$ задовольняють умову мінімальності

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f_m(\lambda)+g_m(\lambda))^{-1}\,d\lambda < \infty.$$

Будемо вивчати випадкові поля, для яких $M(f+g)\neq\varnothing$. Тоді безпомилкова інтерполяція поля $\xi(k,x)+\eta(k,x)$ неможлива [6, 7].

Нехай функція $a(k,x)$, що визначає функціонал

$$A_N\xi = \sum_{k=0}^{N}\int_{S_n} a(k,x)\xi(k,x)m_n(dx) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{h(m,n)}\sum_{k=0}^{N} a_m^l(k)\,\xi_m^l(k),$$

має компоненти

$$a_m^l(k) = \int_{S_n} a(k,x) S_m^l(x) m_n(dx),$$

які задовольняють умову

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{h(m,n)} |a_m^l(k)| < \infty. \tag{1}$$

За цієї умови $E|A_N\xi|^2 < \infty$.

Середньоквадратична похибка $\Delta(h;f,g)$ лінійної оцінки $\hat{A}_N\xi$ функціоналу $A_N\xi$ визначається спектральною характеристикою $h(\lambda)$ оцінки та спектральними щільностями $f(\lambda) = \{f_m(\lambda): m=0,1,\ldots\}$, $g(\lambda) = \{g_m(\lambda): m=0,1,\ldots\}$ поля $\xi(k,x)$ та поля $\eta(k,x)$. Величину похибки можна обчислити за формулою

$$\Delta(h; f, g) = E\,|A_N\xi - \hat{A}_N\xi|^2 =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\left| A_{mN}^l(\lambda) - h_m^l(\lambda) \right|^2 f_m(\lambda) + \left| h_m^l(\lambda) \right|^2 g_m(\lambda) \right] d\lambda,$$

де

$$A_{mN}^l(\lambda) = \sum_{k=0}^{N} a_m^l(k) e^{ik\lambda}.$$

Спектральна характеристика

$$h(\lambda) = \{ h_m^l(\lambda) : m = 0, 1, \ldots ; l = 1, \ldots, h(m, n) \}$$

оцінки $\hat{A}_N\xi$ належить простору $L_2^N(f+g)$, породженому функціями, що мають компоненти, які задовольняють умови

$$h_m^l(\lambda) = \sum_{Z \setminus \{0, 1, \ldots, N\}} h_m^l(k) e^{ik\lambda},$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \int_{-\pi}^{\pi} | h_m^l(\lambda) |^2 (f_m(\lambda) + g_m(\lambda))\, d\lambda < \infty.$$

Спектральна характеристика $h(f, g)$ оптимальної оцінки функціоналу $A_N\xi$ мінімізує середньоквадратичну похибку

$$\Delta(f, g) = \Delta(h(f, g); f, g) = \min_{h \in L_2^N(f+g)} \Delta(h; f, g).$$

Скориставшись класичним методом А. М. Колмогорова [6], можна вивести такі формули для обчислення величини похибки $\Delta(f, g)$ та спектральної характеристики $h(f, g)$ оптимальної лінійної оцінки функціоналу $A_N\xi$ за умови, що відомі щільності

$$f(\lambda) = \{ f_m(\lambda) : m = 0, 1, \ldots \}, \quad g(\lambda) = \{ g_m(\lambda) : m = 0, 1, \ldots \}.$$

Тоді

$$\Delta(f, g) = \sum_{m \in M} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left| A_{mN}^l(\lambda) g_m(\lambda) + C_{mN}^l(\lambda) \right|^2}{(f_m(\lambda) + g_m(\lambda))^2} f_m(\lambda)\, d\lambda + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left| A_{mN}^l(\lambda) f_m(\lambda) - C_{mN}^l(\lambda) \right|^2}{(f_m(\lambda) + g_m(\lambda))^2} g_m(\lambda)\, d\lambda \right] =$$

$$= \sum_{m \in M} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left[\left\langle \boldsymbol{B}_{mN} \boldsymbol{c}_m^l, \boldsymbol{c}_m^l \right\rangle + \left\langle \boldsymbol{R}_{mN} \boldsymbol{a}_m^l, \boldsymbol{a}_m^l \right\rangle \right], \tag{2}$$

$$h_m^l(f+g) = \frac{A_{mN}^l(\lambda) f_m(\lambda) - C_{mN}^l(\lambda)}{f_m(\lambda) + g_m(\lambda)} =$$

$$= A_{mN}^l(\lambda) - \frac{A_{mN}^l(\lambda) g_m(\lambda) + C_{mN}^l(\lambda)}{f_m(\lambda) + g_m(\lambda)}, \quad m \in M(f+g), \tag{3}$$

де

$$\boldsymbol{a}_m^l = \left(a_m^l(0), \ldots, a_m^l(N) \right), \quad \boldsymbol{c}_m^l = \left(c_m^l(0), \ldots, c_m^l(N) \right),$$

$$\boldsymbol{c}_m^l = \boldsymbol{B}_{mN}^{-1} \boldsymbol{D}_{mN} \boldsymbol{a}_m^l, \quad C_{mN}^l(\lambda) = \sum_{k=0}^{N} c_m^l(k) e^{ik\lambda}.$$

$$\left\langle a_m^l, c_m^l \right\rangle = \sum_{k=0}^{N} a_m^l(k)\, c_m^l(k).$$

$\boldsymbol{B}_{mN}$, $\boldsymbol{D}_{mN}$, $\boldsymbol{R}_{mN}$ — матриці розмірності $(N+1)\times(N+1)$ з елементами, що визначаються коефіцієнтами Фур'є функцій $(f_m(\lambda)+g_m(\lambda))^{-1}, f_m(\lambda)(f_m(\lambda)+g_m(\lambda))^{-1}, f_m(\lambda)g_m(\lambda)(f_m(\lambda)+g_m(\lambda))^{-1}$ відповідно:

$$\boldsymbol{B}_{mN}(k,j) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f_m(\lambda)+g_m(\lambda))^{-1}e^{i(j-k)\lambda}d\lambda,$$

$$\boldsymbol{D}_{mN}(k,j) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_m(\lambda)(f_m(\lambda)+g_m(\lambda))^{-1}e^{i(j-k)\lambda}d\lambda,$$

$$\boldsymbol{R}_{mN}(k,j) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_m(\lambda)g_m(\lambda)(f_m(\lambda)+g_m(\lambda))^{-1}e^{i(j-k)\lambda}d\lambda.$$

Лема 1. *Нехай* $\xi(k,x)$, $\eta(k,x)$ — *некорельовані між собою однорідні за часом ізотропні на сфері випадкові поля, що мають спектральні щільності* $f(\lambda)$, $g(\lambda)$. *Якщо* $M(f+g)\neq\varnothing$ *і виконується умова* (1), *то величину середньоквадратичної похибки* $\Delta(f,g)$ *і спектральну характеристику* $h(f,g)$ *оптимальної лінійної оцінки функціоналу* $A_N\xi$ *за даними спостережень поля* $\xi(k,x)+\eta(k,x)$ *при* $k\in Z\setminus\{0,1,\dots,N\}$, $x\in S_n$ *можна обчислити за формулами* (2), (3).

Лема 2. *Нехай* $\xi(k,x)$ — *однорідне за часом ізотропне на сфері випадкове поле, що має спектральну щільність* $f(\lambda)$. *Якщо* $M(f)\neq\varnothing$ *і виконується умова* (1), *то величину середньоквадратичної похибки* $\Delta(f)$ *і спектральну характеристику* $h(f)$ *оптимальної лінійної оцінки функціоналу* $A_N\xi$ *за даними спостережень поля* $\xi(k,x)$ *при* $k\in Z\setminus\{0,1,\dots,N\}$, $x\in S_n$ *можна обчислити за формулами*

$$\Delta(f) = \sum_{m\in M(f)}\sum_{l=1}^{h(m,n)}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|C_{mN}^l(\lambda)|^2 f_m^{-1}(\lambda)d\lambda = \sum_{m\in M(f)}\sum_{l=1}^{h(m,n)}\left\langle \boldsymbol{B}_{mN}^{-1}a_m^l, a_m^l\right\rangle, \tag{4}$$

$$h_m^l(f) = A_{mN}^l(\lambda) - C_{mN}^l(\lambda)\, f_m^{-1}(\lambda), \tag{5}$$

де

$$C_{mN}^l(\lambda) = \sum_{k=0}^{N}\left(\boldsymbol{B}_{mN}^{-1}a_m^l\right)_k e^{ik\lambda},$$

$\boldsymbol{B}_{mN}$ — *матриця розмірності* $(N+1)\times(N+1)$ *з елементами*

$$\boldsymbol{B}_{mN}(k,j) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_m^{-1}(\lambda)e^{i(j-k)\lambda}d\lambda, \quad 0\le k,\ j\le N.$$

2. Мінімаксна інтерполяція випадкових полів. Щоб користуватися формулами (1)–(5), необхідно знати спектральні щільності $f(\lambda)=\{f_m(\lambda): m=0,1,\dots\}$, $g(\lambda)=\{g_m(\lambda): m=0,1,\dots\}$ поля $\xi(k,x)$ та поля $\eta(k,x)$. Якщо ж точні значення щільностей невідомі, а відомі лише множини $\mathcal{D}_f$, $\mathcal{D}_g$ можливих щільностей, то застосовують мінімаксний метод оцінювання невідомих значень випадкових процесів та випадкових полів [8–19]. Такий метод дає можливість знайти оцінки, які мінімізують величину похибки одночасно для всіх щільностей $(f(\lambda), g(\lambda))$ з класу $\mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g$.

***Означення* 1.** *Спектральні щільності $f^0(\lambda) \in \mathcal{D}_f$, $g^0(\lambda) \in \mathcal{D}_g$ називаються найменш сприятливими в класі $\mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g$ для оптимального лінійного оцінювання функціоналу $A_N\xi$, якщо*

$$\Delta(h(f^0, g^0); f^0, g^0) = \max_{(f,g)\in \mathcal{D}_f\times\mathcal{D}_g} \Delta(h(f,g); f, g).$$

***Означення* 2.** *Спектральна характеристика $h^0(\lambda)$ називається мінімаксною (робастною) в класі $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g$, якщо вона задовольняє умови*

$$h^0(\lambda) \in H_{\mathcal{D}} = \bigcap_{(f,g)\in\mathcal{D}} L_2^N(f+g),$$

$$\min_{h\in H_{\mathcal{D}}} \max_{(f,g)\in\mathcal{D}} \Delta(h; f, g) = \max_{(f,g)\in\mathcal{D}} \Delta(h^0; f, g).$$

Беручи до уваги співвідношення (2)–(5), можна переконатися у справедливості таких тверджень.

Лема 3. *Спектральні щільності $f^0(\lambda) \in \mathcal{D}_f$, $g^0(\lambda) \in \mathcal{D}_g$ будуть найменш сприятливими в класі $\mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g$ для оптимального оцінювання функціоналу $A_N\xi$, якщо коефіцієнти Фур'є функцій $\left(f_m^0(\lambda) + g_m^0(\lambda)\right)^{-1}$, $f_m^0(\lambda)\left(f_m^0(\lambda) + g_m^0(\lambda)\right)^{-1}$, $f_m^0(\lambda)\, g_m^0(\lambda)\left(f_m^0(\lambda) + g_m^0(\lambda)\right)^{-1}$, задають матриці $\boldsymbol{B}_{mN}^0$, $\boldsymbol{D}_{mN}^0$, $\boldsymbol{R}_{mN}^0$, які визначають розв'язок задачі на умовний екстремум*

$$\max_{(f,g)\in\mathcal{D}} \sum_{m\in M} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left[\left\langle \boldsymbol{D}_{mN}\boldsymbol{a}_m^l, \boldsymbol{B}_{mN}^{-1}\boldsymbol{D}_{mN}\boldsymbol{a}_m^l\right\rangle + \left\langle \boldsymbol{R}_{mN}\boldsymbol{a}_m^l, \boldsymbol{a}_m^l\right\rangle\right] =$$
$$= \sum_{m\in M} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left[\left\langle \boldsymbol{D}_{mN}^0\boldsymbol{a}_m^l, \left(\boldsymbol{B}_{mN}^0\right)^{-1}\boldsymbol{D}_{mN}^0\boldsymbol{a}_m^l\right\rangle + \left\langle \boldsymbol{R}_{mN}^0\boldsymbol{a}_m^l, \boldsymbol{a}_m^l\right\rangle\right]. \qquad (6)$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f^0, g^0)$ оптимальної оцінки функціоналу $A_N\xi$ обчислюється за формулою (3) за умови, що $h(f^0, g^0) \in H_{\mathcal{D}}$.

Лема 4. *Спектральна щільність $f^0(\lambda) \in \mathcal{D}_f$ буде найменш сприятливою в класі $\mathcal{D}_f$ для оптимального оцінювання функціоналу $A_N\xi$ за даними спостережень поля $\xi(k, x)$ при $k \in Z\setminus\{0, 1, \ldots, N\}$, $x \in S_n$, якщо коефіцієнти Фур'є функцій $\left(f_m^0(\lambda)\right)^{-1}$, $m = 0, 1, \ldots$, задають матриці $\boldsymbol{B}_{mN}^0$, які визначають розв'язок задачі на умовний екстремум*

$$\max_{f\in\mathcal{D}_f} \sum_{m\in M} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left\langle \boldsymbol{B}_{mN}^{-1}\boldsymbol{a}_m^l, \boldsymbol{a}_m^l\right\rangle = \sum_{m\in M} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left\langle \left(\boldsymbol{B}_{mN}^0\right)^{-1}\boldsymbol{a}_m^l, \boldsymbol{a}_m^l\right\rangle. \qquad (7)$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f^0)$ оптимальної оцінки функціоналу $A_N\xi$ обчислюється за формулою (5) за умови, що $h(f^0) \in H_{\mathcal{D}_f}$.

Найменш сприятливі спектральні щільності $f^0(\lambda)$, $g^0(\lambda)$ та мінімаксна спектральна характеристика $h^0(\lambda)$ утворюють сідлову точку функції $\Delta(h; f, g)$ на множині $H_{\mathcal{D}} \times \mathcal{D}$. Нерівності сідлової точки виконуються, якщо $h^0 = h(f^0, g^0) \in H_{\mathcal{D}}$, де (f^0, g^0) — розв'язок задачі на умовний екстремум

$$\max_{(f,g) \in \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g} \Delta(h(f^0, g^0); f, g) = \Delta(h(f^0, g^0); f^0, g^0), \tag{8}$$

$$\Delta(h(f^0, g^0); f, g) = \sum_{m \in M} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left| A_{mN}^l(\lambda) g_m^0(\lambda) + C_{mN}^{0l}(\lambda) \right|^2}{\left(f_m^0(\lambda) + g_m^0(\lambda) \right)^2} f_m(\lambda) d\lambda + \right.$$
$$\left. + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left| A_{mN}^l(\lambda) f_m^0(\lambda) - C_{mN}^{0l}(\lambda) \right|^2}{\left(f_m^0(\lambda) + g_m^0(\lambda) \right)^2} g_m(\lambda) d\lambda \right].$$

Задача на умовний екстремум (8) еквівалентна задачі на безумовний екстремум

$$\Delta_{\mathcal{D}}(f, g) = -\Delta(h(f^0, g^0); f, g) + \delta((f, g) \mid \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g) \to \inf, \tag{9}$$

де $\delta((f, g) \mid \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g)$ — індикаторна функція множини $\mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g$. Розв'язок (f^0, g^0) задачі (9) характеризується умовою $0 \in \partial\Delta_{\mathcal{D}}(f^0, g^0)$, де $\partial\Delta_{\mathcal{D}}(f^0, g^0)$ — субдиференціал опуклого функціоналу $\Delta_{\mathcal{D}}(f, g)$ в точці (f^0, g^0).

Лема 5. *Нехай (f^0, g^0) — розв'язок екстремальної задачі* (9). *Спектральні щільності $f^0(\lambda)$, $g^0(\lambda)$ будуть найменш сприятливими в класі $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g$, а функція $h^0 = h(f^0, g^0)$ буде мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціоналу $A_N\xi$, якщо $h(f^0, g^0) \in H_{\mathcal{D}}$.*

3. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі щільностей, що мають обмежену потужність. Розглянемо задачу для множини спектральних щільностей $\mathcal{D}_f^0 \times \mathcal{D}_g^0$, де

$$\mathcal{D}_f^0 = \left\{ f(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi\omega_n} \sum_{m=0}^{\infty} h(m,n) \int_{-\pi}^{\pi} f_m(\lambda) d\lambda \le P_1 \right. \right\},$$

$$\mathcal{D}_g^0 = \left\{ g(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi\omega_n} \sum_{m=0}^{\infty} h(m,n) \int_{-\pi}^{\pi} g_m(\lambda) d\lambda \le P_2 \right. \right\}.$$

Якщо $f^0(\lambda) \in \mathcal{D}_f^0$, $g^0(\lambda) \in \mathcal{D}_g^0$, $M(f^0 + g^0) \ne \varnothing$ і функції

$$h_{mf}(f^0, g^0) = \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left| A_{mN}^l(\lambda) g_m^0(\lambda) + C_{mN}^{0l}(\lambda) \right| \left(f_m^0(\lambda) + g_m^0(\lambda) \right)^{-1}, \tag{10}$$

$$h_{mg}(f^0, g^0) =$$
$$= \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left| A_{mN}^l(\lambda) f_m^0(\lambda) - C_{mN}^{0l}(\lambda) \right| \left(f_m^0(\lambda) + g_m^0(\lambda) \right)^{-1}, \quad m \in M(f^0 + g^0), \tag{11}$$

обмежені, то субдиференціал функціоналу $\Delta_{\mathcal{D}}(f, g)$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f^0 \times \mathcal{D}_g^0$ у точці (f^0, g^0) можна подати у вигляді

$$\partial\Delta_{\mathcal{D}}(f^0, g^0) = -\partial\Delta(h(f^0, g^0); f^0, g^0) + \partial\delta((f^0, g^0) \mid \mathcal{D}_f^0 \times \mathcal{D}_g^0).$$

Умова $0 \in \partial\Delta_{\mathcal{D}}(f^0, g^0)$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f^0 \times \mathcal{D}_g^0$ виконується, якщо спектральні щільності $f^0(\lambda) \in \mathcal{D}_f^0$, $g^0(\lambda) \in \mathcal{D}_g^0$ задовольняють рівняння

$$f_m^0(\lambda) + g_m^0(\lambda) = \alpha_{1m} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left| A_{mN}^l(\lambda) g_m^0(\lambda) + C_{mN}^{0l}(\lambda) \right|, \tag{12}$$

$$f_m^0(\lambda) + g_m^0(\lambda) = \alpha_{2m} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left| A_{mN}^l(\lambda) f_m^0(\lambda) - C_{mN}^{0l}(\lambda) \right|, \quad m \in M(f^0 + g^0), \tag{13}$$

де коефіцієнти $\alpha_{1m} \geq 0$, $\alpha_{2m} \geq 0$. Сталі α_{1m} не всі дорівнюють нулю, коли

$$\frac{1}{2\pi\omega_n} \sum_{m \in M(f^0+g^0)} h(m,n) \int_{-\pi}^{\pi} f_m^0(\lambda) d\lambda = P_1. \tag{14}$$

Величини α_{2m} не всі дорівнюють нулю, якщо

$$\frac{1}{2\pi\omega_n} \sum_{m \in M(f^0+g^0)} h(m,n) \int_{-\pi}^{\pi} g_m^0(\lambda) d\lambda = P_2. \tag{15}$$

Теорема 1. *Нехай спектральні щільності* $f^0(\lambda) = \{ f_m^0(\lambda) : m = 0, 1, \ldots \}$, $g^0(\lambda) = \{ g_m^0(\lambda) : m = 0, 1, \ldots \}$ *належать класу* $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f^0 \times \mathcal{D}_g^0$, $M(f^0 + g^0) \neq \varnothing$ *і функції* $h_{mf}(f^0, g^0)$, $h_{mg}(f^0, g^0)$, $m \in M$, *обчислені за формулами* (10), (11), *обмежені. Спектральні щільності* $f^0(\lambda)$, $g^0(\lambda)$ *будуть найменш сприятливими в класі* $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f^0 \times \mathcal{D}_g^0$ *для оптимального лінійного оцінювання функціоналу* $A_N\xi$, *якщо вони задовольняють рівняння* (12), (13) *і визначають розв'язок екстремальної задачі* (6). *Мінімаксна спектральна характеристика оптимальної оцінки функціоналу обчислюється за формулою* (3).

Теорема 2. *Нехай спектральна щільність* $f(\lambda)$ *відома, щільність* $g^0(\lambda)$ *належить класу* $\mathcal{D}_g^0$, $M(f + g^0) \neq \varnothing$ *і функції* $h_{mg}(f, g^0)$, $m \in M(f + g^0)$, *обчислені за формулою* (11), *обмежені. Спектральна щільність* $g^0(\lambda)$ *буде найменш сприятливою в класі* $\mathcal{D}_g^0$ *для оптимального лінійного оцінювання функціоналу* $A_N\xi$, *якщо щільності* $f(\lambda)$, $g^0(\lambda)$ *задовольняють рівняння*

$$g_m^0(\lambda) = \max\left\{ 0, \alpha_{2m} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left| A_{mN}^l(\lambda) f_m^0(\lambda) - C_{mN}^{0l}(\lambda) \right| - f_m(\lambda) \right\}$$

і визначають розв'язок екстремальної задачі (6). *Функція* $h(f, g^0)$, *обчислена за формулою* (3), *буде мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціоналу* $A_N\xi$.

Теорема 3. *Нехай спектральна щільність* $f^0(\lambda)$ *належить класу* $\mathcal{D}_f^0$, $M(f^0) \neq \varnothing$ *і функції* $h_m(f^0)$, $m \in M(f^0)$, *обчислені за формулою* (5), *обмежені. Спектральна щільність* $f^0(\lambda) \in \mathcal{D}_f^0$ *буде найменш сприятливою в класі* $\mathcal{D}_f^0$ *для оптимального лінійного оцінювання функціоналу* $A_N\xi$ *за даними спостережень поля* $\xi(k, x)$ *при* $k \in Z \setminus \{0, 1, \ldots, N\}$, $x \in S_n$, *якщо щільності* $f_m^0(\lambda)$, $m \in M(f^0)$, *задовольняють рівняння*

$$f_m^0(\lambda) = \alpha_{1m} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left| C_{mN}^{0l}(\lambda) \right|$$

і визначають розв'язок екстремальної задачі (7). *Мінімаксна спектральна характеристика оптимальної оцінки функціоналу обчислюється за формулою* (5).

4. Найменш сприятливі спектральні щільності в класах щільностей, що описують модель ε-забруднення та смугову модель випадкових полів. Нехай клас $\mathcal{D}$ невідомих спектральних щільностей має вигляд

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_v^u \times \mathcal{D}_\varepsilon,$$

$$\mathcal{D}_v^u = \left\{ f(\lambda) \,\Big|\, v_m(\lambda) \le f_m(\lambda) \le u_m(\lambda),\ \frac{1}{2\pi\omega_n} \sum_{m\in M} h(m,n) \int_{-\pi}^{\pi} f_m(\lambda) d\lambda = P_1 \right\},$$

$$\mathcal{D}_\varepsilon = \left\{ g(\lambda) \,\Big|\, g_m(\lambda) = (1-\varepsilon) g_m^1(\lambda) + \varepsilon w_n(\lambda),\ \frac{1}{2\pi\omega_n} \sum_{m\in M} h(m,n) \int_{-\pi}^{\pi} g_m(\lambda) d\lambda = P_2 \right\}.$$

Спектральні щільності

$$v(\lambda) = \{ v_m(\lambda) : m = 0, 1, \ldots \}, \quad u(\lambda) = \{ u_m(\lambda) : m = 0, 1, \ldots \}$$

і щільності $u_m(\lambda)$, $m = 0, 1, \ldots$, обмежені. Щільності з класу $\mathcal{D}_\varepsilon$ описують модель ε-забруднення, а щільності з класу $\mathcal{D}_v^u$ описують смугову модель випадкових полів.

Якщо $f^0(\lambda) \in \mathcal{D}_v^u$, $g^0(\lambda) \in \mathcal{D}_\varepsilon$, $M(f^0 + g^0) \ne \varnothing$ і функції $h_{mf}(f^0, g^0)$, $h_{mg}(f^0, g^0)$, $m \in M$, обчислені за формулами (10), (11), обмежені, то умова $0 \in \partial \Delta_{\mathcal{D}}(f^0, g^0)$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_v^u \times \mathcal{D}_\varepsilon$ виконується, якщо спектральні щільності $f^0(\lambda)$, $g^0(\lambda)$ задовольняють рівняння

$$\sum_{l=1}^{h(m,n)} \left| A_{mN}^l(\lambda) g_m^0(\lambda) + C_{mN}^{0l}(\lambda) \right| = \left(f_m^0(\lambda) + g_m^0(\lambda) \right) \left(\gamma_{m1}(\lambda) + \gamma_{m2}(\lambda) + \alpha_{1m}^{-1} \right), \quad (16)$$

$$\sum_{l=1}^{h(m,n)} \left| A_{mN}^l(\lambda) f_m^0(\lambda) - C_{mN}^{0l}(\lambda) \right| =$$

$$= \left(f_m^0(\lambda) + g_m^0(\lambda) \right) \left(\varphi_m(\lambda) + \alpha_{2m}^{-1} \right), \quad m \in M(f^0 + g^0), \quad (17)$$

де $\gamma_{m1}(\lambda) \le 0$ майже скрізь і $\gamma_{m1}(\lambda) = 0$, коли $f_m^0(\lambda) > v_m(\lambda)$; $\gamma_{m2}(\lambda) \ge 0$ майже скрізь і $\gamma_{m2}(\lambda) = 0$, коли $f_m^0(\lambda) < u_m(\lambda)$; $\varphi_m(\lambda) \le 0$ майже скрізь і $\varphi_m(\lambda) = 0$, коли $g_m^0(\lambda) > (1-\varepsilon) g_m^1(\lambda)$.

Теорема 4. *Нехай спектральні щільності* $f^0(\lambda) = \{ f_m^0(\lambda) : m = 0, 1, \ldots \}$, $g^0(\lambda) = \{ g_m^0(\lambda) : m = 0, 1, \ldots \}$ *належать класу* $\mathcal{D} = \mathcal{D}_v^u \times \mathcal{D}_\varepsilon$, $M(f^0 + g^0) \ne \varnothing$ *і функції* $h_{mf}(f^0, g^0)$, $h_{mg}(f^0, g^0)$, $m \in M$, *обчислені за формулами* (10), (11), *обмежені. Спектральні щільності* $f^0(\lambda)$, $g^0(\lambda)$ *будуть найменш сприятливими в класі* $\mathcal{D} = \mathcal{D}_v^u \times \mathcal{D}_\varepsilon$ *для оптимального лінійного оцінювання функціоналу* $A_N\xi$, *якщо вони задовольняють рівняння* (14)–(17) *і визначають розв'язок екстремальної задачі* (6). *Мінімаксна спектральна характеристика оптимальної оцінки функціоналу обчислюється за формулою* (3).

Теорема 5. *Нехай спектральна щільність* $f(\lambda)$ *відома, щільність* $g^0(\lambda)$ *належить класу* $\mathcal{D}_\varepsilon$, $M(f + g^0) \ne \varnothing$ *і функції* $h_{mg}(f, g^0)$, $m \in M(f + g^0)$, *обчислені за формулою* (11), *обмежені. Спектральна щільність* $g^0(\lambda)$ *буде найменш сприятливою в класі* $\mathcal{D}_\varepsilon$ *для оптимального лінійного оцінювання* *функціоналу* $A_N\xi$, *якщо щільності* $f(\lambda)$, $g^0(\lambda)$ *задовольняють рівняння*

$$g_m^0(\lambda) = \max\left\{(1-\varepsilon)g_m^1(\lambda), \alpha_{2m}\sum_{l=1}^{h(m,n)}\left|A_{mN}^l(\lambda)f_m(\lambda) - C_{mN}^{0l}(\lambda)\right| - f_m(\lambda)\right\}$$

і визначають розв'язок екстремальної задачі (6). *Функція* $h(f, g^0)$, *обчислена за формулою* (3), *буде мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціоналу* $A_N\xi$.

Теорема 6. *Нехай спектральна щільність* $f^0(\lambda)$ *належить класу* $\mathcal{D}_v^u$, $M(f^0) = \varnothing$ *і функції* $h_{mf}(f^0)$, $m \in M$, *обчислені за формулою* (5), *обмежені. Спектральна щільність* $f^0(\lambda) \in \mathcal{D}_v^u$ *буде найменш сприятливою в класі* $\mathcal{D}_v^u$ *для оптимального лінійного оцінювання функціоналу* $A'_N\xi$ *за даними спостережень поля* $\xi(k, x)$ *при* $k \in Z\setminus\{0, 1, \ldots, N\}$, $x \in S_n$, *якщо щільності* $f_m^0(\lambda)$, $m \in M$, *задовольняють рівняння*

$$f_m^0(\lambda) = \max\left\{v_m(\lambda), \min\left\{u_m(\lambda), \alpha_{1m}\sum_{l=1}^{h(m,n)}\left|C_{mN}^{0l}(\lambda)\right|\right\}\right\}$$

і визначають розв'язок екстремальної задачі (6). *Мінімаксна спектральна характеристика оптимальної оцінки функціоналу обчислюється за формулою* (5).

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: В 2-х т. – М.: Наука, 1974. – Т. 2. – 294 с.
2. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представления групп. – М.: Наука, 1991. – 576 с.
3. *Muller C.* Spherical harmonics // Lect. Notes Math. – 1966. – **17**. – 128 p.
4. *Моклячук М. П., Ядренко М. И.* Линейные статистические задачи для однородных по времени изотропных случайных полей на сфере. I // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1978. – Вып. 18. – С. 106–115.
5. *Моклячук М. П., Ядренко М. И.* Линейные статистические задачи для однородных по времени изотропных случайных полей на сфере. II // Там же. – 1978. – Вып. 19. – С. 111–120.
6. *Колмогоров А. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика. Сборник статей. – М.: Наука, 1986. – 534 с.
7. *Розанов Ю. А.* Стационарные случайные процессы. – М.: Наука, 1990. – 272 с.
8. *Kassam S. A., Poor V. H.* Robust techniques for signal processing: A survey // Proc. IEEE. – 1985. – **73**, № 3. – P. 433–481.
9. *Franke J.* On the robust prediction and interpolation of time series in the presence of correlated noise // J. Time Ser. Anal. – 1984. – **5**, № 4. – P. 227–244.
10. *Franke J.* Minimax-robust prediction of discrete time series ///Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. – 1985. – **68**, № 2. – S. 337–364.
11. *Моклячук М. П.* Минимаксная фильтрация линейных преобразований стационарных последователей // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 1. – С. 92–98.
12. *Моклячук М. П.* Стохастичні послідовності авторегресії та мінімаксна інтерполяція // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 1993. – Вып. 48. – С. 135–148.
13. *Моклячук М. П.* Мінімаксна фільтрація однорідних за часом ізотропних випадкових полів на сфері // Там же. – 1993. – Вип. 49. – С. 193–205.
14. *Moklyachuk M. P.* A problem of minimax smoothing for homogeneous isotropic on a sphere random fields // Random Operators and Stochastic Equations. – 1993. – № 2. – P. 191–201.
15. *Moklyachuk M. P.* Minimax-robust interpolation of discrete time series // Evolutionary Stochastic Systems in Physics and Biology / Eds. V. S. Korolyuk et al. – Moscow – Utrecht: TVP – VSP, 1993. – P. 336–347.
16. *Moklyachuk M. P.* Minimax-robust interpolation of stationary stochastic processes // Proceedings of the second Ukrainian – Hungarian conference on new trends in probability and statistics / Eds. M. Arato, M. I. Yadrenko. – Moscow – Utrecht – Kiev: TVP – VSP – TBiMC, 1994. – P. 183–193.
17. *Моклячук М. П.* Мінімаксна інтерполяція однорідних за часом ізотропних випадкових полів на сфері // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 1994. – Вып. 50. – С. 105–113.
18. *Моклячук М. П.* Екстраполяція однорідних за часом ізотропних на сфері випадкових полів // Там же. – Вип. 51. – С. 131–139.
19. *Пшеничный Б. Н.* Необходимые условия экстремума. – М.: Наука, 1982. – 144 с.

Получено 14.02.92