УДК 517.51

Р. А. Ласурия (Абхаз. ун-т, Сухум)

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ТЕОРЕМЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА СФЕРЕ, В ПРОСТРАНСТВЕ $S^{(p,q)}(\sigma^m)$

We prove direct and inverse theorems on the approximation of functions defined on a sphere in the space $S^{(p,q)}(\sigma^m)$, $m \geq 3$, in terms of the best approximations and modules of continuity. We consider constructive characteristics of functional classes defined by majorants of modules of continuity of their elements.

Доведено прямі та обернені теореми наближення функцій, заданих на сфері, у просторі $S^{(p,q)}(\sigma^m)$, $m \geq 3$, у термінах найкращих наближень і модулів неперервності та розглянуто конструктивні характеристики функціональних класів, що задані мажорантами модулів неперервності їхніх елементів.

1. Пусть $\mathbb{R}^m$, $m \geq 3$, — m-мерное евклидово пространство, $x = (x_1, \ldots, x_m)$ — его векторы, σ^m — единичная сфера в пространстве $\mathbb{R}^m$ с центром в начале координат, $L_p(\sigma^m)$, $p \geq 1$, — пространство функций $f(x)$ с нормой

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p} = \left(\int_{\sigma^m} |f(x)|^p \, d\sigma(x) \right)^{1/p} < \infty,$$

$$L(\sigma^m) = L_1(\sigma^m), \qquad L_\infty(\sigma^m) \equiv M = \left\{ f : \|f\|_M = \sup_{x \in \sigma^m} \text{vrai}\, |f(x)| < \infty \right\}.$$

Пусть, далее,

$$S[f] = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^\lambda(f, x), \qquad \lambda = \frac{m-2}{2}, \tag{1}$$

— ряд Фурье – Лапласа $f \in L(\sigma^m)$,

$$Y_n^\lambda(f, x) = \sum_{j=1}^{a_n} \hat{f}_j^{(n)} Y_j^{(n)}(x),$$

$$\hat{f}_j^{(n)} = (f, Y_j^{(n)}), \quad j = 1, \ldots, a_n,$$

— коэффициенты Фурье – Лапласа функции $f(x)$, $\{Y_j^{(n)}(x)\}$, $j = 1, \ldots, a_n$, — сферические гармоники степени n, образующие ортогональный базис в пространстве H_n сферических гармоник степени n размерности $a_n = (2n + m - 2) \times \times \dfrac{(n+m-3)!}{n!(m-2)!}$.

При каждых фиксированных $p \in (0, \infty]$, $q \in (0, \infty)$ обозначим

$$S^{(p,q)}(\sigma^m) = \left\{ f \in L(\sigma^m) : \sum_{k=0}^{\infty} \left\| Y_k^\lambda(f, x) \right\|_p^q < \infty \right\}.$$

Элементы $f(x), g(x) \in S^{(p,q)}(\sigma^m)$ считаем тождественными, если $\hat{f}_j^{(n)} = \hat{g}_j^{(n)}$ при всех $j = 1, \ldots, a_n$, $n = 0, 1, \ldots$.

Будем говорить, что $S^{(p,q)}(\sigma^m)$ порождается пространством $L(\sigma^m)$, системой функций

$$\bigcup_{n=0}^{\infty}\{Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)}, \ldots, Y_{a_n}^{(n)}\} \tag{2}$$

и числами p, q.

Норму каждого элемента $f \in S^{(p,q)}(\sigma^m)$ определим посредством равенства

$$\|f(x)\|_{S^{(p,q)}} = \|f(x)\|_{S^{(p,q)}(\sigma^m)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left\|Y_n^{\lambda}(f, x)\right\|_p^q\right)^{1/q}. \tag{3}$$

Множество $S^{(p,q)}(\sigma^m)$ при $p \in [1, \infty]$, $q \in [1, \infty)$ образует линейное нормированное пространство, содержащее систему (2), с операциями сложения и умножения на число, определенными на всем пространстве $L(\sigma^m)$. При $p = q = 2$ в силу равенства Парсеваля в $L_2(\sigma^m)$ имеем

$$\|f\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left\|Y_n^{\lambda}(f, x)\right\|_2^2\right)^{1/2} = \|f\|_{S^{(2,2)}}.$$

Предложение 1. *Пусть*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} Y_k(x) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{a_k}\alpha_j^{(k)}Y_j^{(k)}(x)$$

— *произвольный полином по сферическим гармоникам* $Y_k(x)$,

$$S_n^{\lambda}(f, x) = \sum_{k=0}^{n} Y_k^{\lambda}(f, x)$$

— *частные суммы ряда* (1). *Среди всех сумм вида* $P_n(x)$ *при данном* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *наименее уклоняется от* $f \in S^{(p,q)}(\sigma^m)$, $q \in (0, \infty)$, $p \in (0, \infty]$, *частная сумма Фурье – Лапласа* $S_n^{\lambda}(f, x)$:

$$\inf_{Y_k}\|f(x) - P_n(x)\|_{S^{(p,q)}} = \left\|f(x) - S_n^{\lambda}(f, x)\right\|_{S^{(p,q)}}, \tag{4}$$

причем

$$\left\|f(x) - S_n^{\lambda}(f, x)\right\|_{S^{(p,q)}}^q = \|f\|_{S^{(p,q)}}^q - \sum_{k=0}^{n}\left\|Y_k^{\lambda}(f, x)\right\|_p^q. \tag{5}$$

Доказательство. В силу (3) и того, что для любого $Y_l(x) \in H_l$

$$Y_k^{\lambda}(Y_l, x) = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ Y_l(x), & k = l, \end{cases}$$

имеем

$$\|f(x) - P_n(x)\|_{S^{(p,q)}}^q = \sum_{k=0}^{\infty}\left\|Y_k^{\lambda}(f - P_n, x)\right\|_p^q =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left\|Y_k^{\lambda}(f, x) - Y_k^{\lambda}(P_n, x)\right\|_p^q + \sum_{k=n+1}^{\infty}\left\|Y_k^{\lambda}(f, x) - Y_k^{\lambda}(P_n, x)\right\|_p^q =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left\|Y_k^{\lambda}(f, x) - Y_k^{\lambda}(P_n, x)\right\|_p^q + \sum_{k=n+1}^{\infty}\left\|Y_k^{\lambda}(f, x)\right\|_p^q. \tag{6}$$

Минимум правой части (6) достигается, когда разность $Y_k^\lambda(f, x) - Y_k^\lambda(P_n, x)$ равна нулю при произвольном $x \in \sigma^m$:

$$Y_k^\lambda(f, x) - Y_k^\lambda(P_n, x) = 0 \quad \forall x \in \sigma^m,$$

$$\sum_{j=1}^{a_k} (\hat{f}_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)}) Y_j^{(k)}(x) = 0.$$

Отсюда в силу линейной независимости $\{Y_j^{(k)}(x)\}$, $j = 1, \ldots, a_k$, $k = 0, 1, \ldots$, следуют равенства $\hat{f}_j^{(k)} = \alpha_j^{(k)}$, т. е.

$$S_n^\lambda(f, x) = P_n(x),$$

при этом из (6) вытекает (5).

2. Прямые теоремы. Пусть $f \in S^{(p,q)}(\sigma^m)$, $q \in [1, \infty)$, $p \in (0, \infty]$,

$$S_u f(x) = \frac{1}{|\sigma^{m-1}| \sin^{2\lambda} u} \int_{(x,y)=\cos u} f(y)\, dt(y), \qquad 0 < u \leq \pi,$$

— сферический сдвиг с шагом $u \in (0, \pi]$, (x, y) — скалярное произведение векторов x, y в $\mathbb{R}^m$, $|\sigma^{m-1}|$ — площадь $(m-1)$-мерной сферы. Известно [1, с. 236; 2, с. 254], что

$$Y_n^\lambda(S_u f, x) = \frac{P_n^\lambda(\cos u)}{P_n^\lambda(1)} Y_n^\lambda(f, x), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где $P_n^\lambda(t)$ — многочлены Гегенбауэра.

Тогда ряд Фурье – Лапласа функции $S_u f(x)$ принимает вид

$$S[S_u f] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n^\lambda(\cos u)}{P_n^\lambda(1)} Y_n^\lambda(f, x).$$

Отсюда, полагая $\Delta_u f(x) = S_u f(x) - f(x)$, получаем

$$\|\Delta_u f(x)\|_{S^{(p,q)}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{P_n^\lambda(\cos u)}{P_n^\lambda(1)} - 1 \right|^q \|Y_n^\lambda(f, x)\|_p^q \right)^{1/q}, \tag{7}$$

$$q \in [1, \infty), \quad p \in (0, \infty], \quad u \in (0, \pi].$$

Величину

$$\omega(f, t)_{S^{(p,q)}} = \sup_{0 < u \leq t} \|\Delta_u f(x)\|_{S^{(p,q)}} \tag{8}$$

будем называть модулем непрерывности f в пространстве $S^{(p,q)}(\sigma^m)$. Из (7) следует, что

$$\lim_{t \to 0} \omega(f, t) = 0$$

и, кроме того, $\omega(f, t)_{S^{(p,q)}}$ не убывает на $(0, \pi]$.

Согласно предложению 1, если

$$E_n(f)_{S^{(p,q)}} = \inf_{Y_K} \| f(x) - P_{n-1}^{(x)} \|_{S^{(p,q)}}, \tag{9}$$

то

$$E_n^q(f)_{S^{(p,q)}} = \|f(x)\|^q_{S^{(p,q)}} - \sum_{k=0}^{n-1} \left\| Y_k^\lambda(f, x) \right\|_p^q = \sum_{k=n}^{\infty} \left\| Y_k^\lambda(f, x) \right\|_p^q, \qquad (10)$$

$$q \in (0, \infty), \quad p \in (0, \infty].$$

Здесь мы рассматриваем сферические аналоги, в определенном смысле, прямых теорем приближения, исследованных в [3] (см. также [4]).

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $f \in S^{(p,q)}(\sigma^m)$, $q \in [1, \infty)$, $p \in (0, \infty]$, *и* $f \not\equiv \text{const}$. *Тогда для любого* $\tau > 0$

$$E_n(f)_{S^{(p,q)}} \le C_n(\tau)\omega(f, \tau/n)_{S^{(p,q)}}, \qquad (11)$$

где

$$C_n(\tau) = \left(\inf_{\mu \in M(\tau)} \frac{\mu(\tau) - \mu(0)}{I_n(\tau, \mu)} \right)^{1/q} \qquad (12)$$

и

$$I_n(\tau, \mu) = I_{n,q}(\tau, \mu) = \inf_{k \ge n} \int_0^\tau \left| \frac{P_k^\lambda(\cos t/n)}{P_k^\lambda(1)} - 1 \right|^q d\mu(t), \quad k \in \mathbb{N}, \qquad (13)$$

$M(\tau)$ — *множество функций* μ, *ограниченных, неубывающих, отличных от констант на* $[0, \tau]$. *При этом существует функция* $\mu_* \in M(\tau)$, *реализующая в* (12) *точную нижнюю грань. Неравенство* (11) *неулучшаемо на множестве* $S^{(p,q)}(\sigma^m)$ *в том смысле, что для любого* $n \in \mathbb{N}$

$$K_n(\tau) = C_n(\tau), \qquad (14)$$

где

$$K_n(\tau) = \sup \left\{ \frac{E_n(f)_{S^{(p,q)}}}{\omega(f, \tau/n)_{S^{(p,q)}}} : f \in S^{(p,q)}(\sigma^m), \ f \not\equiv \text{const} \right\}. \qquad (15)$$

Доказательство проведем по схеме, предложенной в [3]. Пусть $f \in S^{(p,q)}(\sigma^m)$. На основании (7) и (10) имеем

$$\|\Delta_u f(x)\|_{S^{(p,q)}} \ge \sum_{k=n}^{\infty} \left| \frac{P_k^\lambda(\cos u)}{P_k^\lambda(1)} - 1 \right|^q \left\| Y_k^\lambda(f, x) \right\|_p^q =$$

$$= \frac{I_n(\tau, \mu)}{\mu(\tau) - \mu(0)} E_n^q(f)_{S^{(p,q)}} + \sum_{k=n}^{\infty} \left\| Y_k^\lambda(f, x) \right\|_p^q \left(\left| \frac{P_k^\lambda(\cos u)}{P_k^\lambda(1)} - 1 \right|^q - \frac{I_n(\tau, \mu)}{\mu(\tau) - \mu(0)} \right). \qquad (16)$$

Отсюда для любого $t \in [0, \tau]$

$$E_n^q(f)_{S^{(p,q)}} \le \frac{\mu(\tau) - \mu(0)}{I_n(\tau, \mu)} \left(\left\| \Delta_{t/n} f \right\|^q_{S^{(p,q)}} - \sum_{k=n}^{\infty} \left\| Y_k^\lambda(f, x) \right\|_p^q \right) \times$$

$$\times \left(\left| \frac{P_k^\lambda(\cos t/n)}{P_k^\lambda(1)} - 1 \right|^q - \frac{I_n(\tau, \mu)}{\mu(\tau) - \mu(0)} \right). \qquad (17)$$

В силу неравенства [1, с. 205; 2, с. 255]

$$\max_{0 \le u \le \pi} \left| P_n^\lambda(\cos u) \right| \le P_n^\lambda(1)$$

находим

$$\left|\frac{P_k^\lambda(\cos u)}{P_k^\lambda(1)} - 1\right|^q \le \left(\frac{\max\limits_{0\le u\le\pi} P_n^\lambda(\cos u)}{P_n^\lambda(1)} + 1\right)^q \le 2^q. \tag{18}$$

Исходя из (18), заключаем, что ряд в правой части (17) равномерно по t мажорируется сходящимся положительным числовым рядом. На основании этого, интегрируя неравенство по $d\mu(t)$ в пределах от 0 до τ, получаем

$$E_n^q(f)_{S^{(p,q)}}(\mu(\tau)-\mu(0)) \le \frac{\mu(\tau)-\mu(0)}{I_n(\tau,\mu)}\left(\int_0^\tau \left\|\Delta_{t/n} f(x)\right\|_{S^{(p,q)}}^q d\mu(t) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=n}^\infty \left\|Y_k^\lambda(f,x)\right\|_{S^{(p,q)}}^q \left(\int_0^\tau \left|\frac{P_k^\lambda(\cos t/n)}{P_k^\lambda(1)} - 1\right|^q d\mu(t) - I_n(\tau,\mu)\right)\right). \tag{19}$$

Учитывая определение величины (13), из (19) находим

$$E_n^q(f)_{S^{(p,q)}} \le \frac{1}{I_n(\tau,\mu)}\int_0^\tau \left\|\Delta_{t/n} f(x)\right\|_{S^{(p,q)}}^q d\mu(t) \le \frac{1}{I_n(\tau,\mu)}\int_0^\tau \omega^q(f,t/n)_{S^{(p,q)}}\, d\mu(t). \tag{20}$$

Отсюда получаем (11) и соотношение

$$K_n^q(\tau) \le \inf_{\mu\in M(\tau)} \frac{\mu(\tau)-\mu(0)}{I_n(\tau,\mu)} = C_n^q(\tau). \tag{21}$$

Положим

$$\tilde W_{n,q} = \left\{\tilde\omega(t) = \sum_{k=n}^\infty \rho_k \left|\frac{P_k^\lambda(\cos t/n)}{P_k^\lambda(1)} - 1\right|^q : \rho_k \ge 0,\ \sum_{k=n}^\infty \rho_k = 1\right\},$$

$$\tilde I_{n,q}(\tau) = \inf_{\tilde\omega\in\tilde W_{n,q}} \|\tilde\omega\|_{C[0,\tau]}.$$

Принимая во внимание равенство

$$\omega^q(f,t)_{S^{(p,q)}} = \sup_{0<u\le t}\sum_{k=0}^\infty \left|\frac{P_k^\lambda(\cos u)}{P_k^\lambda(1)} - 1\right|^q \left\|Y_k^\lambda(f,x)\right\|_p^q, \tag{22}$$

а также соотношения (10) и (15), имеем

$$K_n^q(\tau) = \sup_{\rho_k\ge 0} \frac{\sum_{k=n}^\infty \rho_k}{\sup\limits_{0<u\le t} \sum_{k=n}^\infty \rho_k \left|\frac{P_k^\lambda(\cos u)}{P_k^\lambda(1)} - 1\right|^q}, \tag{23}$$

где $\sup$ рассматривается по всем последовательностям чисел ρ_k таких, что $\sum_{k=1}^\infty \rho_k < \infty$. Далее, повторяя рассуждения из [3] (см. также [4, с. 392]), приходим к равенству в соотношении (21).

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Для любой функции* $f(x) \in S^{(p,q)}(\sigma^m)$, $q \in [1,\infty)$, $p \in (0,\infty]$, *имеют место равенства*

$$E_n^q(f)_{S^{(p,q)}} \le \frac{1}{I_n(q)}\int_0^\pi \omega^q(f,t/n)_{S^{(p,q)}} \sin t\, dt, \quad n\in\mathbb{N}, \tag{24}$$

где

$$I_n(q) \;=\; \inf_{k\ge n}\int\limits_0^{\pi}\left|\frac{P_k^{\lambda}(\cos t/n)}{P_k^{\lambda}(1)}-1\right|^q \sin t\,dt. \qquad (25)$$

При этом

$$C_2(\lambda)\int\limits_0^{\pi} t^{2q}\sin t\,dt \;\le\; I_n(q) \;\le\; C_1(\lambda)\int\limits_0^{\pi} t^{2q}\sin t\,dt, \quad \lambda \;=\; \frac{m-2}{2}, \qquad (26)$$

и неравенство

$$E_n^q(f) \;\le\; C_3(\lambda)\,\frac{1}{\int_0^{\pi} t^{2q}\sin t\,dt}\int\limits_0^{\pi}\omega^q(f,\, t/n)_{S^{(p,q)}}\sin t\,dt \qquad (27)$$

неулучшаемо по порядку на множестве $S^{(p,q)}(\sigma^m)$, $C_i(\lambda)$, $i = 1, 2, 3,$ *— положительная константа, зависящая только от* λ.

Доказательство. Положим в неравенстве (20) $\tau = \pi$, $\mu(t) = 1 - \dfrac{P_1^{\lambda}(\cos t)}{P_1^{\lambda}(1)}$. Поскольку

$$P_1^{\lambda}(\cos t) \;=\; 2\binom{\lambda-1}{0}\binom{\lambda}{1}\cos t \;=\; 2\lambda\cos t,$$

$$P_1^{\lambda}(1) \;=\; \frac{\Gamma(1+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)} \;=\; \frac{2\lambda\Gamma(2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)} \;=\; 2\lambda,$$

то $\mu(t) = 1-\cos t$, где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция. Отсюда приходим к (24).

Известно [1, с. 242] (см. также [2, с. 255]) представление

$$\frac{P_n^{\lambda}(\cos t)}{P_n^{\lambda}(1)} - 1 \;=\; -\,\frac{n^2t^2}{2(2\lambda+1)} - \frac{nt^2\lambda}{2\lambda+1} + o(t^3), \qquad (28)$$

из которого, в частности, следуют неравенства

$$\left|\frac{P_n^{\lambda}(\cos t)}{P_n^{\lambda}(1)} - 1\right| \;\ge\; Cn^2t^2, \quad C \;=\; C(\lambda), \qquad (29)$$

$$\left|\frac{P_n^{\lambda}(\cos t)}{P_n^{\lambda}(1)} - 1\right| \;\le\; C_1n^2t^2, \quad C_1 \;=\; C_1(\lambda), \quad n\to\infty, \quad t\to 0. \qquad (30)$$

Исходя из (29), получаем

$$I_n(q) \;=\; \inf_{k\ge n}\int\limits_0^{\pi}\left|\frac{P_k^{\lambda}(\cos t/n)}{P_k^{\lambda}(1)}-1\right|^q \sin t\,dt \;\ge\; C\inf_{k\ge n}\left(\frac{k}{n}\right)^{2q}\int\limits_0^{\pi} t^{2q}\sin t\,dt \;=$$

$$=\; C\int\limits_0^{\pi} t^{2q}\sin t\,dt, \quad C \;=\; C(\lambda).$$

Аналогично, применяя (30), приходим к первому неравенству в (26), а значит, с учетом (24) получаем (27).

Покажем, что на всем множестве $S^{(p,q)}(\sigma^m)$ неравенство (27) по порядку улучшить нельзя. Пусть

$$Y_n^*(x) \;=\; \sum_{j=1}^{a_n}\alpha_j^{(n)}Y_j^{(n)}(x)$$

— произвольная сферическая гармоника степени n.

Принимая во внимание (30) и (22), находим

$$\omega^q(Y_n^*, t/n) = \sup_{0<u\le t/n} \left\| \Delta_u Y_n^*(x) \right\|_{S^{(p,q)}}^q = \sup_{0<u\le t/n} \left| \frac{P_n^\lambda(\cos u)}{P_n^\lambda(1)} - 1 \right|^q \left\| Y_n^\lambda(Y_n^*, x) \right\|_p^q \le$$

$$\le C_1(\lambda) \sup_{0<u\le t/n} (u^2 n^2)^q \left\| Y_n^\lambda(Y_n^*, x) \right\|_p^q = C_1 t^{2q} \left\| Y_n^\lambda(Y_n^*, x) \right\|_p^q,$$

откуда

$$\int_0^\pi \omega^q(Y_n^*, t/n)_{S^{(p,q)}} \sin t\, dt \le C_1 \left\| Y_n^\lambda(Y_n^*, x) \right\|_p^q \int_0^\pi t^{2q} \sin t\, dt = C_1 \int_0^\pi t^{2q} \sin t\, dt\, E_n^q(Y_n^*)_{S^{(p,q)}}$$

и

$$E_n^q(Y_n^*)_{S^{(p,q)}} \ge \frac{C_2}{\int_0^\pi t^{2q} \sin t\, dt} \int_0^\pi \omega^q(Y_n^*, t/n)_{S^{(p,q)}} \sin t\, dt, \quad C_2 = C_2(\lambda).$$

Теорема 2 доказана.

Вследствие того что

$$\int_0^\pi t^{2q} \sin t\, dt \ge \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2q} \int_{\pi/2}^\pi \sin t\, dt \ge 1,$$

приходим к следующему утверждению.

***Следствие* 1.** *Для любой функции* $f(x) \in S^{(p,q)}(\sigma^m)$, $q \in [1, \infty)$, $p \in (0, \infty]$, *имеют место неравенства*

$$E_n(f)_{S^{(p,q)}} \le C\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_{S^{(p,q)}}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{31}$$

где $C = C(\lambda)$ — *положительная константа, зависящая только от* λ.

Пусть $S^{(p,\infty)}(\sigma^m)$ — множество функций $f \in L(\sigma^m)$ с конечной нормой

$$\| f(x) \|_{S^{(p,\infty)}} = \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \left\| Y_k^\lambda(f, x) \right\|_p, \quad p \in (0, \infty],$$

где $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$,

$$\omega(f, t)_{S^{(p,\infty)}} = \sup_{0<u\le t} \left\| \Delta_u f(x) \right\|_{S^{(p,\infty)}}.$$

Функция $\omega(f, t)_{S^{(p,\infty)}}$ не убывает при $t > 0$ и $\omega(f, t)_{S^{(p,\infty)}} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$.

Теорема 3. *Для любой функции* $f(x) \in S^{(p,\infty)}(\sigma^m)$, $p \in (0, \infty]$, *выполняется неравенство*

$$E_n(f)_{S^{(p,\infty)}} \le C\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad C = C(\lambda),$$

причем данное неравенство на множестве $S^{(p,\infty)}(\sigma^m)$ *по порядку улучшить нельзя.*

Доказательство. Для любой $f \in S^{(p,\infty)}(\sigma^m)$

$$E_n(f)_{S^{(p,\infty)}} = \left\| f(x) - S_{n-1}^\lambda(f, x) \right\|_{S^{(p,\infty)}} = \max_{k\ge n} \left\| Y_k^\lambda(f, x) \right\|_p.$$

Тогда с учетом (29) получаем

$$\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_{S^{(p,\infty)}} = \sup_{0<u\le\pi/n} \left\|\Delta_u f(x)\right\|_{S^{(p,\infty)}} =$$

$$= \sup_{0<u\le\pi/n} \max_{k\in\mathbb{N}_0} \left|\frac{P_k^\lambda(\cos u)}{P_k^\lambda(1)} - 1\right| \left\|Y_k^\lambda(f, x)\right\|_p \ge$$

$$\ge C \max_{k\ge n} \left\|Y_k^\lambda(f, x)\right\|_p \sup_{0<u\le\pi/n} k^2u^2 \ge C \max_{k\ge n} \left\|Y_k^\lambda(f, x)\right\|_p = CE_n(f)_{S^{(p,\infty)}},$$

$$C = C(\lambda).$$

Отсюда приходим к требуемому неравенству.

Пусть теперь $f\in S^{(p,\infty)}(\sigma^m)$, для которой $\left\|Y_k^\lambda(f, x)\right\|_p = 0$ при всех $k < n$. В силу оценки (18)

$$\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_{S^{(p,\infty)}} = \sup_{0<u\le\pi/n} \max_{k\ge n} \left|\frac{P_k^\lambda(\cos u)}{P_k^\lambda(1)} - 1\right| \left\|Y_k^\lambda(f, x)\right\|_p =$$

$$= \max_{k\ge n} \left\|Y_k^\lambda(f, x)\right\|_p \sup_{0<u\le\pi/n} \left|\frac{P_k^\lambda(\cos u)}{P_k^\lambda(1)} - 1\right| \le 2E_n(f)_{S^{(p,\infty)}}.$$

Таким образом,

$$E_n(f)_{S^{(p,\infty)}} \ge \frac{1}{2}\,\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_{S^{(p,\infty)}},$$

и теорема 3 доказана.

3. Обратные теоремы. Основным в этом направлении является следующее утверждение.

Теорема 4. *Для любой функции* $f(x)\in S^{(p,q)}(\sigma^m)$, $q \in [1, \infty)$, $p \in (0, \infty]$, *выполняется неравенство*

$$\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_{S^{(p,q)}} \le \frac{C}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(k^{2q} - (k-1)^{2q}\right)E_k^q(f)_{S^{(p,q)}}\right)^{1/q}, \quad n\in\mathbb{N}, \tag{32}$$

где $C = C(\lambda)$ *— положительная константа, зависящая только от* λ. *При этом неравенство* (32) *на множестве* $S^{(p,q)}(\sigma^m)$ *по порядку улучшить нельзя.*

Доказательство. Пусть $f(x)\in S^{(p,q)}(\sigma^m)$, $u \in (0, \pi/n]$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда на основании (7) имеем

$$\left\|\Delta_u f(x)\right\|^q_{S^{(p,q)}} = \sum_{k=0}^{n-1}\left|\frac{P_k^\lambda(\cos u)}{P_k^\lambda(1)} - 1\right|^q \left\|Y_k^\lambda(f, x)\right\|_p^q +$$

$$+ \sum_{k=n}^{\infty}\left|\frac{P_k^\lambda(\cos u)}{P_k^\lambda(1)} - 1\right|^q \left\|Y_k^\lambda(f, x)\right\|_p^q = I_1 + I_2. \tag{33}$$

В силу неравенства (18) и (10)

$$I_2 \le \sum_{k=n}^{\infty}\left(\left|\frac{P_k^\lambda(\cos u)}{P_k^\lambda(1)}\right| + 1\right)^q \left\|Y_k^\lambda(f, x)\right\|_p^q \le$$

$$\le 2^q \sum_{k=n}^{\infty}\left\|Y_k^\lambda(f, x)\right\|_p^q = 2^q E_n^q(f)_{S^{(p,q)}}. \tag{34}$$

Учитывая (30), находим

$$I_1 = \sum_{k=n}^{n-1} \left| \frac{P_k^\lambda(\cos u)}{P_k^\lambda(1)} - 1 \right|^q \left\| Y_k^\lambda(f, x) \right\|_p^q \le C^q \sum_{k=1}^{n-1} k^{2q} u^{2q} \left\| Y_k^\lambda(f, x) \right\|_p^q \le$$

$$\le C^q \frac{\pi^{2q}}{n^{2q}} \sum_{k=1}^{n-1} k^{2q} \left\| Y_k^\lambda(f, x) \right\|_p^q, \quad C = C(\lambda). \tag{35}$$

Согласно (34), (35) из (33) получаем

$$\left\| \Delta_u f(x) \right\|_{S^{(p,q)}}^q \le 2^q E_n^q(f)_{S^{(p,q)}} + \frac{C^q \pi^{2q}}{n^{2q}} \sum_{k=1}^{n-1} k^{2q} \left\| Y_k^\lambda(f, x) \right\|_p^q. \tag{36}$$

Затем применяем равенство (см., например, [4, с. 401])

$$\sum_{k=m}^{M} \alpha_k c_k = \alpha_m \sum_{k=m}^{\infty} c_k + \sum_{k=m+1}^{M} (\alpha_k - \alpha_{k-1}) \sum_{i=k}^{\infty} c_i - \alpha_M \sum_{k=M+1}^{\infty} c_k \tag{37}$$

при условии, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty,$$

где (α_k), $k \in \mathbb{N}$, — произвольная последовательность чисел $m, M \in \mathbb{N}$, $m \le M$.

Полагая в (37) $\alpha_k = k^{2q}$, $c_k = \left\| Y_k^\lambda(f, x) \right\|_p^q$, $m = 1$, $M = n - 1$, имеем

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^{2q} \left\| Y_k^\lambda(f, x) \right\|_p^q = \sum_{k=1}^{\infty} \left\| Y_k^\lambda(f, x) \right\|_p^q +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n-1} \left(k^{2q} - (k-1)^{2q}\right) \sum_{i=k}^{\infty} \left\| Y_i^\lambda(f, x) \right\|_p^q - (n-1)^{2q} \sum_{k=n}^{\infty} \left\| Y_k^\lambda(f, x) \right\|_p^q =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left(k^{2q} - (k-1)^{2q}\right) E_k^q(f)_{S^{(p,q)}} - (n-1)^{2q} E_n^q(f)_{S^{(p,q)}}. \tag{38}$$

Следовательно, из (36) с учетом (38) получаем

$$\left\| \Delta_u f(x) \right\|_{S^{(p,q)}}^q \le \frac{C^q \pi^{2q}}{n^{2q}} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(k^{2q} - (k-1)^{2q}\right) E_k^q(f)_{S^{(p,q)}} - (n-1)^{2q} E_n^q(f)_{S^{(p,q)}} \right) +$$

$$+ 2^q E_n^q(f)_{S^{(p,q)}} \le \frac{C_1^q \pi^{2q}}{n^{2q}} \sum_{k=1}^{n} \left(k^{2q} - (k-1)^{2q}\right) E_k^q(f)_{S^{(p,q)}}. \tag{39}$$

Из (39) следует (32).

Покажем, что (32) по порядку улучшить нельзя. Для любой функции $f \in$ $\in S^{(p,q)}(\sigma^m)$

$$\omega^q \left(f, \frac{\pi}{n} \right)_{S^{(p,q)}} \ge \left\| \Delta_{\pi/n} f(x) \right\|_{S^{(p,q)}}^q = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{P_k^\lambda(\cos \pi/n)}{P_k^\lambda(1)} - 1 \right|^q \left\| Y_k^\lambda(f, x) \right\|_p^q \ge$$

$$\ge \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{P_k^\lambda(\cos \pi/n)}{P_k^\lambda(1)} - 1 \right|^q \left\| Y_k^\lambda(f, x) \right\|_p^q \ge \frac{C_2^q \pi^{2q}}{n^{2q}} \sum_{k=1}^{n-1} k^{2q} \left\| Y_k^\lambda(f, x) \right\|_p^q, \quad C_2 = C_2(\lambda). \tag{40}$$

Применяя равенство (37) при $\alpha_k = k^{2q}$, $c_k = \left\|Y_k^\lambda(f, x)\right\|_p^q$, $m = 1$, $M = n$, из (40) находим

$$\omega^q\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_{S^{(p,q)}} \geq \frac{C_2^q \pi^{2q}}{n^{2q}}\left(\sum_{k=1}^{n}(k^{2q} - (k-1)^{2q})E_k^q(f)_{S^{(p,q)}} - n^{2q}E_{n+1}^q(f)_{S^{(p,q)}}\right). \quad (41)$$

Пусть $f = P_n$ — полином по сферическим гармоникам степени не выше n. Тогда $E_{n+1}(P_n)_{S^{(p,q)}} = 0$.

Следовательно, из (41) вытекает неравенство

$$\omega\left(P_n, \frac{\pi}{n}\right)_{S^{(p,q)}} \geq \frac{C_2\pi^2}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}(k^{2q} - (k-1)^{2q})E_k^q(P_n)_{S^{(p,q)}}\right)^{1/q}, \quad C_2 = C_2(\lambda).$$

Теорема доказана.

Из неравенства (32) получаем оценку

$$\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_{S^{(p,q)}} \leq \frac{C(2q)^{1/q}}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^{2q-1}E_k^q(f)_{S^{(p,q)}}\right)^{1/q}, \quad C = C(\lambda). \quad (42)$$

Отсюда, в частности, вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть* $f(x) \in S^{(p,q)}(\sigma^m)$, $q \in [1, \infty)$, $p \in (0, \infty]$, *и при некотором* $\alpha > 0$

$$E_n(f)_{S^{(p,q)}} = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$\omega(f, t)_{S^{(p,q)}} = \begin{cases} O(t^\alpha), & 0 < \alpha < 2, \\ O\left(t^2 |\ln t|^{1/q}\right), & \alpha = 2, \\ O(t^2), & \alpha > 2. \end{cases}$$

4. Пусть функция $\varphi(t)$ определена на $[0, \pi]$ и выполнены следующие условия:

1) $\varphi(t)$ монотонно возрастает и непрерывна на $[0, \pi]$;

2) $\varphi(0) = 0$.

В этом случае будем говорить, что φ принадлежит классу Φ.

Обозначим через $H^\omega_{S^{(p,q)}}(\sigma^m)$, $\omega \in \Phi$, класс всех функций $f \in S^{(p,q)}(\sigma^m)$, $q \in [1, \infty)$, $p \in (0, \infty]$, удовлетворяющих условию

$$\omega(f, t)_{S^{(p,q)}} \leq C\omega(t), \quad t \in (0, \pi], \quad (43)$$

где $C = C(f)$ — положительная постоянная, вообще говоря, зависящая от f.

Функция $\varphi \in \Phi$ удовлетворяет условию Бари (B_r), $r \geq 1$, если

$$\sum_{k=1}^{n} k^{r-1}\varphi\left(\frac{\pi}{k}\right) = O\left(n^r \varphi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right).$$

Теорема 5. *Пусть* $\omega(t) \in \Phi$ *такова, что* $\omega^q(t)$, $q \in [1, \infty)$, *удовлетворяет условию* (B_{2q}). *Тогда для того чтобы функция* $f \in S^{(p,q)}(\sigma^m)$, $p \in (0, \infty]$, *принадлежала классу* $H^\omega_{S^{(p,q)}}(\sigma^m)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$E_n(f)_{S^{(p,q)}} = O\left(\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\right). \tag{44}$$

Доказательство. Пусть $f \in H^{\omega}_{S^{(p,q)}}(\sigma^m)$. Тогда из (43) и (31) следует (44). С другой стороны, в силу (42)

$$\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_{S^{(p,q)}} \le \frac{C_1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^{2q-1} E_k^q(f)_{S^{(p,q)}}\right)^{1/q}, \quad f \in S^{(p,q)}(\sigma^m),$$

и с учетом (43) находим

$$\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_{S^{(p,q)}} = O\left(\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^{2q-1}\omega^q\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^{1/q}\right).$$

Вследствие того что $\omega^q(\cdot)$ удовлетворяет условию (B_{2q}), получаем

$$\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_{S^{(p,q)}} = O\left(\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\right),$$

и $f \in H^{\omega}_{S^{(p,q)}}(\sigma^m)$, так как $\omega(t_1 + t_2)_{S^{(p,q)}} \le \omega(t_1)_{S^{(p,q)}} + \omega(t_2)_{S^{(p,q)}}$.

Функция $\omega(t) = t^{\alpha}$ удовлетворяет условиям теоремы 5 при $\alpha \in (0, 2)$. Поэтому если $H^{\alpha}_{S^{(p,q)}}(\sigma^m)$ — класс $H^{\omega}_{S^{(p,q)}}(\sigma^m)$ при $\omega(t) = t^{\alpha}$, получаем такое утверждение.

Следствие 3. *Пусть* $\alpha \in (0, 2)$. *Для того чтобы функция* $f \in S^{(p,q)}(\sigma^m)$ *принадлежала классу* $H^{\alpha}_{S^{(p,q)}}(\sigma^m)$, $p \in (0, \infty]$, $q \in [1, \infty)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$E_n(f)_{S^{(p,q)}} = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right).$$

1. *Berens H., Butzer P. L., Pawelke S.* Limitierungsverfahren vor Reihen mehrdimensionaler Kugelfunktionen und deren Saturationsverhalten // Publs. Res. Inst. Math. Sci. A. – 1968. – **4**, № 2. – P. 201 – 268.
2. *Топурия С. Б.* Ряды Фурье – Лапласа на сфере. – Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1987. – 356 с.
3. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Прямы и обратные теоремы приближения функций в пространстве S^p // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 1. – С. 106 – 124.
4. *Степанец А. И.* Методы теории приближений // Математика та її застосування: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **40**, ч. 2. – 467 с.

Получено 03.03.2004,
после доработки — 04.05.2005