УДК 519.22

Р. Е. Майборода, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

ОЦЕНКИ ИНТЕНСИВНОГО ШУМА ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Nonparametric estimates for a noise intensity $g(t)$ are considered. The estimates are constructed for the data $x(t)$ defined by the equation

$$dx(t) = f(x(t), t)\,dt + g(t)\,dw(t).$$

The validity of the estimates is proved.

Запропоновано непараметричні оцінки для інтенсивного шуму $g(t)$, побудовані по даних $x(t)$, визначених рівнянням

$$dx(t) = f(x(t), t)\,dt + g(t)\,dw(t).$$

Доведено обгрунтованість цих оцінок.

Пусть имеется выборочно непрерывный случайный процесс $x(t)$, для которого выполнено следующее стохастическое уравнение:

$$dx(t) = f(x(t), t)\,dt + g(t)\,dw(t), \tag{1}$$

где f и $g > 0$ — некоторые (неизвестные) функции, w — стандартный винеровский процесс. Процесс $x(t)$ наблюдается в моменты времени $t_j = t_j^N = j/N$, $j = \overline{0, N}$. Требуется построить оценку для g по наблюдениям. Такие задачи возникают, когда флуктуации некоторой физической величины измеряются запаздывающим прибором. В этом случае $f(x, t)$ представляет собой инерционную характеристику прибора, а g — интенсивность измеряемых флуктуаций. Мы будем рассматривать оценку g^2, предполагая, что $g \in \mathcal{G}$, где $\mathcal{G}$ — некоторый известный класс функций. Важным примером таких задач является оценка момента разладки случайного процесса, для которой

$$g(t) = \begin{cases} g_1, & \text{если } t \le \theta, \\ g_2, & \text{если } t > \theta. \end{cases}$$

Параметр $\theta \in (0, 1)$ (момент разладки) необходимо оценить. Для общепринятых оценок [1] требуется наблюдение $x(t)$ на временном интервале, длина которого стремится к бесконечности. В [2] рассматривается оценка момента разладки, построенная по наблюдениям при $t \in [0, 1]$ для $f(x, t) = \alpha x$. В данной работе рассмотрим (1) с f и g такими, что $|g(t)| < G < \infty$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \in [0, 1]$ и, для любого $R \in \mathbb{R}$ существует $C_R < \infty$ такое, что $\forall x$, $|x| < R$, $t \in [0, 1]$ $|f(x, t)| < C_R$.

Все результаты основаны на использовании следующей теоремы бакстеровского типа. (В дальнейшем Var и sup без индексов берутся по $[0, 1]$, C означает некоторые (возможно, различные) конечные неслучайные константы, Λ — некоторые случайные величины, $\Lambda < \infty$ п. н., $\varepsilon_N = \ln N / \sqrt{N}$).

Теорема 1. *Пусть*

$$D = \{a : [0, 1] \to \mathbb{R} \mid \operatorname{Var} a(\cdot) < \infty\},$$

$$B_N(x, a) = \sum_{j=1}^{N} a(t_{j-1}^N)\left(x(t_j^N) - x(t_{j-1}^N)\right)^2.$$

Тогда существует Λ *такое, что*

$$\sup_{a \in D} \frac{\left| B_N(x,a) - \int_0^1 a(t)\, g^2(t)\, dt \right|}{2\sup|a(\cdot)| + \operatorname{Var} a(\cdot) + 1} \le \Lambda \varepsilon_N.$$

Предположим, что g^2 принадлежит классу $\mathcal{G}$ такому, что

$$\exists A,\ V,\ \ \forall h \in \mathcal{G} \quad \sup|h| \le A < \infty, \quad \operatorname{Var} h \le V < \infty. \tag{2}$$

Для $h \in \mathcal{G}$ обозначим

$$R_N^*(h) = \int_0^1 h^2(t)\, dt - 2 B_N(x,h).$$

Из теоремы 1 следует

$$R_N^*(h) \to R(h) = \int_0^1 \left(h(t) - g^2(t)\right)^2 dt - \int_0^1 g^4(t)\, dt,$$

поэтому можно ожидать, что элемент $\mathcal{G}$, минимизирующий R_N^*, будет стремиться к $\arg\min R$, т. е. к g^2. Но, возможно, R_N^* не имеет минимума на $\mathcal{G}$. Поэтому будем рассматривать минимизирующую последовательность следующего вида. Обозначим $y = \arg\min(R^*, \mathcal{G}, \delta)$, если для любого $h \in \mathcal{G}$ $R^*(y) < R^*(h) + \delta$.

Теорема 2. *Пусть* $g_N^* = \arg\min(R_N^*, \mathcal{G}, \varepsilon_N)$. *Если выполнено* (2), *то для некоторой случайной величины* $\Lambda < \infty$

$$\int_0^1 \left(g_N^*(t) - g^2(t)\right)^2 dt = \Lambda \varepsilon_N \quad п.\ н.$$

Если (2) не выполнено, то функционал R_N^* следует модифицировать, добавив некий „стабилизирующий член" $\alpha_N U(h)$ такой, что $\sup|h| + \operatorname{Var} h \le \max(C\,U(h), C)$ для некоторого $C < \infty$ и $\alpha_N \to 0$. Точнее, положим $R_N^\circ(h, \alpha_N) = R_N^*(h) + \alpha_N U(h)$ и $g_N^\circ = \arg\min(R_N^\circ(\cdot, \alpha_N), \mathcal{G}, \delta_N)$.

Теорема 3. *Если* $g^2 \in \mathcal{G}$, $\mathcal{G} \subseteq D$, $\varepsilon_N = o(\alpha_N)$, *то*

$$\int_0^1 \left(g_N^\circ(t) - g(t)^2\right)^2 dt \le \Lambda(\alpha_N + \varepsilon_N + \delta_N) \quad п.\ н. \tag{3}$$

Пример. Положим

$$U(h) = \int_0^1 \left(|h(t)|^2 + \left| \frac{d}{dt} h(t) \right|^2 \right) dt, \quad \mathcal{G} = \{ h\colon U(h) < \infty \}.$$

Как известно, $\sup|h| + \operatorname{Var} h \le C\,(U(h))^{1/2}$, а значит, условие теоремы 3 выполнено и $g_N^\circ = \arg\min(R_N^\circ(\cdot, \alpha_N), \mathcal{G}, 0)$ является состоятельной оценкой для g^2. Чтобы оценить g_N°, воспользуемся разложением

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \theta_k u_k(t),$$

где $u_k(t) = \exp(2\pi i k t)$. Имеем

$$g^{\circ}_N(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \theta^{\circ}_k u_k(t),$$

где $\theta^{\circ}_k = B(x, u_k) / (1 + \alpha_N((2\pi k)^2 + 1))$. Очевидно, $|B(x, u_k)| \le B(x, u_0)$, так что $U\left(g^{\circ}_N\right) < \infty$. Если вместо $g^{\circ}_N(t)$ использовать оценку

$$\tilde{g}_l = \sum_{k=-l}^{l} \theta^{\circ}_k u_k(t),$$

то

$$\int_0^1 \left(g^{\circ}(t) - \tilde{g}_l(t)\right)^2 dt \le |B(x, u_0)|^2 \sum_{|k|>l} \frac{1}{\left(\alpha_N\left((2\pi k)^2 + 1\right) + 1\right)^2}.$$

Доказательство *теоремы* 1. Пусть $A = \sup|a(\cdot)|$, $F = \sup|f(x(\cdot), \cdot)|$. Случайная величина F конечна п. н., так как процесс x непрерывен на $[0, 1]$. В силу (1) для $t > s$

$$x(t) = x(s) + \int_s^t f(x(u), u)\, du + \int_s^t g(u)\, dw(u).$$

Поэтому $B_N(x, a) = J_1^N + 2J_2^N + J_3^N$, где

$$J_1^N = \sum_{j=1}^{N} a\left(t_{j-1}\right) \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} f(x(u), u)\, du\right)^2,$$

$$J_2^N = \sum_{j=1}^{N} a\left(t_{j-1}\right) \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} f(x(u), u)\, du \int_{t_{j-1}}^{t_j} g(u)\, dw(u)\right),$$

$$J_3^N = \sum_{j=1}^{N} a\left(t_{j-1}\right) \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} g(u)\, dw(u)\right)^2.$$

Оценим каждый член. Для J_1^N, очевидно,

$$\left|J_1^N\right| \le \sum_{j=1}^{N} AF^2\left(t_j - t_{j-1}\right)^2 \le AF^2N^{-1}. \tag{4}$$

Обозначив $\sigma_j = G\sqrt{t_j - t_{j-1}}$, $z_j = C\varepsilon_N/\sigma_j$, для J_2^N имеем $\left|J_2^N\right| \le AF\tilde{J}_2^N$, где

$$\tilde{J}_2^N = \max_j \left|\int_{t_{j-1}}^{t_j} g(s)\, dw(s)\right|$$

и для любого $C > 0$

$$p_N = \Pr\left\{\sup_a \frac{J_2^N}{AF} > C\varepsilon_N\right\} \le 1 - \left(1 - \frac{2}{z_j}\exp\left(-\frac{z_j^2}{2}\right)\right)^N$$

и

$$p_N = O\left(\frac{2N}{\ln N \cdot N^{-C \ln N / G^2}}\right),$$

значит, $\sum_N p_N < \infty$, и по лемме Бореля–Кантелли $J_2^N \le \Lambda \varepsilon_N$ п. н.

С учетом (4) для завершения доказательства достаточно установить, что $\exists \lambda \ \forall a \in D$,

$$\left| J_3^N - \int_0^1 a(t)\, g^2(t)\, dt \right| < \Lambda \varepsilon_N (2A + \dot{\mathrm{V}}\mathrm{ar}\, a).$$

Рассмотрим сначала случай $a = a(t, v) = I\{t \le v\}$. При этом

$$J_3^N = J(v) = \sum_{j=1}^{vN} \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} g(u)\, dw(u) \right)^2.$$

Обозначим

$$L(v) = \int_0^v g^2(t)\, dt, \quad v_N^\circ = \frac{\inf\left\{ i \colon v < t_i^N \right\}}{N}.$$

Тогда

$$\mathbf{E} J(v) = \sum_{i=1}^{vN} \int_{t_{j-1}}^{t_j} g^2(u)\, du = L\left(v_N^\circ\right),$$

$$J(v) - L(v) = \sum_{j=1}^{vN} \eta_j^N - L(v) + L\left(v_N^\circ\right),$$

где

$$\tilde{\eta}_j^N = \int_{t_{j-1}}^{t_j} g(u)\, dw(u), \quad \eta_j^N = \left(\tilde{\eta}_j^N\right)^2 - \mathbf{E}\left(\tilde{\eta}_j^N\right)^2.$$

Из условия $|g(t)| < G$ вытекает $\left| L(v) - L\left(v_N^\circ\right) \right| \le G^2 N^{-1}$. Поэтому для

$$r_N = \Pr\left\{ \sup_v |J(v) - L(v)| > C \varepsilon_N \right\}$$

имеем

$$r_N \le \Pr\left\{ \max_{1 \le k \le N} \left| \sum_{j=1}^k \eta_j^N \right| > C\varepsilon_N - G^2 N^{-1} \right\} \le$$

$$\le \Pr\left\{ \max_{1 \le k \le N} \frac{\left| \sum_{j=1}^k \eta_j^N \right|}{N^{1/2}} \ge C' \ln N \right\}.$$

Обозначим

$$U(x) = \operatorname{ch} x - 1, \quad \zeta_k = U\left(\frac{1}{s} \sum_{j=1}^k \eta_j^N \right)$$

для некоторого $s > 0$. Согласно (д) из [3, с. 71] ζ_k — субмартингал и с учетом (16) из [3, с. 78]

$$\Pr\left\{\max_{1\le k\le N}\left|\zeta_k\right| \ge y\right\} \le \mathbf{E}\,\zeta_N/y.$$

Согласно [4] получаем, что $\mathbf{E}\,\zeta_N \le 1$, если

$$s \ge \frac{2}{s_0}\left(\sum_{j=1}^{N}\left(\mathbf{E}\left(\tilde\eta_j^N\right)^2\right)^2\right)^{1/2},$$

где $0 < s_0 < 1$ — некоторая абсолютная константа. Но $\mathbf{E}\left(\tilde\eta_j^N\right)^2 \le G^2N^{-1}$; тогда $\mathbf{E}\,\zeta_N \le 1$, если $s = s_N = 2G^2N^{-1/2}/s_0$, и

$$r_N \le \Pr\{\max\zeta_j \ge U(C'G^{-2}\ln N)\} \le 2/(N^{\beta}-1),$$

где $\beta = C'G^{-2}$. Если $\beta > 1$, то $\sum r_N < \infty$ и, следовательно,

$$\sup_v |J(v)-L(v)| \le \Lambda\varepsilon_N \quad \text{п. н.}$$

Для любого $a \in D$, используя интегрирование по частям, получаем

$$\left|J_3^N - \int_0^1 a(t)\,g^2(t)\,dt\right| \le (2A + \operatorname{Var} a)\sup_v |J(v)-L(v)|.$$

Это неравенство завершает доказательство.

Доказательство *теоремы* 2. Из определений R_N^* и R следует

$$\sup_{h\in\mathcal{G}}\left|R(h) - R_N^*(h)\right| = 2\sup_{h\in\mathcal{G}}\left|B_N(x,h) - \int_0^1 g^2(t)\,h(t)\,dt\right|.$$

Используя теорему 1, имеем

$$R_N^*(g^2) \le R(g^2) + \Lambda\varepsilon_N = -\int_0^1 g^4(t)\,dt + \Lambda\varepsilon_N,$$

и значит,

$$R_N^*(g_N^*) \le R(g^2) + (\Lambda+1)\,\varepsilon_N$$

и

$$R(g_N^*) \le R_N^*(g_N^*) + \Lambda\varepsilon_N \le -\int_0^1 g^4(t)\,dt + (2\Lambda+1)\,\varepsilon_N.$$

Поэтому

$$R(g_N^*) - R(g^2) = \int_0^1\left(g^2(t) - g_N^*(t)\right)^2 dt \le (2\Lambda+1)\,\varepsilon_N.$$

Теорема доказана.

Доказательство *теоремы* 3. Воспользуемся критерием

$$R_N'(h,\alpha) = R_N^{\circ}(h,\alpha) + \int_0^1 g^4(t)\,dt$$

вместо R_N°. Очевидно, $g_N^{\circ} = \arg\min(R_N'(\cdot, \alpha_N), \mathcal{G}, \delta_N)$. По теореме 1 $\forall\, h \in \mathcal{G}$

$$\left| B_N(x,h) - \int_0^1 h(t)\, g^2(t)\, dt \right| \le \Lambda \varepsilon_N \max(U(h), 1). \tag{5}$$

Далее, так же, как и в теореме 2,

$$R_N'\left(g^2, \alpha_N\right) \le \Lambda \varepsilon_N \max(U(g^2), 1) + \alpha_N U(g^2)$$

и

$$R_N'\left(g_N^{\circ}, \alpha_N\right) \le (\alpha_N + \Lambda \varepsilon_N) \max(U(g^2), 1) + \delta_N.$$

Поскольку (5) выполнено, получаем

$$\left| R_N'\left(g_N^{\circ}, \alpha_N\right) - \int_0^1 \left(g^2(t) - g_N^{\circ}(t)\right)^2 dt - \alpha_N U\left(g_N^{\circ}\right) \right| \le$$

$$\le \Lambda \varepsilon_N \max(U(g_N^{\circ}), 1) \tag{6}$$

и

$$R_N'\left(g_N^{\circ}, \alpha_N\right) \ge \int_0^1 \left(g^2 - g_N^{\circ}\right)^2 dt + (\alpha_N - \Lambda \varepsilon_N) U\left(g_N^{\circ}\right).$$

Таким образом,

$$U\left(g_N^{\circ}\right) \le \frac{(\alpha_N + \Lambda \varepsilon_N) \max\left(U\left(g^2\right), 1\right) + \delta_N}{\alpha_N - \Lambda \varepsilon_N}. \tag{7}$$

Используя еще раз (6), получаем

$$\int_0^1 \left(g^2 - g_N^{\circ}\right)^2 dt \le 2(\alpha_N + \Lambda \varepsilon_N) \max(U(g_N^{\circ}), 1) + \delta_N \le \Lambda'(\alpha_N + \varepsilon_N + \delta_N)$$

ввиду (7), так как $\varepsilon_N = o(\alpha_N)$. Неравенство (3) доказано.

1. *Клигене Н., Телксинс Л.* Методы обнаружения моментов изменений свойств случайных процессов // Автоматика и телемеханика. – 1983. – № 10. – С. 5–56.
2. *Вовк Л. Б., Майборода Р. Е.* Об оценивании момента разладки для процесса типа Орнштейна–Уленбека // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 9. – С. 1198–1205.
3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 3-х т. – М.: Наука, 1971. – Т. 1. – 664 с.
4. *Бесклинская Е. П., Козаченко Ю. В.* Сходимость в нормах пространства Орлича и теоремы Леви–Бакстера // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1986. – Вып. 35. – С. 3–6.

Получено 08.09.94