УДК 519.21

В. В. Булдыгин, д-р физ.-мат. наук (Киев. политехн. ин-т)

О СВОЙСТВАХ ЭМПИРИЧЕСКОЙ КОРРЕЛОГРАММЫ ГАУССОВСКОГО ПРОЦЕССА С ИНТЕГРИРУЕМОЙ В КВАДРАТЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

Properties of an empirical correlogram of a centered stationary Gaussian process are considered. We prove that, if the spectral density of the process is square integrable, there is a normalization effect for the correlogram and integral functionals on it.

Розглянуто властивості емпіричної корелограми центрованого гауссівського стаціонарного процесу. Доведено, що за умови інтегровності спектральної щільності процесу у квадраті для корелограми та інтегральних функціоналів від неї має місце ефект нормалізації.

1. Введение. Пусть $X(t)$, $t \ge 0$,— измеримый сепарабельный действительнозначный стационарный гауссовский процесс с нулевым средним и непрерывной корреляционной функцией $B(h) = EX(t)X(t+h)$, $h \ge 0$. Одной из задач статистики случайных процессов является оценка функции $B(h)$, $h \ge 0$, если вид ее неизвестен, по реализации процесса $X(t)$, $t \ge 0$.

Рассмотрим *эмпирическую коррелограмму*

$$\hat{B}_T(h) = \frac{1}{T}\int_0^T X(t)X(t+h)\,dt, \quad h \ge 0,$$

являющуюся несмещенной оценкой корреляционной функции $B(h)$. Асимптотические свойства оценки $\hat{B}_T(h)$ связаны с поведением процесса $Y_T(h) = \sqrt{T}(\hat{B}_T(h) - B(h))$, $h \ge 0$, при $T \to \infty$. В дальнейшем предполагаем, что у спектральной функции процесса X существует спектральная плотность $f(\lambda)$, $\lambda \in R = (-\infty, \infty)$ и $f \in L_2(R)$, т. е.

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda)\,d\lambda < \infty. \tag{1}$$

Напомним, что если спектральная плотность существует, то необходимо, чтобы f была абсолютно интегрируемой, $f \in L_1(R)$. Если выполнено условие (1), то для любых $h_1, h_2 \ge 0$

$$\lim_{T\to\infty} EY_T(h_1)Y_T(h_2) = b(h_1, h_2) = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} \cos\lambda h_1 \cos\lambda h_2 f^2(\lambda)\,d\lambda. \tag{2}$$

Пусть $Y(h)$, $h \ge 0$, — измеримый сепарабельный действительнозначный гауссовский случайный процесс с нулевым средним и корреляционной функцией $b(h_1, h_2)$, т. е. для всех $h_1, h_2 \ge 0$

$$EY(h_1)Y(h_2) = b(h_1, h_2). \tag{3}$$

В настоящей работе изучаются условия слабой сходимости интегральных функционалов процесса Y_T. При этом на спектральную плотность f налагается лишь условие (1).

В случае линейных интегральных функционалов для эмпирической периодограммы подобная задача исследовалась в работе И. А. Ибрагимова [1], а затем в более общей постановке в работе Р. Бенткуса [2]. Условия сходимости процессов Y_T и близких к ним процессов и полей в различных функциональных

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологии, проект 1.2/16.

пространствах изучались в работах А. В. Иванова [3], А. В. Иванова и Н. Н. Леоненко [4], А. А. Дыховичного [5], В. В. Булдыгина и В. В. Зайца [6], Ю. В. Козаченко и А. И. Стадник [7], В. В. Булдыгина и О. О. Демьяненко [8]. Асимптотическое поведение процесса $(\hat{B}_T(h) - B(h))$, $h \geq 0$, при замене условия (1) условием $f \in L_p(R)$, $1 < p < 2$, и введением нормировки, отличной от $\sqrt{T}$, изучалось в работе Н. Н. Леоненко и А. Ю. Портновой [9]. Используемый в ходе доказательства теоремы 1 метод, основанный на исследовании предельного поведения моментных функций и техники их вычислений, восходит к работе [2] и применялся в [5, 6].

2. Формулировка основных результатов.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (1). *Тогда для любых* $n \geq 1$; $h_1, \ldots$ $\ldots, h_n \geq 0$

$$\lim_{T \to \infty} \boldsymbol{E}\left[\prod_{j=1}^{n} Y_T(h_j)\right] = \boldsymbol{E}\left[\prod_{j=1}^{n} Y(h_j)\right]. \tag{4}$$

В частности, все конечномерные распределения процесса Y_T *сходятся при* $T \to \infty$ *к соответствующим конечномерным распределениям процесса* Y.

В дальнейшем знак $\Rightarrow$ означает слабую сходимость распределений или случайных величин и процессов.

Пусть $H > 0$, $p \geq 1$; $L_p[0, H]$ — пространство действительнозначных функций, определенных на $[0, H]$ и интегрируемых по Лебегу в p-й степени.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (1). *Тогда для любых* $H \geq 0$, $p \geq 1$:

1) $Y \in L_p[0, H]$ почти наверное;

2) $Y_T \in L_p[0, H]$ почти наверное, $T > 0$;

3) $Y_T \underset{T \to \infty}{\overset{L_p[0,H]}{\Rightarrow}} Y$.

Теорема 3. *Пусть* $(g(h, x),\ h \geq 0,\ x \in R)$ — *непрерывная функция и для всех* $h \geq 0$, $x \in R$

$$|g(h, x)| \leq c(h)\, e^{\gamma |x|},$$

где $0 < \gamma < (\sqrt{8\pi}\, \|f\|_2)^{-1}$, $(c(h),\ h \geq 0) \in L_1(0, \infty)$, *и для каждого* $H > 0$

$$\sup_{h \in [0, H]} c(h) < \infty.$$

Тогда

$$G(Y_T) \underset{T \to \infty}{\Rightarrow} G(Y),$$

где

$$G(y(\cdot)) = \int_0^\infty g(h, y(h))\, dh.$$

***Следствие* 1.** *Справедливы следующие соотношения:*

1) $$\int_0^\infty Y_T(h) c(h)\, dh \underset{T \to \infty}{\Rightarrow} \int_0^\infty Y(h)\, c(h)\, dh,$$

2) $$\int_0^\infty e^{\gamma |Y_T(h)|} c(h)\, dh \underset{T \to \infty}{\Rightarrow} \int_0^\infty e^{\gamma |Y(h)|} c(h)\, dh.$$

Замечания. 1. Требование ограниченности функции $c(h)$ на ограниченных интервалах можно ослабить, заменив его следующим условием. Для любого $H > 0$ найдется такое $q = q(H) > 1$, что $(c(h),\ h \in [0, H]) \in L_q[0, H]$. В частности, это условие будет выполнено, если найдется такое $q > 1$, что $(c(h),\ h \geq 0) \in L_q(0, \infty)$.

2. Пусть $g_k(h, x)$, $k = 1, \ldots, n$, — функции, удовлетворяющие условиям теоремы 3; $\bar{G}(y(\cdot)) = \{G_k(y(\cdot)),\ k = 1, \ldots, n\}$, где

$$G_k(y(\cdot)) = \int_0^\infty g_k(h, y(h))c(h)\,dh.$$

Тогда

$$\bar{G}(Y_T) \underset{T \to \infty}{\Rightarrow} \bar{G}(Y).$$

Это утверждение следует из теоремы 3, если положить

$$g(h, x) = \sum_{k=1}^n u_k g_k(h, x), \quad u_k \in R, \quad k = 1, \ldots, n.$$

3. Предварительные утверждения. В силу гауссовости и центрированности процессов X и Y, а также соотношений (2), (3) из формул Леонова – Ширяева [10] вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $n \geq 1$; $h_1, \ldots, h_n \geq 0$. *Тогда если* n *— нечетное натуральное число, то*

$$\mathbf{E}\left[\prod_{k=1}^n Y(h_k)\right] = 0, \tag{5}$$

и если n *— четное натуральное число, то*

$$\mathbf{E}\left[\prod_{k=1}^n Y(h_k)\right] = \sum_{\{k_1,k_2\},\ldots,\{k_{n-1},k_n\}} \prod_{\substack{j=1 \\ j\ \text{нечетное}}}^{n-1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \cos\lambda h_{k_j} \cos\lambda h_{k_{j+1}} f^2(\lambda)\,d\lambda\right], \tag{6}$$

где сумма берется по всем неупорядоченным разбиениям множества $\{1, 2, \ldots$ $\ldots, n\}$ *на непересекающиеся двухэлементные подмножества* $\{k_1, k_2\}, \ldots,$ $\{k_{n-1}, k_n\}$. *Кроме того, для любого* $n \geq 2$

$$\mathbf{E}\left[\prod_{k=1}^n Y_T(h_k)\right] = \sum_{D_1,\ldots,D_n} T^{-n/2} \int_0^T \ldots \int_0^T \left[\prod_{k=1}^n \operatorname{cov} D_k\right] dt_1 \ldots dt_n, \tag{7}$$

где сумма берется по всем неупорядоченным разбиениям таблицы

$$D = \begin{pmatrix} X(t_1) & X(t_1 + h_1) \\ \cdots & \cdots \\ X(t_n) & X(t_n + h_n) \end{pmatrix} \tag{8}$$

на непересекающиеся двухэлементные подмножества D_k, $k = 1, \ldots, n$, *которые не совпадают со строками таблицы* D: $\operatorname{cov} D_k = \mathbf{E}\xi\eta$, *если* $D_k = \{\xi, \eta\}$.

Следующие два утверждения связаны со свойствами многократных сверток с зацеплением.

Лемма 2. *Пусть* $m \geq 3$; $K_j \in L_2(R)$, $\varphi_j \in L_2(R)$, $j = 1, \ldots, m$. *Тогда для интеграла*

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{j=1}^{m-1} K_j(x_j - x_{j+1}) \right] K_m(x_m - x_1) \left[\prod_{j=1}^{m} \varphi_j(x_j) \right] dx_1 \ldots dx_m \tag{9}$$

справедливо неравенство

$$|I| \le \left[\prod_{j=1}^{m} \| K_j \|_2 \right] \left[\prod_{j=1}^{m} \| \varphi_j \|_2 \right]. \tag{10}$$

В случае $m = 2$ неравенство (10) вытекает из неравенства Коши – Буняковского и известного неравенства для сверток

$$\| u * v \|_2 \le \| u \|_1 \| v \|_2 \tag{11}$$

(см., например, [11, с. 72]). При $m \ge 3$ требуются дополнительные рассуждения. Метод доказательства леммы 2 предложен А. А. Дыховичным.

Лемма 3. *Пусть функции $K_j = K_j(\alpha)$, $j = 1, \ldots, m$, фигурирующие в лемме 2, зависят от некоторого параметра α, $\alpha \in (0, +\infty)$. Пусть также $L \subset \subset L_2(R)$ и L всюду плотно в $L_2(R)$. Если*

$$\sup_{\alpha} \prod_{j=1}^{m} \| K_j(\alpha) \|_2 < \infty \tag{12}$$

и для всех $\varphi_j \in L$, $j = 1, \ldots, n$,

$$\lim_{\alpha \to \infty} I_\alpha = 0, \tag{13}$$

то соотношение (13) *выполнено для всех $\varphi_j \in L_2(R)$, $j = 1, \ldots, m$.*

Доказательство *леммы* 2. Лемму 2 достаточно доказать для неотрицательных функций K_j, φ_j, $j = 1, \ldots, m$. В общем случае нужно заменить K_j на $| K_j |$ и φ_j на $| \varphi_j |$.

Рассмотрим повторный интеграл

$$\tilde{I} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(x_m) \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{m-1}(x_{m-1} - x_m) \varphi_{m-1}(x_{m-1}) \times \right.$$

$$\left. \times \left[\ldots \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_1(x_1 - x_2) K_m(x_m - x_1) \varphi_1(x_1)\, dx_1 \right] \ldots \right] dx_{m-1} \right] dx_m.$$

Положим

$$F_2(y, x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_m(y - z) K_1(z - x) \varphi_1(z)\, dz,$$

$$F_p(y, x) \doteq \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_{p-1}(y, z) K_{p-1}(z - x) \varphi_{p-1}(z)\, dz, \quad p \ge 3.$$

Тогда

$$\tilde{I} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(y) \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{m-1}(z - y) F_{m-1}(y, z) \varphi_{m-1}(z)\, dz \right] dy. \tag{14}$$

Так как $K_j \in L_2(R)$, то определены свертки $K_p^2 * \ldots * K_1^2 * K_m^2$, которые принадлежат пространству $L_1(R)$. Вместе с этим определены функции

$$Q_2(u) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} K_m^2(u-v)K_1^2(v)\,dv\right]^{1/2},$$

$$Q_p(u) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} Q_{p-1}^2(u-v)K_{p-1}^2(v)\,dv\right]^{1/2}, \quad p \geq 3.$$

Ясно, что $Q_p \in L_2(R)$, $p \geq 2$, и

$$\| Q_p \|_2 = \left[\prod_{j=1}^{p-1} \| K_j \|_2\right] \| K_m \|_2. \tag{15}$$

Индукцией по $p \geq 2$ с использованием неравенства Коши – Буняковского легко показать, что для всех $p \geq 2$ и всех $x, y \in R$ выполняется неравенство $F_p(y, x) \leq a_p Q_p(y-x)$, где

$$a_p = \prod_{j=1}^{p-1} \| \varphi_j \|_2.$$

Подставляя это неравенство в соотношение (13) и применяя неравенство Коши – Буняковского, получаем

$$| \bar{I} | = \bar{I} \leq a_{m-1} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(y)\left[\int_{-\infty}^{\infty} K_{m-1}(z-y)Q_{m-1}(y-z)\varphi_{m-1}(z)\,dz\right]dy \leq$$

$$\leq a_{m-1} \| \varphi_m \|_2 \| \overline{K}_{m-1} Q_{m-1} * \varphi_{m-1} \|_2, \tag{16}$$

где $\overline{K}_{m-1}(x) = K_{m-1}(-x)$, $x \in R$. Так как $\overline{K}_{m-1}$, $Q_{m-1} \in L_2(R)$, то $\overline{K}_{m-1} \times \times Q_{m-1} \in L_1(R)$ и в силу неравенства (11)

$$\| \overline{K}_{m-1} Q_{m-1} * \varphi_{m-1} \|_2 \leq \| \varphi_{m-1} \|_2 \| K_{m-1} Q_{m-1} \|_1 \leq$$

$$\leq \| \varphi_{m-1} \|_2 \| \overline{K}_{m-1} \|_2 \| Q_{m-1} \|_2 = \| \varphi_{m-1} \|_2 \| K_{m-1} \|_2 \| Q_{m-1} \|_2. \tag{17}$$

Из соотношений (15) – (17) и теоремы Фубини – Тонелли вытекает неравенство (10). Лемма 2 доказана.

Доказательство *леммы* 3. Для удобства запишем интеграл (9) в виде

$$I_\alpha = I_\alpha(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} K_{1,\ldots,m}(x_1, \ldots, x_m)\varphi_1(x_1) \ldots \varphi_m(x_m)\,dx_1 \ldots dx_m,$$

где

$$K_{1,\ldots,m}(x_1, \ldots, x_m) = \left[\prod_{j=1}^{m-1} K_j(x_j - x_{j+1})\right] K_m(x_m - x_1).$$

Если $g_j \in L$, $j = 1, \ldots, m$, то, полагая $\Delta_j = \varphi_j - g_j$, $j = 1, \ldots, m$, представим интеграл I_α в виде

$$I_\alpha(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) = \sum_{\substack{\{j_1, \ldots, j_k\} \\ k=0, \ldots, m}} I_\alpha(g_{j_1}, \ldots, g_{j_k}; \Delta_{p_1}, \ldots, \Delta_{p_{m-k}}),$$

где $\{p_1, \ldots, p_{m-k}\} = \{1, \ldots, m\} \setminus \{j_1, \ldots, j_k\}$, а сумма берется по всем неупорядоченным конечным подмножествам $\{j_1, \ldots, j_k\}$ множества $\{1, \ldots, m\}$; $\{j_0\} = \varnothing$, $\sum_\varnothing = 0$. Выделяя слагаемое $I_\alpha(g_1, \ldots, g_m)$, получаем

$$|I_\alpha| \le |I_\alpha(g_1, \ldots, g_m)| + \sum_{\substack{\{j_1, \ldots, j_k\} \\ k=0,1,\ldots,m-1}} |I_\alpha(g_{j_1}, \ldots, g_{j_k}; \Delta_{p_1}, \ldots, \Delta_{p_m})|.$$

Применяя к слагаемым под знаком суммы неравенство (10), имеем

$$|I_\alpha| \le |I_\alpha(g_1, \ldots, g_m)| + \left[\sup_\alpha \prod_{j=1}^m \|K_j(\alpha)\|_2\right]\left[a \sum_{k=1}^m C_m^k a^{k-1} b^{m-k}\right],$$

где

$$a = \max_{j=1,\ldots,m} \|\Delta_j\|_2, \quad b = \max_{j=1,\ldots,m} \|g_j\|_2,$$

C_m^k — число сочетаний из m по k. Так как

$$\max_j \|g_j\|_2 \le \max_j \|\varphi_j\|_2 + \max_j \|\Delta_j\|_2,$$

то при $a \in (0, 1)$

$$|I_\alpha(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)| \le |I_\alpha(g_1, \ldots, g_m)| + \beta a, \tag{18}$$

где

$$\beta = \left[\sup_\alpha \prod_{j=1}^m \|K_j(\alpha)\|_2\right]\left(2 + \max_{j=1,\ldots,m} \|\varphi_j\|_2\right)^m.$$

Величина β не зависит от параметра α и согласно условию (12) $\beta < \infty$. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как L плотно в $L_2(R)$, то можно подобрать такие функции $g_j = g_j(\varepsilon) \in L$, $j = 1, \ldots, m$, что $a < \min\{1, \varepsilon/\beta\}$. Так как по условию леммы

$$\lim_{\alpha\to\infty} I_\alpha(g_1, \ldots, g_m) = 0,$$

то из неравенства (18) вытекает

$$\overline{\lim_{\alpha\to\infty}} |I_\alpha(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)| < \varepsilon.$$

В силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\alpha\to\infty} I_\alpha(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) = 0.$$

Лемма 3 доказана.

***Замечание* 3.** Утверждение лемм 2, 3 справедливо и в многомерном случае, т. е. при $x_j \in R^d$, $j = 1, \ldots, m$; $d \ge 1$. При этом $K_j, \varphi_j \in L_2(R^d)$, $j = 1, \ldots, m$.

Лемма 4. *Пусть* η, $\eta_\alpha^{(1)}$, $\eta_\alpha^{(2)}$, ζ_β, $\zeta_{\beta,\alpha}^{(1)}$, $\zeta_{\beta,\alpha}^{(2)}$, $\alpha \in (0, \infty)$, $\beta \in (0, \infty)$, *— случайные величины. Если:*

1) *для любого* $\alpha > 0$ $\eta = \eta_\alpha^{(1)} + \eta_\alpha^{(2)}$;

2) *для любых* $\alpha > 0$, $\beta > 0$ $\zeta_\beta = \zeta_{\beta,\alpha}^{(1)} + \zeta_{\beta,\alpha}^{(2)}$;

3) *для любого* $\delta > 0$

$$\lim_{\alpha\to\infty} \boldsymbol{P}\{|\eta_\alpha^{(2)}| \ge \delta\} = 0;$$

4) *для любого* $\delta > 0$

$$\lim_{\alpha\to\infty}\sup_{\beta>0} \boldsymbol{P}\{|\zeta^{(2)}_{\beta,\alpha}|\geq\delta\} = 0;$$

5) *для любого* $\alpha > 0$ $\zeta^{(1)}_{\beta,\alpha} \underset{\beta\to\infty}{\Rightarrow} \eta^{(1)}_{\alpha}$;

то $\zeta_\beta \underset{\beta\to\infty}{\Rightarrow} \eta$.

***Доказательство** леммы* 4 вытекает с помощью стандартных рассуждений из неравенств

$$\Delta F_\eta(x+2\delta, x) - |\Delta^{(1)}_{\alpha,\beta}(x+\delta)| - \boldsymbol{P}\{|\eta^{(2)}_{\alpha}|\geq\delta\} - \boldsymbol{P}\{|\zeta^{(2)}_{\beta,\alpha}|\geq\delta\} \leq$$

$$\leq \Delta_\beta(x) \leq \Delta F_\eta(x-2\delta, x) + |\Delta^{(1)}_{\alpha,\beta}(x-\delta)| +$$

$$+ \boldsymbol{P}\{|\eta^{(2)}_{\alpha}|\geq\delta\} + \boldsymbol{P}\{|\zeta^{(2)}_{\beta,\alpha}|\geq\delta\},$$

справедливых для любых $x\in R$, $\alpha>0$, $\beta>0$, $\delta>0$, где

$$\Delta F_\eta(x, y) = \boldsymbol{P}\{\eta<y\} - \boldsymbol{P}\{\eta<x\},$$

$$\Delta^{(1)}_{\alpha,\beta}(x) = \boldsymbol{P}\{\eta^{(1)}_{\alpha}<x\} - \boldsymbol{P}\{\zeta^{(1)}_{\beta,\alpha}<x\},$$

$$\Delta_\beta(x) = \boldsymbol{P}\{\eta<x\} - \boldsymbol{P}\{\zeta_\beta<x\}.$$

Заметим, что утверждение леммы 4 можно получить из более общего утверждения [12, с. 411].

4. Доказательства теорем.

***Доказательство** теоремы* 1. Вначале следуем стандартным рассуждениям [2, 5, 6]. Поскольку процессы Y_T и Y имеют нулевое среднее и выполнено соотношение (2), то равенство (4) справедливо при $n=1, 2$. В дальнейшем полагаем $n\geq 3$. Следуя принятой терминологии, скажем, что элементы D_{j_1}, D_{j_2} разбиения таблицы D (8) образуют простой блок, если их объединение совпадает с двумя какими-либо строками таблицы D. Соответственно разбиение $D_1, \ldots, D_n$ таблицы D называется простым, если его элементы можно разбить по парам, образующим простые блоки. Ясно, что простое разбиение может иметь место лишь для четных n. Разбиение $D_1, \ldots, D_n$ таблицы D, не являющееся простым, будем называть сложным.

Представим сумму в правой части равенства (7) в виде суммы $\sum' = \sum'_T(h_1, \ldots, h_n)$ по простым разбиениям и суммы $\sum'' = \sum''_T(h_1, \ldots, h_n)$ по сложным разбиениям. Покажем, что для любого $n\geq 3$

$$\sum{}' \xrightarrow[T\to\infty]{} E\left[\prod_{k=1}^{n} Y(h_k)\right], \tag{19}$$

$$\sum{}'' \xrightarrow[T\to\infty]{} 0. \tag{20}$$

Поскольку для нечетных n разбиение таблицы D может быть лишь сложным, а из соотношений (5), (20) вытекает (4), то из соотношений (19), (20) следует утверждение теоремы.

Докажем соотношение (19), число n при этом четное. Заметим, что если пара D_{k_1}, D_{k_2} элементов разбиения таблицы D образует простой блок, то найдутся такие $j, p\in\{1, \ldots, n\}$, $j\neq p$, что либо

$$D_{k_1} = \{X(t_j), X(t_p)\}, \quad D_{k_2} = \{X(t_j+h_j), X(t_p+h_p)\},$$

либо

$$D_{k_1} = \{X(t_j), X(t_p+h_p)\}, \quad D_{k_2} = \{X(t_j+h_j), X(t_p)\}.$$

Для удобства элементы первого типа обозначим через $\overline{D}_{k_1}$, $\overline{D}_{k_2}$, а элементы разбиения второго типа обозначим через $D^*_{k_1}$, $D^*_{k_2}$. Ясно, что

$$\sum{}' = \sum_{\{k_1,k_2\}\ldots\{k_{n-1},k_n\}} T^{-n/2}\int_0^T \ldots \int_0^T \prod_{\substack{j=1 \\ j\ \text{нечетное}}}^{n-1} [\operatorname{cov}\overline{D}_{k_j}\operatorname{cov}\overline{D}_{k_{j+1}} +$$

$$+ \operatorname{cov}D^*_{k_j}\operatorname{cov}D^*_{k_{j+1}}]\,dt_1\ldots dt_n,$$

где сумма берется по всем неупорядоченным разбиениям множества $\{1, \ldots, n\}$ на непересекающиеся двухэлементные подмножества. Простые выкладки показывают, что

$$\sum{}' = \sum_{\{k_1,k_2\}\ldots\{k_{n-1},k_n\}} \prod_{\substack{j=1 \\ j\ \text{нечетное}}}^{n-1} \Lambda_T(h_{k_j}, h_{k_{j+1}}), \tag{21}$$

где

$$\Lambda_T(h_{k_j}, h_{k_{j+1}}) = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_T(\lambda_2-\lambda_1)[\exp\{i(\lambda_1 h_{k_{j+1}} + \lambda_2 h_{k_j})+$$

$$+\exp\{i\lambda_2(h_{k_j}-h_{k_{j+1}})\}]f(\lambda_1)f(\lambda_2)\,d\lambda_1\,d\lambda_2, \tag{22}$$

$$\Phi_T(x) = \frac{1}{2\pi T}\left(\frac{\sin(xT/2)}{x/2}\right)^2$$

— ядро Фейера. Так как $f\in L_1(R)\cap L_2(R)$, то в силу свойства ядра Фейера

$$\lim_{T\to\infty}\Lambda_T(h_{k_j}, h_{k_{j+1}}) = 4\pi\int_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda h_{k_j}\cos\lambda h_{k_{j+1}} f^2(\lambda)\,d\lambda. \tag{23}$$

Отсюда и из соотношений (6), (21) вытекает соотношение (19). Переходя к доказательству соотношения (20), заметим, что сумму $\sum''$ можно представить в виде

$$\sum{}'' = \sum\left[\prod_{j=1}^{d} I_T^{(m_j)}\right]\left[\prod_{p=0}^{l}\Lambda_T^{(p)}\right], \tag{24}$$

где сумма в правой части содержит конечное число слагаемых, число которых зависит лишь от n; $\Lambda_T^{(p)}$ при $p\geq 1$ имеет вид $\Lambda_T(h_{k_j}, h_{k_{j+1}})$, а $\Lambda_T^{(0)}\equiv 1$; $d\geq 1$; $m_j\geq 3$, $j=1,\ldots,d$, и $m_1+\ldots+m_d+2l=n$. При этом

$$I_T^{(m_j)} = I_T^{(m_j)}(h_{\nu_j}, h_{\nu_{j+1}}, \ldots, h_{\nu_j+m_j-1}) =$$

$$= T^{-m_j/2}\int_0^T\ldots\int_0^T[\operatorname{cov}D_{\nu_j}\ldots\operatorname{cov}D_{\nu_j+m_j-1}]\,dt_{\nu_j}\ldots dt_{\nu_j+m_j-1},$$

а элементы $D_{\nu_j} \dots D_{\nu_{j+m_j-1}}$ образуют неразложимый блок, т. е. их объединение содержит m_j различных строк таблицы D, и никакое подмножество этих элементов в объединении не образует множества, состоящего из какого-либо числа строк этой таблицы.

В силу соотношения (23) для доказательства соотношения (20) достаточно показать, что

$$\lim_{T\to\infty} I_T^{(m_j)} = 0.$$

Для простоты обозначений пусть $m_j = m \ge 3$; $\nu_j = 1, \dots, \nu_{j+m-1} = m$. Тогда

$$I_T^{(m)} = I_T = T^{-m/2}\int_0^T \dots \int_0^T \prod_{j=1}^{m} [\operatorname{cov} D_j]\, dt_1 \dots dt_m =$$

$$= T^{-m/2}\int_0^T \dots \int_0^T \left[\prod_{j=1}^{m-1} B(t_j - t_{j+1} + \alpha_j)\right] B(t_m - t_1)\, dt_1 \dots dt_m,$$

где α_j равно 0 или $\pm h_j$, или $(h_{j+1} - h_j)$ в зависимости от конкретной структуры неразложимого блока $\{D_1, \dots, D_m\}$. В результате простых преобразований получаем

$$I_T = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{j=1}^{m-1} U_T(\lambda_j - \lambda_{j+1})\right] U_T(\lambda_m - \lambda_1) \times$$

$$\times \exp\left\{i\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \lambda_j\right\} \prod_{j=1}^{m} f(\lambda_j)\, d\lambda_1 \dots d\lambda_m,$$

где

$$U_T(x) = \frac{\sin(xT/2)}{x\sqrt{T/2}}.$$

После соответствующей замены переменных интеграл I_T можно представить в виде

$$I_T = T^{1-m/2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_m) e^{i\beta_m x_m} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{j=1}^{m-1} f(x_j + \dots + x_m)\right] \exp\left\{i\sum_{j=1}^{m-1} \beta_j x_j\right\} \Psi_T(x_1, \dots, x_{m-1}),$$

где β_j, $j = 1, \dots, m$, — некоторые линейные комбинации чисел $h_1, \dots, h_m$;

$$\Psi_T(x_1, \dots, x_{m-1}) = T^{m/2-1}\left[\prod_{j=1}^{m-2} U_T(x_j)\right] U_T(x_1 + \dots + x_{m-1})$$

— ядро, введенное Р. Бенткусом в [2], где показано, что

$$A_m = \sup_{T>0} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_T(x_1, \dots, x_{m-1})|\, dx_1 \dots dx_{m-1} < \infty. \tag{25}$$

Наряду с интегралом I_T рассмотрим интеграл

$$S_T(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{j=1}^{m-1} \left| U_T(\lambda_j - \lambda_{j+1}) \right| \right] \left| U_T(\lambda_m - \lambda_1) \right| \times$$

$$\times \left[\prod_{j=1}^{m} \varphi_j(\lambda_j) \right] d\lambda_1 \ldots d\lambda_m = T^{1-m/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(x_m) \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{j=1}^{m-1} \varphi_j(x_j + \ldots + x_m) | \psi_T(x_1, \ldots, x_{m-1}) | dx_1 \ldots dx_{m-1} \right] dx_m.$$

Этот интеграл определен для $\varphi_j \in L_p(R)$, $j = 1, \ldots, m$, $p \geq 1$. Заметим также, что

$$\sup_{h_1, \ldots, h_m} |I_T| \leq S_T(f, \ldots, f). \tag{26}$$

Пусть $L = L_1(R) \cap L_\infty(R)$, где $L_\infty(R)$ — пространство ограниченных функций, $\| \varphi \|_\infty = \sup\limits_{x \in R} | \varphi(x) |$. Для всех $\varphi_j \in L$, $j = 1, \ldots, m$,

$$| S_T(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) | \leq A_m B_m T^{1-m/2} \leq \frac{A_m B_m}{\sqrt{T}},$$

где

$$B_m = \left(\prod_{j=1}^{m-1} \| \varphi_j \|_\infty \right) \| \varphi_m \|_1 < \infty.$$

В силу соотношения (25) для всех $\varphi_j \in L$, $j = 1, \ldots, m$,

$$\lim_{T \to \infty} S_T(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) = 0. \tag{27}$$

Кроме того,

$$\sup_{T > 0} \| U_T(x) \|_2^m = (2\pi)^{m/2}. \tag{28}$$

Поскольку пространство L всюду плотно в $L_2(R)$, то в силу соотношений (27), (28) из леммы 3 вытекает, что соотношение (27) справедливо для всех $\varphi_j \in L_2(R)$, $j = 1, \ldots, m$. Так как по условию (1) $f \in L_2(R)$, то осталось положить $\varphi_j = f$, $j = 1, \ldots, m$, и воспользоваться неравенством (26). Соотношение (20), а вместе с тем и теорема 1 доказаны.

Доказательство *теоремы* 2. Для доказательства утверждения 1 достаточно показать, что для любого $H > 0$ и любого натурального числа m

$$\boldsymbol{E} \int\limits_0^H | Y(h) |^{2m} dh < \infty. \tag{29}$$

В силу теоремы Фубини – Тонелли и равенства (2)

$$\boldsymbol{E} \int\limits_0^H | Y(h) |^{2m} dh = \int\limits_0^H \boldsymbol{E} | Y(h) |^{2m} dh = [(2m-1)!!] \int\limits_0^H (\boldsymbol{E} | Y(h) |^2)^m dh \leq$$

$$\leq H [(2m-1)!!] \left[\sup_{h \geq 0} b(h, h) \right]^m \leq H [(2m-1)!!] \left[4\pi \| f \|_2^2 \right]^m < \infty.$$

Повторяя аналогичные выкладки, легко показать, что выполняется утверждение 2. Следует отметить [4, с. 164], что в действительности для любого $T > 0$ процесс $Y_T(h)$, $h \in [0, H]$, выборочно непрерывен почти наверное.

Согласно работе Л. Гринблата [13] для доказательства утверждения 3 достаточно проверить выполнение следующих условий.

A_1) Все конечномерные распределения процесса Y_T сходятся к соответствующим конечномерным распределениям процесса Y.

A_2) Для любого $h \geq 0$ и любого натурального числа m

$$\boldsymbol{E}\,|Y_T(h)|^{2m} \xrightarrow[T\to\infty]{} \boldsymbol{E}\,|Y(h)|^{2m}.$$

A_3) Для любого натурального числа m

$$\sup_{T>0}\sup_{h\geq 0}\boldsymbol{E}\,|Y_T(h)|^{2m} < \infty.$$

Справедливость условий A_1, A_2 вытекает из теоремы 1. Для доказательства A_3 достаточно показать, что для любого натурального числа m

$$\sup_{T>0}\ \sup_{h_1,\ldots,h_m}\left|\sum{}'\right| < \infty, \tag{30}$$

$$\sup_{T>0}\ \sup_{h_1,\ldots,h_m}\left|\sum{}''\right| < \infty. \tag{31}$$

В силу равенств (21), (22) соотношение (30) вытекает из того, что

$$\sup_{T>0}\ \sup_{h_1,h_2}|\Lambda(h_1,h_2)| \leq 4\pi\sup_{T>0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_T(\lambda_2-\lambda_1)f(\lambda_1)f(\lambda_2)\,d\lambda_1\,d\lambda_2 \leq$$

$$\leq 4\pi\sup_{T>0}\|\Phi_T\|_1\|f\|_2^2 = 4\pi\|f\|_2^2 < \infty.$$

В свою очередь, согласно равенству (24) и последнему соотношению для доказательства (31) достаточно показать, что

$$\sup_{T>0}\ \sup_{h_1,\ldots,h_m}\left|I_T^{(m)}\right| < \infty.$$

В силу неравенств (10), (26)

$$\sup_{T>0}\ \sup_{h_1,\ldots,h_m}\left|I_T^{(m)}\right| \leq \left[\sup_{T>0}\|U_T\|_2\right]^m\|f_2\|^m = \left(2\sqrt{\pi}\,\|f_2\|\right)^m < \infty.$$

Теорема 2 доказана.

Доказательство *теоремы* 3. Пусть $H \geq 0$,

$$G_H(y(\cdot)) = \int_0^H g(h, y(h))\,dh.$$

Покажем, что

$$G_H(Y_T) \underset{T\to\infty}{\Rightarrow} G_H(Y). \tag{32}$$

Пусть $s \geq 0$. Положим $g_s(h,x) = g(h,x)\hat{I}_s(x)$, где $\hat{I}_s(x) = 1$, если $|x| < s$; $2 - |x|/s$, если $s \leq |x| < 2s$; 0, если $|x| \geq 2s$. По условию теоремы

$$\sup_{h\in[0,H]}|g_s(h,x)| \leq \left[\sup_{h\in[0,H]}c(h)\right]e^{2\beta s} < \infty,$$

Следовательно (см., например, [14]), функционал

$$G_{H,s}^{(1)}(y(\cdot)) = \int_0^H g_s(h, y(h))\,dh$$

является $L_1[0, H]$-непрерывным функционалом. Поэтому согласно теореме 1

$$G_{H,s}^{(1)}(Y_T) \underset{T\to\infty}{\Rightarrow} G_{H,s}^{(1)}(Y). \tag{33}$$

Далее, пусть

$$\overline{g}_s(h,x) = g_s(h,x)\left(1-\hat{I}_s(x)\right)$$

и

$$G_{H,s}^{(2)}(y(\cdot)) = \int_0^H \overline{g}_s(h, y(h))\,dh.$$

Тогда

$$|\, G_{H,s}^{(2)}(y(\cdot))\,| \le \int_0^H |\,\overline{g}_s(h, y(h))\,|\,dh \le c_H \int_0^H I_{\{h:\,|y(h)|>s\}}(h) e^{\gamma|y(h)|}\,dh \le$$

$$\le c_H\Big[\operatorname{mes}\big\{h:\,|y(h)|>s\big\}\Big]^{1/q}\left[\int_0^H e^{p\gamma|y(h)|}dh\right]^{1/p} \le c_H\left[\int_0^H e^{\rho|y(h)|}\,dh\right]e^{-\rho_1 s}, \tag{34}$$

где

$$c_H = \sup_{0\le h\le H} c(h) < \infty; \quad \rho = \gamma p, \quad \rho_1 = \rho q^{-1};$$

число $p \ge 1$ такое, что $\rho < \left(\sqrt{8\pi}\,\|f\|_2\right)^{-1}$; $1/p + 1/q = 1$; mes — мера Лебега. Здесь мы воспользовались неравенством Гельдера и тем, что

$$\operatorname{mes}\big\{h:|y(h)|>s\big\} \le e^{-\rho s}\int_0^H e^{\rho|y(h)|}\,dh.$$

Так как (см. (2), (3))

$$\sup_{h\ge 0} \boldsymbol{E}\,|Y(h)|^2 = \sup_{h\ge 0} b(h,h) \le 4\pi\|f\|_2^2 < \infty,$$

то

$$\sup_{h\ge 0} \boldsymbol{E}\exp\{\rho\,|Y(h)|\} \le 2\exp\{2\pi\rho^2\|f\|_2^2\} \le 2e^{1/4}.$$

Поэтому в силу неравенства (34)

$$\boldsymbol{E}\,|\,G_{H,s}^{(2)}(Y)\,| \le c_H e^{-\rho_1 s}\int_0^H \boldsymbol{E} e^{\rho|Y(h)|}\,dh \le K_1 e^{-\rho_1 s},$$

где $K_1 = 2e^{1/4}c_H H$. Следовательно,

$$\lim_{s\to\infty} \boldsymbol{E}\,|\,G_{H,s}^{(2)}(Y)\,| = 0$$

и для любого $\delta > 0$

$$\lim_{s\to\infty} \boldsymbol{P}\{|\, G_{H,s}^{(2)}(Y)\,| > \delta\} = 0. \tag{35}$$

Далее согласно [7]

$$\boldsymbol{E}e^{\rho|Y_T(h)|} \le \frac{2e^{1/6}}{\sqrt{1-2\rho^2\boldsymbol{E}|Y_T(h)|^2}}.$$

Так как $\boldsymbol{E}|Y_T(h)|^2 = \Lambda_T(h,h)$, то (см. доказательство теоремы 2)

$$\sup_{T>0}\sup_{h\ge 0}\boldsymbol{E}|Y_T(h)|^2 \le 4\pi\|f\|_2^2.$$

Следовательно,

$$\sup_{T>0}\sup_{h\ge 0}\boldsymbol{E}e^{\rho|Y_T(h)|} \le \frac{2e^{1/6}}{\sqrt{1-8\pi\rho^2\|f\|_2^2}}.$$

Отсюда в силу неравенства (34)

$$\sup_{T>0}\boldsymbol{E}|\,G_{H,s}^{(2)}(Y_T)\,| \le c_H e^{-\rho_1 s}\int_0^H [\sup_{T>0}\sup_{h\ge 0}\boldsymbol{E}e^{\rho|Y_T(h)|}dh] \le K_2 e^{-\rho_1 s},$$

где

$$K_2 = \frac{2e^{1/6}c_H H}{\sqrt{1-8\pi\rho^2\|f\|_2^2}} < \infty.$$

Поэтому

$$\lim_{s\to\infty}\sup_{T>0}\boldsymbol{E}|\,G_{H,s}^{(2)}(Y_T)\,| = 0$$

и для любого $\delta > 0$

$$\lim_{s\to\infty}\sup_{T>0}\boldsymbol{P}|\,G_{H,s}^{(2)}(Y_T) > \delta\,| = 0. \tag{36}$$

Из соотношений (33), (35), (36) и леммы 4 вытекает соотношение (32).

Далее, пусть

$$G_H^{(2)}(y(\cdot)) = \int_H^\infty g(h, y(h))\,dh.$$

Так как

$$\boldsymbol{E}\int_H^\infty |\,g(h,Y(h))\,|\,dh \le \left[\sup_{h\ge 0}e^{\gamma|Y(h)|}\right]\int_H^\infty c(h)\,dh \le 2e^{1/4}\int_H^\infty c(h)\,dh$$

и

$$\boldsymbol{E}\sup_{T>0}\int_H^\infty |\,g(h,Y_T(h))\,|\,dh \le \left[\sup_{T>0}\sup_{h\ge 0}e^{\gamma|Y_T(h)|}\right]\int_H^\infty c(h)\,dh \le$$

$$\le \frac{2e^{1/6}}{\sqrt{1-8\pi\gamma^2\|f\|_2^2}}\int_H^\infty c(h)\,dh,$$

то

$$\lim_{H\to\infty} E\,|\,G_H^{(2)}(Y)\,| = 0,$$

$$\lim_{H\to\infty} \sup_{T>0} E\,|\,G_H^{(2)}(Y_T)\,| = 0.$$

Поэтому для любого $\delta > 0$

$$\lim_{H\to\infty} P\{\,|\,G_H^{(2)}(Y)\,| > \delta\,\} = 0, \tag{37}$$

$$\lim_{H\to\infty} \sup_{T>0} P\{\,|\,G_H^{(2)}(Y_T)\,| > \delta\,\} = 0. \tag{38}$$

Из леммы 4 и соотношений (32), (37), (38) вытекает утверждение теоремы.

1. *Ибрагимов И. А.* Об оценке спектральной функции стационарного гауссовского процесса // Теория вероятностей и ее применения. – 1963. – **8**, № 4. – С. 391–430.
2. *Бенткус Р.* Об асимптотической нормальности оценки спектральной функции // Лит. мат. сб. – 1972. – **12**, № 3. – С. 3–17.
3. *Иванов А. В.* Одна предельная теорема для оценки корреляционной функции // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1978. – Вып. 19 – С. 76–81.
4. *Иванов А. В., Леоненко Н. Н.* Статистический анализ случайных полей. – Киев: Вища шк., 1986. – 216 с.
5. *Дыховичный А. А.* Об оценке корреляционной функции однородного и изотропного гауссовского поля // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1983. – Вып. 29 – С. 37–40.
6. *Buldygin V. V., Zayats V. V.* Asymptotic normality of an estimate of the correlation in different functional spaces // Probability theory and Math. Statist. – Singapore: World Scientific, 1992. – P. 19–31.
7. *Козаченко Ю. В., Стадник А. И.* Предгауссовские процессы и скорость сходимости в $C(T)$ оценок ковариационных функций // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1991. – Вып. 45. – С. 54–62.
8. *Булдигін В. В., Дем'яненко О. О.* Асимптотична нормальність оцінки сумісної кореляційної функції в функціональних просторах // Допов. АН України. Математика, природознавство, техн. науки. – 1993. – № 3. – С. 32–36.
9. *Леоненко М. М., Портнова А. Ю.* Збіжність корелограми гауссівського поля до негауссівського // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 1993. – Вип. 49. – С. 137–144.
10. *Леонов В. П., Ширяев А. Н.* К технике вычисления семиинвариантов // Теория вероятностей и ее применения. – 1959. – **4**, № 3. – С. 342–355.
11. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении: В 2-х т. – М.: Мир, 1985. – Т. 1. – 260 с.
12. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 351 с.
13. *Grinblat L. Š.* A limit theorem for measurable random processes and its applications // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – **61**, № 2. – P. 371–376.
14. *Боровков А. А., Печерский Е. А.* Сходимость распределений интегральных функционалов // Сиб. мат. журн. – 1975. – **16**, № 5. – С. 899–915.

Получено 21.01.94