УДК 519.217

Т. И. Насирова (Бакин. ун-т, Азербайджан),
К. К. Омарова (Ин-т кибернетики НАН Азербайджана, Баку)

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НИЖНЕГО ГРАНИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА СТУПЕНЧАТОГО ПРОЦЕССА ПОЛУМАРКОВСКОГО БЛУЖДАНИЯ С ЗАДЕРЖИВАЮЩИМ ЭКРАНОМ В НУЛЕ

On the basis of a given sequence of independent identically distributed pairs of random variables, we construct a step-type process of semi-Markov random walk, which is later delayed with a screen at the zero. For this process, we obtain the Laplace transformation of time of the first attainment of the zero level.

За заданою послідовністю незалежних однаково розподілених пар випадкових величин побудовано східчастий процес напівмарковського блукання, який потім затримується екраном у нулі. Для цього процесу знайдено перетворення Лапласа розподілу першого моменту досягнення рівня нуль.

Введение. Нахождению распределения первого момента достижения задерживающего экрана в нуле посвящено немало работ. В работе [1, с. 91 – 93] для процесса полумарковского блуждания с отрицательным сносом положительными скачками найдено преобразование Лапласа первого момента достижения задерживающего экрана в нуле. В работах [2 – 4; 5, с. 26 – 51; 6, с. 69 – 76] изучены различные проблемы, связанные с граничными функционалами случайных блужданий.

В данной работе другим, более простым методом, когда блуждание происходит по сложному лапласовому распределению порядка $(m, 1)$, получен явный вид преобразования Лапласа распределения первого момента достижения задерживающего экрана в нуле.

1. Постановка задачи. Пусть задана последовательность независимых одинаково распределенных пар случайных величин $\{\xi_k(\omega), \eta_k(\omega)\}_{k\geq 1}$, в которой случайные величины $\xi_k(\omega)$, $k \geq 1$, независимы между собой, $\eta_k(\omega)$, $k \geq 1$, тоже независимы между собой и $\xi_k(\omega) > 0$. Далее, предполагаем, что $E\xi_1(\omega) < \infty$, $E\eta_1(\omega) < \infty$ и $E\eta_1(\omega) < 0$. Построим ступенчатый процесс полумарковского блуждания [7, с. 11]

$$X_1(t, \omega) = \sum_{i=0}^{k} \eta_i(\omega), \qquad \sum_{i=0}^{k} \xi_i(\omega) \leq t < \sum_{i=1}^{k+1} \xi_i(\omega),$$

где

$$\xi_0(\omega) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Задержим этот процесс экраном в нуле [8, с. 41]

$$X(t, \omega) = X_1(t, \omega) - \inf_{0\leq s\leq t} (0, X_1(s, \omega)).$$

Процесс $X(t, \omega)$ будем называть ступенчатым процессом полумарковского блуждания с задерживающим экраном в нуле (или с задерживающим экраном „0”).

Определим случайную величину $\tau_{\eta_0}(\omega) = \inf\{t, X(t, \omega) = 0\}$.

Положим $\tau_{\eta_0}(\omega) = \infty$, если для всех t $X(t, \omega) > 0$.

Очевидно, что $\tau_{\eta_0}(\omega)$ является первым моментом достижения задерживающего экрана „0” процессом $X(t, \omega)$.

Целью данной статьи является нахождение преобразование Лапласа распределения случайной величины $\tau_{\eta_0}(\omega)$. Преобразование Лапласа распределения случайной величины $\tau_{\eta_0}(\omega)$ обозначим через

$$L(s) = \mathrm{E} e^{-s\tau_{\eta_0}(\omega)}, \quad s > 0,$$

преобразование Лапласа ее условного распределения — через

$$L(s/z) = \mathrm{E}\left[e^{-s\tau_{\eta_0}(\omega)} \mid X(0,\omega) = z\right].$$

По формуле полной вероятности имеем

$$L(s) = \int_{z=0}^{\infty} L(s/z) d\mathrm{P}\{X(0,\omega) < z\}. \tag{1}$$

Далее, введем следующие обозначения:

$$N(t/z) = \mathrm{P}\{\tau_{\eta_0}(\omega) > t / X(0,\omega) = z\}$$

и

$$\tilde{N}(s/z) = \int_0^{\infty} e^{-st} N(t/z) dt.$$

Очевидно, что

$$\tilde{N}(s/z) = \frac{1 - L(s/z)}{s}$$

или

$$L(s/z) = 1 - M(s/z),$$

где

$$M(s/z) = s\tilde{N}(s/z).$$

Поскольку $L(s/z)$ выражается через $\tilde{N}(s/z)$, составим интегральное уравнение для последнего.

Введем еще одно обозначение

$$\varphi(s) = \mathrm{E} e^{-s\xi_1(\omega)}.$$

2. Составление интегрального уравнения для $\tilde{N}(s/z)$. Интегральное уравнение для $\tilde{N}(s/z)$ дано в следующей теореме.

Теорема 1. *Функция $\tilde{N}(s/z)$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению*:

$$\tilde{N}(s/z) = \frac{1-\varphi(s)}{s} + \varphi(s) \int_{y=0}^{\infty} \tilde{N}(s/y) d_y \mathrm{P}\{z + \eta_1(\omega) < y\}. \tag{2}$$

Доказательство. По формуле полной вероятности имеем

$$\mathrm{P}\{\tau_{\eta_0}(\omega) > t / X(0,\omega) = z\} = \mathrm{P}\{\tau_{\eta_0}(\omega) > t;\ \xi_1(\omega) > t / X(0,\omega) = z\} +$$

$$+ \int_{u=0}^{t} \int_{y=0}^{\infty} \mathrm{P}\{\xi_1(\omega) \in du,\ z + \eta_1(\omega) > 0,\ z + \eta_1(\omega) \in dy\} \times$$

$$\times\ \mathrm{P}\{\tau_{\eta_0}(\omega) > t-u / X(0,\omega) = y\}. \tag{3}$$

Умножая обе части (3) на e^{-st}, интегрируя по t от 0 до ∞ и учитывая обозначение $\tilde{N}(s/z)$, получаем уравнение (2).

Теорема доказана.

Уравнение (2) для произвольно распределенных случайных величин $\xi_k(\omega)$, $\eta_k(\omega)$, $k \geq 1$, можно решить методом последовательных приближений. Но такое решение непригодно для приложений. Это уравнение имеет решение в явном виде в классе сложных лапласовых распределений. Определение сложного лапласового распределения порядка $(n, 1)$ дано в доказательстве теоремы 2.

Теорема 2. *Пусть*

$$\eta_k(\omega) = \eta_{k1}^{+}(\omega) + \eta_{k2}^{+}(\omega) + \ldots + \eta_{kn}^{+}(\omega) - \eta_k^{-}(\omega), \quad k = \overline{1,\infty},$$

где $\eta_{ki}^{+}(\omega)$, $i = \overline{1,n}$, *и* $\eta_k^{-}(\omega)$ *имеют эрланговское распределение* n*-го порядка и первого порядка с параметрами* λ *и* μ *соответственно и* $\mathrm{E}\eta_k(\omega) < 0$.

Тогда

$$L(s/z) = \frac{\lambda^n \varphi(s)}{[\lambda - k_1(s)]^n} e^{k_1(s)z},$$

$$L(s) = \frac{\lambda^{2n}\varphi(s)}{[\lambda - k_1(s)]^{2n}},$$

$$\mathrm{E}\tau_{\eta_0}(\omega) = \frac{\lambda + n\mu}{\lambda - n\mu}\mathrm{E}\xi_1(\omega),$$

$$\mathrm{D}\tau_{\eta_0}(\omega) = \frac{\lambda + n\mu}{\lambda - n\mu}\mathrm{D}\xi_1(\omega) + \frac{2n\lambda\mu(\lambda+\mu)}{[\lambda - n\mu]^3}[\mathrm{E}\xi_1(\omega)]^2.$$

Доказательство. Легко показать, что функция распределения случайной величины $\eta_k(\omega)$ имеет вид

$$F_{\eta_1^+ + \eta_2^+ + \ldots + \eta_n^+ - \eta_1^-}(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{(\lambda+\mu)^n} e^{\mu x}, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda x)^k}{k!}\left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}\right], & x > 0, \end{cases} \tag{4}$$

а плотность распределения

$$\rho_{\eta_1^+ + \eta_2^+ + \ldots + \eta_n^+ - \eta_1^-}(x) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\lambda^n \mu}{(\lambda+\mu)^n} e^{\mu x}, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}\left\{\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}\left(\frac{\lambda x}{k} - 1\right)\left(1 - \frac{\lambda^{n-k}}{(\lambda+\mu)^{n-k}}\right) + \left[1 - \frac{\lambda^n}{(\lambda+\mu)^n}\right]\right\}, & x > 0. \end{cases} \tag{5}$$

Функцию распределения, заданную формулой (4), будем называть сложной лапласовой функцией распределения порядка $(n, 1)$. Учитывая выражение плотности распределения случайной величины $\eta_1(\omega)$ в (2), получаем интегральное уравнение относительно $M(s/z)$:

$$M(s/z) = 1 - \varphi(s) + \frac{\lambda^n \mu}{(\lambda+\mu)^n}\varphi(s)\int_0^z e^{\mu(y-z)} M(s/y)\,dy +$$

$$+ \lambda\varphi(s)\int_z^\infty \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\lambda(y-z))^{k-1}}{(k-1)!}\left[\frac{\lambda(y-z)}{k} - 1\right]\left[1 - \frac{\lambda^{n-k}}{(\lambda+\mu)^{n-k}}\right] + \right.$$

$$\left. + \left[1 - \frac{\lambda^n}{(\lambda+\mu)^n}\right]\right\} e^{-\lambda(y-z)} M(s/y)\,dy.$$

Из этого интегрального уравнения получим дифференциальное уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left[\mu M^{(k)}(s/z) + M^{(k+1)}(s/z)\right](-1)^{n-k}\lambda^{n-k} +$$

$$+ (-1)^{n+1}\lambda^n \mu\varphi(s) M(s/z) = (-1)^n \lambda^n \mu(1-\varphi(s))$$

с граничными условиями

$$M(s/0) = 1 - \varphi(s) + \frac{\lambda^n \mu\varphi(s)}{(\lambda+\mu)^n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}\int_{x=0}^{\infty} x^k e^{-\lambda x} M(s/x)\,dx,$$

$$M'(s/0) = -\mu M(s/0) + \frac{\lambda^n \mu\varphi(s)}{(n-1)!}\int_{x=0}^{\infty} x^{n-1} e^{-\lambda x} M(s/x)\,dx,$$

……………………………………………………………

$$\sum_{i=0}^{k} C_k^i \left[\mu M^{(i)}(s/0) + M^{(i+1)}(s/0)\right](-1)^{k-i}\lambda^{k-i} =$$

$$= \frac{(-1)^k \lambda^n \mu\varphi(s)}{[n-(k+1)]!}\int_{x=0}^{\infty} x^{n-(k+1)} e^{-\lambda x} M(s/x)\,dx, \tag{6}$$

……………………………………………………………

$$\sum_{i=0}^{n-2} C_{n-2}^i \left[\mu M^{(i)}(s/0) + M^{(i+1)}(s/0)\right](-1)^{n-(i+2)}\lambda^{n-(i+2)} =$$

$$= (-1)^{n-2}\lambda^n \mu\varphi(s)\int_{x=0}^{\infty} x e^{-\lambda x} M(s/x)\,dx,$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i \left[\mu M^{(i)}(s/0) + M^{(i+1)}(s/0)\right](-1)^{n-(i+1)}\lambda^{n-(i+1)} =$$

$$= (-1)^{n-1}\lambda^n \mu\varphi(s)\int_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda x} M(s/x)\,dx,$$

характеристическим уравнением

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i \left[\mu k^i(s) + k^{i+1}(s)\right](-1)^{n-i}\lambda^{n-i} + (-1)^{n+1}\lambda^n \mu\varphi(s) = 0 \tag{7}$$

и общим решением

$$M(s/z) = \sum_{i=1}^{n+1} c_i(s) e^{k_i(s)z} + 1, \tag{8}$$

где $c_i(s)$ — неизвестные постоянные и $k_i(s)$, $i = \overline{1, n+1}$, — корни характеристического уравнения (7). Используя граничные условия (6) и общий вид решения (8), имеем следующую систему неоднородных линейных алгебраических уравнений относительно $c_l(s)$, $l = \overline{1, n+1}$:

$$\sum_{l=1}^{n+1}\left[1-\frac{\lambda^n\mu\varphi(s)}{(\lambda+\mu)^n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(\lambda+\mu)^i}{[\lambda-k_l(s)]^{i+1}}\right]c_l(s) = 1-\varphi(s),$$

$$\sum_{l=1}^{n+1}\left\{\mu+k_l(s)-\frac{\lambda^n\mu\varphi(s)}{[\lambda-k_l(s)]^n}\right\}c_l(s) = -\mu,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_{l=1}^{n+1}\left\{\sum_{i=0}^{k}C_k^i\left[\mu k_l^i(s)+k_l^{i+1}(s)\right](-1)^{k-i}\lambda^{k-i}-\frac{(-1)^k\lambda^n\mu\varphi(s)}{[\lambda-k_l(s)]^{n-k}}\right\}c_l(s) = 0, \tag{9}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_{l=1}^{n+1}\left\{\sum_{i=0}^{n-2}C_{n-2}^i\left[\mu k_l^i(s)+k_l^{i+1}(s)\right](-1)^{[n-(i+2)]}\lambda^{[n-(i+2)]}-\frac{(-1)^{n-2}\lambda^n\mu\varphi(s)}{[\lambda-k_l(s)]^2}\right\}c_l(s) = 0,$$

$$\sum_{l=1}^{n+1}\left\{\sum_{i=0}^{n-1}C_{n-1}^i\left[\mu k_l^i(s)+k_l^{i+1}(s)\right](-1)^{[n-(i+1)]}\lambda^{[n-(i+1)]}-\frac{(-1)^{n-1}\lambda^n\mu\varphi(s)}{\lambda-k_l(s)}\right\}c_l(s) = 0.$$

Учитывая, что (см. (8))

$$M(s/0) = \sum_{l=1}^{n+1}c_l(s)+1,$$

$$M'(s/0) = \sum_{l=1}^{n+1}k_l(s)c_l(s),$$

$$M^{(n)}(s/0) = \sum_{l=1}^{n+1}k_l^n(s)c_l(s),$$

$$\prod_{i=1}^{n+1}[\lambda-k_i(s)] = (-1)^{n+1}\lambda^n\mu\varphi(s)$$

и

$$\prod_{i=1,\, i\neq j}^{n+1}[\lambda-k_i(s)] = (-1)^{n-1}[\lambda-k_j(s)]^{n-1}[\mu+k_j(s)], \quad j=\overline{1, n+1},$$

убеждаемся, что все уравнения системы (9) сводятся к одному уравнению

$$[\lambda-k_1(s)]^n c_1(s)+[\lambda-k_2(s)]^n c_2(s)+\ldots+[\lambda-k_{n+1}(s)]^n c_{n+1}(s) = -\lambda^n\varphi(s). \tag{10}$$

Только при решении

$$c_1(s) = -\frac{\lambda^n\varphi(s)}{[\lambda-k_1(s)]^n}, \qquad c_i(s) = 0, \quad i=2,\ldots,n+1,$$

$L(s/z)$ является преобразованием Лапласа распределения случайной величины $\tau_{\eta_0}(\omega)$. Тогда имеем

$$M(s/z) = -\frac{\lambda^n \varphi(s)}{[\lambda - k_1(s)]^n} e^{k_1(s)z} + 1.$$

Итак,

$$L(s/z) = 1 - M(s/z) = \frac{\lambda^n \varphi(s)}{[\lambda - k_1(s)]^n} e^{k_1(s)z}, \tag{11}$$

где $k_1(s)$ — корень характеристического уравнения (7), который имеет свойство $k_1(0) = 0$.

Покажем, что функция $L(s/z)$ (см. формулу (11)) является преобразованием Лапласа по s. Чтобы избежать технических трудностей, ниже покажем, что функция $L(s)$ (см. формулу (12)) является преобразованием Лапласа.

Из (1) и (11) имеем

$$L(s) = \int_0^\infty L(s/z)\, d\mathrm{P}\left\{\sum_{i=1}^n \eta_i^+(\omega) < z\right\} =$$

$$= \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^\infty z^{n-1} e^{-\lambda z} L(s/z)\, dz = \frac{\lambda^{2n}\varphi(s)}{[\lambda - k_1(s)]^{2n}},$$

где

$$d\mathrm{P}\left\{\sum_{i=1}^n \eta_i^+(\omega) < t\right\} = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}, & t > 0, \quad \lambda > 0, \end{cases}$$

— плотность эрланговского распределения n-го порядка.

Таким образом, получаем

$$L(s) = \frac{\lambda^{2n}\varphi(s)}{[\lambda - k_1(s)]^{2n}}. \tag{12}$$

Теперь покажем, что $L(s)$ есть преобразование Лапласа. Для этого по теореме 1 (см. [9, с. 62]) необходимо показать, что

$$L(0) = 1$$

и для любого натурального m

$$(-1)^m \frac{d^m L(s)}{ds^m} > 0, \quad s > 0.$$

Из (12) имеем

$$L(s) = \lambda^{2n}\varphi(s)[\lambda - k_1(s)]^{-2n}.$$

Отсюда находим

$$L(0) = \lambda^{2n}\varphi(0)[\lambda - k_1(0)]^{-2n}.$$

Поскольку $\varphi(s)$ является преобразованием Лапласа, $\varphi(0) = 1$. Из характеристического уравнения (7) видно, что при $s = 0$ один корень равен нулю. Согласно (10) этот корень $k_1(s)$. Значит, $L(0) = 1$.

Заметим, что $\lambda - k_i(s) > 0$, $i = \overline{1, n+1}$, в противном случае интегралы

$$\int_{x=0}^\infty x^k e^{-\lambda x} e^{k_1(s)x}\, dx = \int_{x=0}^\infty x^k e^{-[\lambda - k_1(s)]x}\, dx$$

в (6) расходились бы, так как $0 < M(s/x) < 1$.

Из характеристического уравнения при $\lambda > n\mu$ следует, что при нечетном i $k_1^{(i)}(s) < 0$, при четном $k_1^{(i)}(s) > 0$. В силу того, что $\varphi(s)$ — характеристическая функция, $\varphi^{(i)}(s) < 0$ при нечетном i и $\varphi^{(i)}(s) > 0$ при четном.

Согласно теореме Лейбница о производной произведения двух функций для любого натурального m

$$L^{(m)}(s) = \sum_{i=0}^{m} C_m^i \left([\lambda - k_1(s)]^{-2n}\right)^{(i)} \varphi^{(m-i)}(s) =$$

$$= [\lambda - k_1(s)]^{-2n}\varphi^{(m)}(s) + \sum_{i=1}^{m} C_m^i \left([\lambda - k_1(s)]^{-2n}\right)^{(i)} \varphi^{(m-i)}(s).$$

Учитывая знаки $\varphi^{(i)}(s)$ и $k_1^{(i)}(s)$ при четном и нечетном i, получаем, что при четном m $L^{(m)}(s) > 0$, а при нечетном m $L^{(m)}(s) < 0$. Поэтому при любом m

$$(-1)^m L^{(m)}(s) > 0.$$

Теперь найдем $E\tau_{\eta_0}(\omega)$ и $D\tau_{\eta_0}(\omega)$. Легко видеть, что

$$L'(s) = \frac{\lambda^{2n}\{[\lambda - k_1(s)]\varphi'(s) + 2nk_1'(s)\varphi(s)\}}{[\lambda - k_1(s)]^{2n+1}}$$

и

$$L''(s) = \lambda^{2n}\left\{\frac{\{[\lambda - k_1(s)]\varphi''(s) + (2n-1)k_1'(s)\varphi'(s) + 2nk_1''(s)\varphi(s)\}[\lambda - k_1(s)]}{[\lambda - k_1(s)]^{2n+2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{(2n+1)k_1'(s)\varphi(s)\{\varphi'(s)(\lambda - k_1(s)) + 2nk_1'(s)\varphi(s)\}}{[\lambda - k_1(s)]^{2n+2}}\right\}.$$

При $s = 0$ имеем

$$L'(0) = \frac{\lambda\varphi'(0) + 2nk_1'(0)}{\lambda} \tag{13}$$

и

$$L''(0) = \frac{\lambda^2\varphi''(0) + 4n\lambda k_1'(0)\varphi'(0) + 2n\lambda k_1''(0) + 2n(2n+1)[k_1'(0)]^2}{\lambda^2}. \tag{14}$$

Из характеристического уравнения находим

$$k_1'(0) = \frac{\lambda\mu}{\lambda - n\mu}\varphi'(0), \tag{15}$$

$$k_1''(0) = \frac{1}{\lambda(\lambda - n\mu)}\left[\lambda^2\mu\varphi''(0) + 2n\left(\lambda - \frac{n-1}{2}\mu\right)[k_1'(0)]^2\right]. \tag{16}$$

Из (13) – (16) получаем

$$L'(0) = \frac{\lambda + n\mu}{\lambda - n\mu} E\xi_1(\omega)$$

и

$$L''(0) = \frac{\lambda + n\mu}{\lambda - n\mu} E\xi_1^2(\omega) + \frac{(4n\lambda^2\mu + 2n\lambda\mu^2 - 4n^2\mu^3)}{[\lambda - n\mu]^3}[E\xi_1(\omega)]^2.$$

Следовательно, при $\lambda > n\mu$

$$E\tau_{\eta_0}(\omega) = \frac{\lambda + n\mu}{\lambda - n\mu} E\xi_1(\omega),$$

$$D\tau_{\eta_0}(\omega) = \frac{\lambda + n\mu}{\lambda - n\mu} D\xi_1(\omega) + \frac{2n\lambda\mu(\lambda + \mu)}{[\lambda - n\mu]^3}[E\xi_1(\omega)]^2.$$

1. *Ибаев Э. А.* Преобразование Лапласа одного граничного функционала процесса полумарковского блуждания с отрицательным сносом, положительными скачками и с задерживающим экраном в нуле // Тр. II респ. конф. „Современные проблемы информатизации, кибернетики и информационных технологий”. – 2004. – С. 91 – 93.
2. *Гусак Д. В.* О граничных функционалах для сумм случайного числа слагаемых // Сб. Ин-та математики АН УССР „Аналитические методы исследований в теории вероятностей”. – 1981. – С. 20 – 35.
3. *Гусак Д. В.* Факторизационные тождества для сумм случайного числа слагаемых // Сб. Ин-та математики АН УССР „Прикладные задачи теории вероятностей”. – 1982. – С. 25 – 44.
4. *Гусак Д. В.* Граничні задачі для процесів з незалежними приростами на ланцюгах Маркова та для напівмарковських процесів // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 1998. – 320 с.
5. *Lotov V. I.* On the asymptotics of distributions in two-sided boundary problems for random walks defined on a Markov chain // Sib. Adv. Math. – 1991. – **1**, № 2. – P. 26 – 51.
6. *Япар Дж., Насирова Т. И., Хапиев Т. А.* О вероятностных характеристиках уровня запаса в модели (s, S) // Кибернетика и систем. анализ. – 1998. – № 5. – С. 69 – 76.
7. *Насирова Т. И.* Процессы полумарковского блуждания. – Баку: Элм, 1984. – 163 с.
8. *Боровков А. А.* Вероятностные методы в теории массового обслуживания. – М.: Наука, 1972. – 362 с.
9. *Королюк В. С., Коваленко И. Н., Скороход А. В., Турбин А. Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Наука, 1980. – 360 с.

Получено 17.06.2005,
после доработки — 25.04.2006