УДК 517.5

Ю. І. Харкевич, І. В. Кальчук (Волин. ун-т, Луцьк)

НАБЛИЖЕННЯ (ψ, β)-ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ ІНТЕГРАЛАМИ ВЕЙЄРШТРАССА

Asymptotic equalities are obtained for upper bounds of approximations of functions from the classes $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ and $L^{\psi}_{\beta,1}$ by the Weierstrass integrals.

Получены асимптотические равенства для верхних граней приближений функций из классов $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ и $L^{\psi}_{\beta,1}$ интегралами Вейєрштрасса.

1. Основні означення та допоміжні твердження. Нехай C — простір 2π-періодичних неперервних функцій, у якому норма задається за допомогою рівності $\|f\|_C = \max\limits_t \big|f(t)\big|$; L_∞ — простір 2π-періодичних вимірних суттєво обмежених функцій із нормою $\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}\limits_t \big|f(t)\big|$; L — простір 2π-періодичних сумовних на періоді функцій, в якому норма задається рівністю $\|f\|_L = \|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \big|f(t)\big| dt$.

У роботі О. І. Степанця [1] введено класи періодичних функцій таким чином.

Нехай $f(x) \in L$ і

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

— ряд Фур'є функції f.

Нехай, далі, $\psi(k)$ — довільна фіксована функція натурального аргументу і β — фіксоване дійсне число. Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k \cos\left(kx + \frac{\pi\beta}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\pi\beta}{2}\right)\right)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції φ, то цю функцію називають (ψ,β)-похідною функції $f(x)$ і позначають через $f^{\psi}_{\beta}(x)$. Множину усіх функцій $f(x)$, котрі задовольняють таку умову, позначають через L^{ψ}_{β}. Підмножину неперервних функцій із L^{ψ}_{β} позначають C^{ψ}_{β}. Якщо $f(x) \in L^{\psi}_{\beta}$ і $\left\|f^{\psi}_{\beta}(x)\right\|_1 \le 1$, то кажуть, що $f(x)$ належить класу $L^{\psi}_{\beta,1}$; якщо ж $f(x) \in C^{\psi}_{\beta}$ і $\left\|f^{\psi}_{\beta}(x)\right\|_\infty \le 1$, то $f(x)$ належить класу $C^{\psi}_{\beta,\infty}$.

При $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, класи $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ збігаються з класами W^r_β, які були введені Б. Надем [2], і $f^{\psi}_{\beta}(x) = f^{(r)}_{\beta}(x)$ — (r,β)-похідна в розумінні Вейля – Надя. Якщо, крім цього, $\beta = r$, $r \in N$, то f^{ψ}_{β} є похідною порядку r функції f, і при цьому класи $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ є відомими класами Соболєва W^r.

Наслідуючи О. І. Степанця [1], множину всіх опуклих донизу послідовностей $\psi(k)$, для яких $\lim\limits_{k\to\infty} \psi(k) = 0$, позначатимемо через $\mathfrak{M}$. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що послідовності $\psi(k)$ із множини $\mathfrak{M}$ є звуженнями на множині натуральних чисел деяких додатних неперервних опуклих донизу функцій $\psi(t)$

неперервного аргументу $t \geq 1$, що прямують до нуля на нескінченності. Множину таких функцій також будемо позначати через $\mathfrak{M}$. Отже, надалі

$$\mathfrak{M} = \left\{ \psi(t) \colon \psi(t) > 0, \quad \psi(t_1) - 2\psi\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) + \psi(t_2) \geq 0 \right.$$
$$\left. \forall t_1,\ t_2 \in [1, \infty), \lim_{t \to \infty} \psi(t) = 0 \right\},$$

а через $\mathfrak{M}'$ позначимо підмножину функцій $\psi(\cdot)$ з $\mathfrak{M}$, що задовольняють умову

$$\int\limits_1^\infty \frac{\psi(t)}{t} dt < \infty. \tag{2}$$

Далі, із множини $\mathfrak{M}$ виділимо підмножину $\mathfrak{M}_0$ за допомогою наступної характеристики. Нехай $\psi \in \mathfrak{M}$ і $\eta(t) = \eta(\psi; t)$ — функція, пов'язана з ψ рівністю $\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right)$, де ψ^{-1} — функція, обернена до функції ψ. Покладемо $\mu(t) = \mu(\psi; t) = \dfrac{t}{\eta(t) - t}$. Тоді

$$\mathfrak{M}_0 = \left\{ \psi \in \mathfrak{M} \colon 0 < \mu(\psi; t) \leq K \ \forall t \geq 1 \right\},$$

де K — константа, яка може залежати від ψ.

Нехай $f(x) \in L$. Величину

$$W_\delta(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty e^{-\frac{k^2}{\delta}} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right), \quad \delta > 0, \tag{3}$$

де a_k, b_k — коефіцієнти Фур'є функції f, називають інтегралом Вейєрштрасса (див., наприклад, [3, с. 150]).

Дану роботу присвячено вивченню асимптотичної поведінки при $\delta \to \infty$ величин

$$\mathcal{E}\left(C^\psi_{\beta,\infty}; W_\delta\right)_C = \sup_{f \in C^\psi_{\beta,\infty}} \left\| f(x) - W_\delta(f, x) \right\|_C, \tag{4}$$

$$\mathcal{E}\left(L^\psi_{\beta,1}; W_\delta\right)_1 = \sup_{f \in L^\psi_{\beta,1}} \left\| f(x) - W_\delta(f, x) \right\|_1. \tag{5}$$

Якщо в явному вигляді знайдено функцію $\varphi(\delta) = \varphi(\mathfrak{N}; \delta)$ таку, що при $\delta \to \infty$ $\mathcal{E}(\mathfrak{N}; W_\delta)_X = \varphi(\delta) + o(\varphi(\delta))$, то, наслідуючи О. І. Степанця [1, с. 198], будемо говорити, що розв'язано задачу Колмогорова – Нікольського для класу $\mathfrak{N}$ та інтеграла Вейєрштрасса в метриці простору X.

Відмітимо, що задача Колмогорова – Нікольського для інтегралів Вейєрштрасса на класах W^r_β, W^r та інших розглядалась в роботах Л. І. Баусова [4, 5], Я. С. Бугрова [6], В. А. Баскакова [7], Л. П. Фалалєєва [8].

Покладемо

$$\tau(u) = \tau_\delta(u, \psi) = \begin{cases} \left(1 - e^{-u^2}\right) \dfrac{\psi(1)}{\psi(\sqrt{\delta})}, & 0 \le u \le \dfrac{1}{\sqrt{\delta}}, \\ \left(1 - e^{-u^2}\right) \dfrac{\psi\left(\sqrt{\delta} u\right)}{\psi\left(\sqrt{\delta}\right)}, & u \ge \dfrac{1}{\sqrt{\delta}}, \end{cases} \tag{6}$$

де $\psi(u)$ — функція, визначена і неперервна при всіх $u \ge 1$. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що функція $\psi(u)$ має неперервну другу похідну на $[1; \infty)$.

Домовимось у цій роботі через K, K_i позначати сталі, взагалі кажучи, різні.

Наведемо означення та допоміжні твердження, що належать Л. І. Баусову [5] та О. І. Степанцю [1], які ми будемо використовувати в подальшому.

Означення [5]. *Нехай функція $\tau(u)$ є заданою на $[0, \infty)$, абсолютно неперервною і $\tau(\infty) = 0$. Кажуть, що функція $\tau(u)$ належить $\mathcal{E}_a$, якщо похідну $\tau'(u)$ в тих точках, де вона не існує, можна доозначити так, щоб для деякого $a \ge 0$ існували інтеграли $\int_0^{\frac{a}{2}} u|d\tau'(u)|$, $\int_{\frac{a}{2}}^{\infty} |u - a||d\tau'(u)|$.*

Теорема 1$'$ [5, с. 24]. *Нехай $\tau(u) \in \mathcal{E}_a$ і $\sin \dfrac{\beta\pi}{2} \tau(0) = 0$. Тоді для збіжності інтеграла*

$$A(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \right| dt \tag{7}$$

необхідно і достатньо, щоб збігались інтеграли

$$\left|\sin \frac{\beta\pi}{2}\right| \int_0^{\infty} \frac{|\tau(u)|}{u} du, \qquad \int_0^{a} \frac{|\tau(a-u) - \tau(a+u)|}{u} du.$$

При цьому справедливою є оцінка

$$\left| A(\tau) - \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \xi\left(\sin \frac{\beta\pi}{2} \tau(u), j_u \left[\tau(a-u) - \tau(a+u)\right] \right) \frac{du}{u} \right| \le K H(\tau),$$

де $\xi(A, B)$ — функція, введена в роботі [9] *таким чином*:

$$\xi(A, B) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} |A|, & |B| \le |A|, \\ |A| \arcsin \left| \dfrac{A}{B} \right| + \sqrt{B^2 - A^2}, & |B| > |A|, \end{cases} \qquad j_u = \begin{cases} 1, & 0 < u < a, \\ 0, & u \ge a, \end{cases}$$

$$H(\tau) = |\tau(0)| + |\tau(a)| + \int_0^{\frac{a}{2}} u \,|d\tau'(u)| + \int_{\frac{a}{2}}^{\infty} |u - a| \,|d\tau'(u)| \,. \tag{8}$$

Якщо $\dfrac{2}{\pi} \left|\sin \dfrac{\beta\pi}{2}\right| \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{|\tau(u)|}{u} du \ge \frac{4}{\pi^2} \int_0^{a} \frac{|\tau(a-u) - \tau(a+u)|}{u} du$, *то*

$$\left|A(\tau) - \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int\limits_0^\infty \frac{|\tau(u)|}{u}du\right| \le K\left(\int\limits_0^a \frac{|\tau(a-u)-\tau(a+u)|}{u}du + H(\tau)\right); \quad (9)$$

якщо ж $\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int_0^\infty \frac{|\tau(u)|}{u}du \le \frac{4}{\pi^2}\int_0^a \frac{|\tau(a-u)-\tau(a+u)|}{u}du$, *то*

$$\left|A(\tau) - \frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^a \frac{|\tau(a-u)-\tau(a+u)|}{u}du\right| \le K\left(\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int\limits_0^\infty \frac{|\tau(u)|}{u}du + H(\tau)\right). \quad (10)$$

Теорема 2′ [1, с. 161]. *Функція* $\psi \in \mathfrak{M}$ *належить до* $\mathfrak{M}_0$ *тоді і лише тоді, коли величина*

$$\alpha(t) = \frac{\psi(t)}{t\,|\psi'(t)|}, \qquad \psi'(t) := \psi'(t+0) \quad (11)$$

задовольняє умову $\alpha(t) \ge K > 0 \ \forall t \ge 1$.

Теорема 3′ [1, с. 175]. *Для того щоб функція* $\psi \in \mathfrak{M}$ *належала до* $\mathfrak{M}_0$, *необхідно і достатньо, щоб існувала стала* K *така, щоб при всіх* $t \ge 1$ *виконувалась нерівність* $\frac{\psi(t)}{\psi(ct)} \le K$, *де* c — *довільна стала, що задовольняє умову* $c > 1$.

2. Асимптотичні оцінки для верхніх меж відхилень інтегралів Вейєрштрасса від функцій із класів $C^\psi_{\beta,\infty}$. Нам буде потрібне наступне твердження, що є аналогом леми 1 роботи [10].

Лема 1. *Якщо для функції* $\tau(u)$, *що задана за допомогою співвідношення* (6), *її перетворення* $\hat\tau_\beta(t)$ *вигляду*

$$\hat\tau_\beta(t) = \hat\tau(t,\beta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \tau(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du \quad (12)$$

є сумовним на всій числовій осі, то справджується рівність

$$\mathcal{E}\left(C^\psi_{\beta,\infty}; W_\delta\right)_C = \psi(\sqrt{\delta})A(\tau) + O\left(\psi\left(\sqrt{\delta}\right)\int\limits_{|t|\ge\frac{\sqrt{\delta}\,\pi}{2}} |\hat\tau_\beta(t)|\,dt\right), \quad (13)$$

де величина $A(\tau)$ *визначена рівністю* (7).

Теорема 1. *Нехай* $\psi \in \mathfrak{M}_0' = \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}'$, *функція* $g(u) = u^2\psi(u)$ *є опуклою догори або донизу на* $[b;\infty)$, $b \ge 1$. *Тоді при* $\delta \to \infty$ *має місце рівність*

$$\mathcal{E}\left(C^\psi_{\beta,\infty}; W_\delta\right)_C = \psi(\sqrt{\delta})A(\tau) + O\left(\frac{1}{\delta} + \frac{\psi(\sqrt{\delta})}{\sqrt{\delta}}\right), \quad (14)$$

де величина $A(\tau)$ *означається за допомогою рівності* (7) *і для неї справедливою є оцінка*

$$A(\tau)=\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_1^{\sqrt{\delta}}u\psi(u)du+\frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\sqrt{\delta}}^{\infty}\frac{\psi(u)}{u}du\right)+$$

$$+O\left(1+\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\right). \tag{15}$$

Доведення. Перевіримо виконання умови леми 1. Для цього покажемо сумовність перетворення функції $\tau(u)$ вигляду (12), тобто збіжність інтеграла (7). Згідно з теоремою $1'$, знайдемо оцінки наступних інтегралів:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}}u\left|d\tau'(u)\right|,\qquad \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}|u-1|\left|d\tau'(u)\right|, \tag{16}$$

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int\limits_0^{\infty}\frac{|\tau(u)|}{u}du,\qquad \int\limits_0^1\frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)|}{u}du. \tag{17}$$

Для оцінки першого інтеграла з (16) розіб'ємо проміжок $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ на дві частини: $\left[0;\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$ і $\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}};\frac{1}{2}\right]$ (при $\delta>4b^2$).

Враховуючи, що $\tau''(u)\geq 0$ на $\left[0;\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$, а також нерівність

$$e^{-u^2}\leq 1,\quad u\in R, \tag{18}$$

одержуємо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}u\left|d\tau'(u)\right|=\frac{\psi(1)}{\psi(\sqrt{\delta})}\left(\frac{2}{\delta}e^{-\frac{1}{\delta}}-1+e^{-\frac{1}{\delta}}\right)=O\left(\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\right),\quad \delta\to\infty. \tag{19}$$

Нехай тепер $u\in\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}};\frac{1}{2}\right]$. Покладемо

$$\tau_1(u)=\left(1-e^{-u^2}-u^2\right)\frac{\psi(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})},\qquad \tau_2(u)=u^2\frac{\psi(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})}, \tag{20}$$

тоді

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}}u\left|d\tau'(u)\right|\leq\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}}u\left|d\tau_1'(u)\right|+\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}}u\left|d\tau_2'(u)\right|. \tag{21}$$

Знайдемо оцінку першого інтеграла в правій частині нерівності (21). Оскільки

$$\tau_1''(u) = \left(1 - e^{-u^2} - u^2\right) \frac{\delta\psi''(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})} + 4u\left(e^{-u^2} - 1\right) \frac{\sqrt{\delta}\psi'(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})} +$$

$$+ 2\left(e^{-u^2} - 2u^2 e^{-u^2} - 1\right) \frac{\psi(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})}, \tag{22}$$

то, враховуючи нерівності

$$e^{-u^2} + u^2 - 1 \le \frac{u^4}{2}, \qquad 1 - e^{-u^2} \le u^2,$$
$$2u^2 e^{-u^2} - e^{-u^2} + 1 \le 3u^2, \quad u \in R, \tag{23}$$

маємо

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u|d\tau_1'(u)| \le \frac{\delta}{2\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^5 \psi''(\sqrt{\delta}u)du + \frac{4\sqrt{\delta}}{\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^4 |\psi'(\sqrt{\delta}u)|du +$$

$$+ \frac{6}{\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^3 \psi(\sqrt{\delta}u)du.$$

Зінтегрувавши перший інтеграл у правій частині останньої нерівності частинами та скориставшись теоремами $2'$ та $3'$, отримаємо

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u|d\tau_1'(u)| \le \frac{\sqrt{\delta}|\psi'(\frac{\sqrt{\delta}}{2})|}{2^6\psi(\sqrt{\delta})} + \frac{|\psi'(1)|}{2\delta^2\psi(\sqrt{\delta})} + \frac{13\sqrt{\delta}}{2\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^4 |\psi'(\sqrt{\delta}u)|du +$$

$$+ \frac{6}{\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^3 \psi(\sqrt{\delta}u)du \le$$

$$\le K_1 + \frac{K_2}{\delta^2\psi(\sqrt{\delta})} + \frac{K_3}{\psi(\sqrt{\delta})} \left(\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}} + \int\limits_{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} \right) u^3 \psi(\sqrt{\delta}u)du. \tag{24}$$

Тут і далі будемо вважати, що $\psi'(1) = \psi'(1+0)$.

Оскільки функція $g(u) = u^2\psi(u)$ є обмеженою на $[1; b]$, то

$$\frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}} u^3 \psi(\sqrt{\delta}u)du = \frac{1}{\delta^2\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_1^b u^3 \psi(u)\, du \le$$

$$\le \frac{K}{\delta^2\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_1^b u\, du = O\left(\frac{1}{\delta^2\psi(\sqrt{\delta})}\right), \quad \delta \to \infty. \tag{25}$$

Враховуючи опуклість догори або донизу функції $g(u)=u^2\psi(u)$ при $u\geq b$, знаходимо

$$\int\limits_{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^3\psi(\sqrt{\delta}u)du \leq \int\limits_{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}^{1} u^3\psi(\sqrt{\delta}u)du \leq \frac{1}{\delta\sqrt{\delta}\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{b}^{\sqrt{\delta}} u^2\psi(u)du =$$

$$= O\left(1+\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\right), \quad \delta\to\infty. \tag{26}$$

З огляду на (25) та (26) із (24), маємо

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u|d\tau_1'(u)| = O\left(1+\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\right), \quad \delta\to\infty. \tag{27}$$

Оцінимо другий інтеграл у правій частині нерівності (21). Враховуючи, що при $u\geq\dfrac{1}{\sqrt{\delta}}$

$$\tau_2''(u) = 2\frac{\psi(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})} + 4u\frac{\sqrt{\delta}\psi'\left(\sqrt{\delta}u\right)}{\psi(\sqrt{\delta})} + u^2\frac{\delta\psi''(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})},$$

при $\delta>4b^2$ отримуємо

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}} u\,|d\tau_2'(u)| \leq \frac{\delta}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}} u^3\psi''(\sqrt{\delta}u)\,du +$$

$$+\frac{4\sqrt{\delta}}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}} u^2\left|\psi'(\sqrt{\delta}u)\right|\,du + \frac{2}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}} u\psi(\sqrt{\delta}u)\,du.$$

Зінтегрувавши частинами перший інтеграл у правій частині останньої нерівності двічі, а другий — один раз і врахувавши, що функція $\psi(u)$ є спадною на $[1;\infty)$, одержимо

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}} u\,|d\tau_2'(u)| \leq \frac{\sqrt{\delta}}{\psi(\sqrt{\delta})}u^3\psi'\left(\sqrt{\delta}u\right)\Bigg|_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}} -$$

$$-\frac{7}{\psi(\sqrt{\delta})}u^2\psi(\sqrt{\delta}u)\Bigg|_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}} + \frac{16}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}} u\psi(\sqrt{\delta}u)du =$$

$$= O\left(\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\right). \tag{28}$$

Оскільки функція $g(u) = u^2\psi(u)$ є опуклою на $[b;\infty)$, то

$$\int\limits_{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u|d\tau_2'(u)| = \left|\int\limits_{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} ud\tau_2'(u)\right| = \left|(u\tau_2'(u) - \tau_2(u))\right|_{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}}\Bigg| =$$

$$= O\left(1 + \frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\right). \tag{29}$$

Таким чином, із співвідношень (19), (21), (27) – (29) випливає, що

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} u\,|d\tau'(u)| = O\left(1 + \frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\right), \quad \delta \to \infty. \tag{30}$$

Оцінимо другий інтеграл з (16). Оскільки, згідно з (6), при $u \geq \dfrac{1}{\sqrt{\delta}}$

$$\tau''(u) = \left(1 - e^{-u^2}\right)\frac{\delta\psi''(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})} + 4ue^{-u^2}\frac{\sqrt{\delta}\psi'(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})} +$$

$$+ 2\left(e^{-u^2} - 2u^2e^{-u^2}\right)\frac{\psi(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})}, \tag{31}$$

а також $|u-1| \leq u$, $u \in \left[\dfrac{1}{2};\infty\right)$, та виконуються нерівності

$$1 - e^{-u^2} \leq 1, \qquad u^2e^{-u^2} \leq 1, \qquad \left|u - 2u^3\right|e^{-u^2} \leq \frac{2}{u^2}, \quad u \in R, \tag{32}$$

отримуємо

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} |u-1||d\tau'(u)| \leq \frac{\delta}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} u\psi''\left(\sqrt{\delta}u\right)du +$$

$$+ \frac{4\sqrt{\delta}}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}\left|\psi'\left(\sqrt{\delta}u\right)\right|du + \frac{4}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}\frac{\psi(\sqrt{\delta}u)}{u^2}du. \tag{33}$$

Зінтегрувавши частинами перший інтеграл у правій частині нерівності (33), а також застосувавши теореми $2'$ та $3'$, одержимо

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} |u-1|\,|d\tau'(u)| = O(1), \quad \delta \to \infty. \tag{34}$$

Для оцінки першого інтеграла з (17) розіб'ємо проміжок $[0,\infty)$ на три частини: $\left[0, \dfrac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$, $\left[\dfrac{1}{\sqrt{\delta}}, 1\right]$, $[1,\infty)$.

Нехай $u \in \left[0, \dfrac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$. Враховуючи (6) та друге співвідношення із (23), маємо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{|\tau(u)|}{u} du = \frac{\psi(1)}{\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} (1 - e^{-u^2}) \frac{du}{u} \leq \frac{\psi(1)}{\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u du \leq \frac{K}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}. \tag{35}$$

Згідно з (6), у випадку $u \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{\delta}}, 1\right]$

$$\left| \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1} \frac{\tau(u)}{u} du - \frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1} u\psi(\sqrt{\delta}u) du \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1} \frac{|1 - e^{-u^2} - u^2|}{u} \psi(\sqrt{\delta}u) du.$$

Оскільки має місце перша нерівність з (23) та оцінки (25), (26), то

$$\left| \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1} \frac{\tau(u)}{u} du - \frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1} u\psi(\sqrt{\delta}u) du \right| \leq \frac{1}{2\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1} u^3 \psi(\sqrt{\delta}u) du =$$

$$= \frac{1}{2\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}} u^3 \psi(\sqrt{\delta}u) du + \frac{1}{2\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}^{1} u^3 \psi(\sqrt{\delta}u) du =$$

$$= O\left(1 + \frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\right).$$

Із останніх співвідношень випливає, що

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1} \frac{|\tau(u)|}{u} du = \frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_1^{\sqrt{\delta}} u\psi(u) du + O\left(1 + \frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\right), \quad \delta \to \infty. \tag{36}$$

Нехай, нарешті, $u \in [1, \infty)$. Оскільки

$$\left| \int\limits_1^{\infty} \frac{\tau(u)}{u} du - \frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_1^{\infty} \frac{\psi(\sqrt{\delta}u)}{u} du \right| \leq \frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_1^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} \psi(\sqrt{\delta}u) du \leq K,$$

то

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{|\tau(u)|}{u} du = \frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{\sqrt{\delta}}^{\infty} \frac{\psi(u)}{u} du + O(1). \tag{37}$$

Об'єднавши співвідношення (35) – (37), одержимо

$$\int_0^\infty \frac{|\tau(u)|}{u} du = \frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})} \int_1^{\sqrt{\delta}} u\psi(u) du + \frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})} \int_{\sqrt{\delta}}^\infty \frac{\psi(u)}{u} du + O\left(1 + \frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\right). \quad (38)$$

Оцінимо другий інтеграл із (17). Для функції $\tau(u)$, заданої за допомогою співвідношення (6), згідно з лемою 1 роботи [11], для всіх $\psi \in \mathfrak{M}_0$ має місце рівність

$$\int_0^1 \frac{|\tau(1-u) - \tau(1+u)|}{u} du = \int_0^1 \frac{|\lambda(1-u) - \lambda(1+u)|}{u} du + O\big(H(\tau)\big), \qquad (39)$$

де $H(\tau)$ означається за допомогою рівності (8), а $\lambda(u) = e^{-u^2}$.

Використовуючи те, що

$$\int_0^1 \frac{|\lambda(1-u) - \lambda(1+u)|}{u} du = \int_0^1 \frac{e^{-(1-u)^2} - e^{-(1+u)^2}}{u} du = O(1),$$

а також співвідношення (30) та (34), із (39) отримуємо

$$\int_0^1 \frac{|\tau(1-u) - \tau(1+u)|}{u} du = O\left(1 + \frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\right), \quad \delta \to \infty. \qquad (40)$$

Отже, враховуючи формули (30), (34), (38) і (40), згідно з теоремою 1′, переконуємося в тому, що перетворення функції $\tau(u)$ вигляду (12) є сумовним на всій числовій осі. Тому, згідно з лемою 1, виконується рівність (13). Із нерівностей (9) і (10) з урахуванням формул (30), (34), (38) і (40) отримуємо співвідношення (15).

Оцінимо залишковий член у правій частині рівності (13):

$$\hat{\tau}_\beta(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} + \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^\infty \right) \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du. \tag{41}$$

Зінтегруємо двічі частинами інтеграли у правій частині рівності (41):

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du = \frac{1}{t} \left(1 - e^{-\frac{1}{\delta}}\right) \frac{\psi(1)}{\psi(\sqrt{\delta})} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} t + \frac{\beta\pi}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{t^2} \frac{2e^{-\frac{1}{\delta}}\psi(1)}{\sqrt{\delta}\psi(\sqrt{\delta})} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} t + \frac{\beta\pi}{2}\right) - \frac{1}{t^2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \tau''(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du, \qquad (42)$$

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\infty} \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du = -\frac{1}{t}\left(1 - e^{-\frac{1}{\delta}}\right) \frac{\psi(1)}{\psi(\sqrt{\delta})} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}t + \frac{\beta\pi}{2}\right) -$$

$$-\frac{1}{t^2}\left(\frac{2e^{-\frac{1}{\delta}}\psi(1)}{\sqrt{\delta}\psi(\sqrt{\delta})} + \left(1 - e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\frac{\sqrt{\delta}\psi'(1)}{\psi(\sqrt{\delta})}\right) \cos\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}t + \frac{\beta\pi}{2}\right) -$$

$$-\frac{1}{t^2} \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\infty} \tau''(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du. \tag{43}$$

Підставляючи (42), (43) в (41), отримуємо

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du = -\frac{1}{\pi t^2} \int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \tau''(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du-$$

$$-\frac{1}{\pi t^2} \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\infty} \tau''(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du -$$

$$-\frac{1}{\pi t^2}\left(1 - e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\frac{\sqrt{\delta}\psi'(1)}{\psi(\sqrt{\delta})} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}t + \frac{\beta\pi}{2}\right),$$

звідки

$$\left|\frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi t^2}\left(\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1} + \int\limits_{1}^{\infty}\right) |\tau''(u)| du + \frac{1}{t^2}\frac{K}{\sqrt{\delta}\psi(\sqrt{\delta})}. \tag{44}$$

Враховуючи, що $\tau''(u) \geq 0$ на $\left[0, \dfrac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$, і нерівність (18), дістаємо

$$\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} |\tau''(u)| du = \int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \tau''(u) du = \frac{2\psi(1)}{\sqrt{\delta}\psi(\sqrt{\delta})} e^{-\frac{1}{\delta}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}\psi(\sqrt{\delta})}\right), \quad \delta \to \infty. \tag{45}$$

Нехай $u \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{\delta}}, 1\right]$. Міркуючи, як і при оцінюванні першого інтеграла з (16) на проміжку $\left[\dfrac{1}{\sqrt{\delta}}, \dfrac{1}{2}\right]$ (див. (20)–(29)), можна показати, що має місце оцінка

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1} |\tau''(u)| du = O\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\delta}\psi(\sqrt{\delta})}\right), \quad \delta \to \infty. \tag{46}$$

Нехай тепер $u \in [1, \infty)$. Використовуючи рівність (31), першу нерівність з (32), нерівності

$$ue^{-u^2} \leq 1, \qquad (2u^2-1)e^{-u^2} \leq \frac{1}{u^2}, \quad u \in R,$$

а також теорему $3'$, маємо

$$\int_1^\infty |\tau''(u)|du \leq \frac{\delta}{\psi(\sqrt{\delta})}\int_1^\infty \psi''(\sqrt{\delta}u)du + \frac{4\sqrt{\delta}}{\psi(\sqrt{\delta})}\int_1^\infty \left|\psi'(\sqrt{\delta}u)\right| du +$$

$$+ \frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})}\int_1^\infty \frac{\psi(\sqrt{\delta}u)}{u^2}du = O(1). \tag{47}$$

Об'єднуючи формули (45) – (47) із (44), отримуємо

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right| = O\left(1+\frac{1}{\sqrt{\delta}\psi(\sqrt{\delta})}\right)\frac{1}{t^2}.$$

Звідси

$$\int\limits_{|t|\geq\frac{\sqrt{\delta}\pi}{2}} \left|\hat{\tau}_\beta(t)\right|dt = O\left(\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}+\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right). \tag{48}$$

Із співвідношень (48) та (13) видно, що має місце рівність (14).

Теорему 1 доведено.

Слід відмітити, що при $\psi(u) = \dfrac{1}{u^r}$, $r < 2$, теорему 1 отримано в роботі Л. І. Баусова [5, с. 31].

***Наслідок* 1.** *Якщо виконуються умови теореми* 1, $\sin\dfrac{\beta\pi}{2} \neq 0$ *і* $\lim\limits_{t\to\infty}\alpha(t) = \infty$, *де величина* $\alpha(t)$ *означена рівністю* (11), *то при* $\delta \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(C^\psi_{\beta,\infty}; W_\delta\right)_C = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int_{\sqrt{\delta}}^\infty \frac{\psi(u)}{u}du + O\left(\psi(\sqrt{\delta})\right). \tag{49}$$

Доведення. Якщо $\psi \in \mathfrak{M}'_0$ і $\lim\limits_{t\to\infty}\alpha(t) = \infty$, то для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $u_0 \geq 1$, що при $u > u_0$ $(u^\varepsilon\psi(u))' > 0$, тобто функція $u^\varepsilon\psi(u)$ зростає, починаючи з деякого числа u_0, і $\lim\limits_{u\to\infty}u^\varepsilon\psi(u) = \infty$. Отже, при достатньо великих δ і $0 < \varepsilon < 2$

$$\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\int_1^{\sqrt{\delta}} u\psi(u)du \leq \frac{(\sqrt{\delta})^\varepsilon\psi(\sqrt{\delta})}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\int_1^{\sqrt{\delta}}\frac{du}{u^{\varepsilon-1}} = O(1). \tag{50}$$

Використовуючи правило Лопіталя і те, що $\lim\limits_{t\to\infty}\alpha(t) = \infty$, маємо

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int\limits_x^\infty \frac{\psi(u)}{u} du}{\psi(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x|\psi'(x)|} = \infty. \tag{51}$$

Враховуючи, що

$$\frac{1}{\delta} + \frac{\psi(\sqrt{\delta})}{\sqrt{\delta}} = o\left(\psi(\sqrt{\delta})\right), \tag{52}$$

а також співвідношення (50) та (51), із (14), (15) отримуємо (49).

Прикладом функцій, які задовольняють умови наслідку 1, є функції вигляду $\psi(u) = \dfrac{1}{\ln^\alpha(u+K)}$, де $\alpha > 1$, $K > 0$.

Наслідок 2. *Нехай* $\psi \in \mathfrak{M}_0$, $\sin\dfrac{\beta\pi}{2} \neq 0$, *функція* $u^2\psi(u)$ *є опуклою догори або донизу при* $u \geq b \geq 1$ *і*

$$\lim_{u\to\infty} u^2\psi(u) = \infty, \tag{53}$$

$$\lim_{\delta\to\infty} \frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_1^{\sqrt{\delta}} u\psi(u)du = \infty. \tag{54}$$

Тоді при $\delta \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(C^\psi_{\beta,\infty}; W_\delta\right)_C = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \frac{1}{\delta} \int\limits_1^{\sqrt{\delta}} u\psi(u)du + O\left(\psi(\sqrt{\delta})\right). \tag{55}$$

Доведення. Якщо функція ψ задовольняє умови (53) і (54), то, використовуючи правило Лопіталя, маємо

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int\limits_1^x u\psi(u)}{x^2\psi(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\psi(x)}{2x\psi(x) + x^2\psi'(x)} = \frac{1}{2 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x\psi'(x)}{\psi(x)}} = \infty.$$

Звідси

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\psi'(x)}{\psi(x)} = -2. \tag{56}$$

Враховуючи (51) та (56), одержуємо

$$\int\limits_{\sqrt{\delta}}^\infty \frac{\psi(u)}{u} du = O\left(\psi(\sqrt{\delta})\right).$$

Використовуючи останню оцінку та співвідношення (14), (15), (52) – (54), одержуємо (55).

Відмітимо, що умови наслідку 2 задовольняють, наприклад, функції вигляду $\psi(u) = \dfrac{1}{u^2}\ln^\alpha(u+K)$, $K > 0$, $\alpha > 0$.

***Наслідок* 3.** *Нехай* $\psi \in \mathfrak{M}_0$, $\sin\dfrac{\beta\pi}{2} \neq 0$, *функція* $u^2\psi(u)$ *є опуклою донизу при* $u \geq b \geq 1$ *і*

$$\lim_{u\to\infty} u^2\psi(u) = K < \infty, \tag{57}$$

$$\lim_{\delta\to\infty} \int\limits_1^{\sqrt{\delta}} u\psi(u)du = \infty. \tag{58}$$

Тоді при $\delta \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; W_\delta\right)_C = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \frac{1}{\delta}\int\limits_1^{\sqrt{\delta}} u\psi(u)du + O\left(\frac{1}{\delta}\right). \tag{59}$$

Доведення. Оскільки функція $u^2\psi(u)$ є опуклою донизу на проміжку $[b;\infty)$, $b \geq 1$, та задовольняє умову (57), то робимо висновок, що вона монотонно спадає при $u \geq b$. Отже, при $\delta > b^2$ маємо

$$\int\limits_{\sqrt{\delta}}^{\infty} \frac{\psi(u)}{u}du \leq \int\limits_{\sqrt{\delta}}^{\infty} \frac{u^2\psi(u)}{u^3}du \leq \delta\psi(\sqrt{\delta})\int\limits_{\sqrt{\delta}}^{\infty} \frac{1}{u^3}du = O\left(\psi(\sqrt{\delta})\right),$$

$$\psi(\sqrt{\delta}) = O\left(\frac{1}{\delta}\right).$$

Використовуючи останні оцінки та співвідношення (14), (15), (57), (58), отримуємо (59).

Прикладом функцій ψ, для яких має місце наслідок 3, є функції вигляду $\psi(u) = \dfrac{1}{u^2}(K + e^{-u})$, $\psi(u) = \dfrac{1}{u^2\ln^{\alpha}(u+K)}$, $K > 0$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Зокрема, при $\psi(u) = \dfrac{1}{u^2}$ із (59) одержуємо асимптотичну рівність

$$\mathcal{E}\left(W^2_\beta; W_\delta\right)_C = \frac{1}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \frac{\ln\delta}{\delta} + O\left(\frac{1}{\delta}\right),$$

яку було отримано в роботі Л. І. Баусова [5, с. 31].

Зауважимо, що при виконанні умов наслідків 1 – 3 рівності (49), (55) і (59) дають розв'язок задачі Колмогорова – Нікольського для інтегралів Вейєрштрасса W_δ на класах $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ у рівномірній метриці.

Нехай G — множина функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, що задовольняють наступну умову: для довільної сталої $K > 0$ існує така точка $u_0 = u_0(K) \geq 1$, що при $u > u_0$ для функції $\alpha(u)$ вигляду (11) виконується нерівність $\alpha(u) < \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{K}{u^2}\right)$.

Теорема 2. *Нехай* $\psi \in G$, *функція* $g(u) = u^2\psi(u)$ *є опуклою донизу на* $[b;\infty)$, $b \geq 1$, *і*

$$\int\limits_1^{\infty} u\psi(u)du < \infty. \tag{60}$$

Тоді при $\delta\to\infty$ має місце асимптотична рівність

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty};W_\delta\right)_C =$$

$$= \frac{1}{\delta}\sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}}\left\|f_0^{(2)}(x)\right\|_C + O\left(\frac{1}{\delta\sqrt{\delta}}\int\limits_1^{\sqrt{\delta}} t^2\psi(t)dt + \frac{1}{\delta}\int\limits_{\sqrt{\delta}}^{\infty} t\psi(t)dt\right), \tag{61}$$

де $f_0^{(2)}(x)$ — (r,β)-похідна в розумінні Вейля–Надя при $r=2$, $\beta=0$.

Доведення. Подамо функцію $\tau(u)$, задану за допомогою співвідношення (6), у вигляді $\tau(u)=\varphi(u)+\mu(u)$, де

$$\varphi(u)=\begin{cases} u^2\dfrac{\psi(1)}{\psi(\sqrt{\delta})}, & 0\le u\le \dfrac{1}{\sqrt{\delta}},\\[2mm] u^2\dfrac{\psi(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})}, & u\ge \dfrac{1}{\sqrt{\delta}},\end{cases} \tag{62}$$

$$\mu(u)=\begin{cases} (1-e^{-u^2}-u^2)\dfrac{\psi(1)}{\psi(\sqrt{\delta})}, & 0\le u\le \dfrac{1}{\sqrt{\delta}},\\[2mm] (1-e^{-u^2}-u^2)\dfrac{\psi(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})}, & u\ge \dfrac{1}{\sqrt{\delta}}.\end{cases} \tag{63}$$

Переконаємося в сумовності перетворень $\hat{\varphi}_\beta(t)$ і $\hat{\mu}_\beta(t)$ функцій $\varphi(u)$ та $\mu(u)$ (див. (12)).

Покажемо збіжність інтеграла

$$A(\varphi)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_0^{\infty}\varphi(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt.$$

Виходячи з умови (60) та опуклості донизу функції $g(u)$, неважко переконатися, що $\lim\limits_{u\to\infty}u^2\psi(u)=0$ та $\lim\limits_{u\to\infty}u^2\psi'(u)=0$. Застосовуючи двічі інтегрування частинами і враховуючи, що $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$, $\lim\limits_{u\to\infty}\varphi(u)=\lim\limits_{u\to\infty}\varphi'(u)=0$, маємо

$$\int\limits_0^{\infty}\varphi(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du=\left(\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}+\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\infty}\right)\varphi(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du=$$

$$=-\frac{1}{t^2}\left(\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}+\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\infty}\right)\varphi''(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du-$$

$$-\frac{1}{t^2}\frac{\psi'(1)}{\sqrt{\delta}\psi(\sqrt{\delta})}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}t+\frac{\beta\pi}{2}\right),$$

звідки

$$\left|\int_0^\infty \varphi(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right| \le \frac{1}{t^2}\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}+\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^\infty\right)|\varphi''(u)|du + \frac{1}{t^2}\frac{K}{\sqrt{\delta}\psi(\sqrt{\delta})}.$$

Оскільки функція $\varphi(u)$ є опуклою донизу на проміжках $\left[0;\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$, $\left[\frac{b}{\sqrt{\delta}};\infty\right)$ і обмеженою на $\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}};\frac{b}{\sqrt{\delta}}\right]$, з останньої нерівності одержуємо

$$\left|\int_0^\infty \varphi(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right| \le$$

$$\le \frac{1}{t^2}\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}+\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}+\int_{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}^\infty\right)|\varphi''(u)|du + \frac{1}{t^2}\frac{K}{\sqrt{\delta}\psi(\sqrt{\delta})} =$$

$$= \frac{1}{t^2}\left(\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}+\int_{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}^\infty\right)\varphi''(u)\,du + \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}|\varphi''(u)|\,du\right) + \frac{1}{t^2}\frac{K}{\sqrt{\delta}\psi(\sqrt{\delta})} \le$$

$$\le \frac{1}{t^2}\frac{2\psi(1)-2b\psi(b)-b^2\psi'(b)}{\sqrt{\delta}\psi(\sqrt{\delta})} + \frac{1}{t^2}\frac{K}{\sqrt{\delta}\psi(\sqrt{\delta})} +$$

$$+\frac{1}{t^2}\frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})}\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}\left(2\psi(\sqrt{\delta}u)+4u\sqrt{\delta}|\psi'(\sqrt{\delta}u)|+u^2\delta\psi''(\sqrt{\delta}u)\right)du \le$$

$$\le \frac{1}{t^2}\frac{K_1}{\sqrt{\delta}\psi(\sqrt{\delta})}.$$

Тоді

$$\int_{|t|\ge\sqrt{\delta}}\left|\int_0^\infty \varphi(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt = O\left(\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\right), \quad \delta\to\infty. \tag{64}$$

Використовуючи (62), той факт, що функція $u^2\psi(u)$ спадає на $[b,\infty)$ і є обмеженою на $[1,b]$, а також нерівність (4.16) роботи [12, с. 59], отримуємо

$$\int_0^{\sqrt{\delta}}\left|\int_0^\infty \varphi(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt =$$

$$= \int_0^{\sqrt{\delta}}\left|\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}+\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}+\int_{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}^\infty\right)\varphi(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt \le$$

$$\leq \sqrt{\delta}\left(\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}\right)\big|\varphi(u)\big|du + \int\limits_0^{\sqrt{\delta}}\int\limits_{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}+\frac{2\pi}{t}} \frac{u^2\psi(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})}dudt \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{\delta}\psi(1)}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^2du + \frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_1^{b} u^2\psi(u)\,du +$$

$$+ \frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_0^{\sqrt{\delta}}\int\limits_{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}+\frac{2\pi}{t}} u^2\psi(\sqrt{\delta}u)dudt \leq$$

$$\leq \frac{K}{\delta\psi(\sqrt{\delta})} + \frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_0^{\sqrt{\delta}}\int\limits_{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}+\frac{2\pi}{t}} u^2\psi(\sqrt{\delta}u)dudt. \tag{65}$$

Виконуючи заміну змінних та інтегруючи частинами в останньому інтегралі з (65), дістаємо

$$\frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_0^{\sqrt{\delta}}\int\limits_{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}+\frac{2\pi}{t}} u^2\psi(\sqrt{\delta}u)dudt = \frac{2\pi}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}}^{\infty}\int\limits_{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}+x} u^2\psi(\sqrt{\delta}u)du\frac{dx}{x^2} =$$

$$= \frac{2\pi}{\psi(\sqrt{\delta})}\left(-\frac{1}{x}\int\limits_{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}+x} u^2\psi(\sqrt{\delta}u)du\Bigg|_{\frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}}^{\infty} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}}^{\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{b}{\sqrt{\delta}}+x\right)^2\psi\left(b+\sqrt{\delta}x\right)dx\right) =$$

$$= \frac{2\pi}{\psi(\sqrt{\delta})}\left(-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int\limits_{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}+x} u^2\psi(\sqrt{\delta}u)du + \frac{\sqrt{\delta}}{2\pi}\int\limits_{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{(b+2\pi)}{\sqrt{\delta}}} u^2\psi(\sqrt{\delta}u)du + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\delta}\int\limits_{\frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}}^{\infty}\frac{1}{x}\left(b+\sqrt{\delta}x\right)^2\psi\left(b+\sqrt{\delta}x\right)dx\right). \tag{66}$$

У випадку, коли $\lim\limits_{x\to\infty}\int_{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}+x} u^2\psi(\sqrt{\delta}u)du = K > 0$, маємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int\limits_{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}+x} u^2\psi(\sqrt{\delta}u)du=0, \tag{67}$$

а у випадку, коли $\lim\limits_{x\to\infty}\int_{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}+x} u^2\psi(\sqrt{\delta}u)du=\infty$, використовуючи правило Лопіталя і те, що $\lim\limits_{u\to\infty}u^2\psi(u)=0$, отримуємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int\limits_{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}+x} u^2\psi(\sqrt{\delta}u)du=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{b}{\sqrt{\delta}}+x\right)^2\psi\left(b+\sqrt{\delta}x\right)=0. \tag{68}$$

Оскільки при $u\geq 1$ функція $\psi(u)$ спадає, то

$$\frac{\sqrt{\delta}}{2\pi}\int\limits_{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{(b+2\pi)}{\sqrt{\delta}}} u^2\psi(\sqrt{\delta}u)du\leq\frac{\psi(1)\sqrt{\delta}}{2\pi}\int\limits_{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{(b+2\pi)}{\sqrt{\delta}}} u^2du\leq\frac{K}{\delta}. \tag{69}$$

Внаслідок сумовності функції $u\psi(u)$ на $[1;\infty)$ маємо

$$\frac{1}{\delta}\int\limits_{\frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}}^{\infty}\frac{1}{x}\left(b+\sqrt{\delta}x\right)^2\psi\left(b+\sqrt{\delta}x\right)dx=\frac{1}{\delta}\int\limits_{b+2\pi}^{\infty}\frac{y^2\psi(y)}{y-b}dy=$$

$$=\frac{1}{\delta}\int\limits_{b+2\pi}^{\infty}y\psi(y)\left(1+\frac{b}{y-b}\right)dy\leq\frac{\left(1+\dfrac{b}{2\pi}\right)}{\delta}\int\limits_{b+2\pi}^{\infty}y\psi(y)\,dy\leq\frac{K_1}{\delta}. \tag{70}$$

Із співвідношень (66) – (70) і (65) отримуємо

$$\int\limits_0^{\sqrt{\delta}}\left|\int\limits_0^{\infty}\varphi(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt=O\left(\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\right),\quad \delta\to\infty. \tag{71}$$

Аналогічно можна показати, що

$$\int\limits_{-\sqrt{\delta}}^{0}\left|\int\limits_0^{\infty}\varphi(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt=O\left(\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\right),\quad \delta\to\infty. \tag{72}$$

Із формул (64), (71) та (72) маємо

$$A(\varphi)=O\left(\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\right),\quad \delta\to\infty.$$

Покажемо тепер збіжність інтеграла

$$A(\mu)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\mu(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt.$$

Застосувавши двічі інтегрування частинами і врахувавши, що $\mu(0)=\mu'(0)=0$, $\lim\limits_{u\to\infty}\mu(u)=\lim\limits_{u\to\infty}\mu'(u)=0$, матимемо

$$\int\limits_{0}^{\infty}\mu(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du=\left(\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}+\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\infty}\right)\mu(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du=$$

$$=-\frac{1}{t^2}\left(\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}+\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\infty}\right)\mu''(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du-$$

$$-\frac{1}{t^2}\left(1-e^{-\frac{1}{\delta}}-\frac{1}{\delta}\right)\frac{\sqrt{\delta}\psi'(1)}{\psi(\sqrt{\delta})}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{\delta}}+\frac{\beta\pi}{2}\right),$$

звідки

$$\left|\int\limits_{0}^{\infty}\mu(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|\le\frac{1}{t^2}\left(\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}+\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\infty}\right)|\mu''(u)|\,du+\frac{1}{t^2}\frac{K}{\delta\sqrt{\delta}\psi(\sqrt{\delta})}. \tag{73}$$

При $u\in\left[0,\dfrac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$ функція $\mu''(u)<0$, тому

$$\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}|\mu''(u)|\,du=-\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}\mu''(u)du=-\mu'\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)+\mu'(0)\le\frac{K}{\delta\sqrt{\delta}\psi(\sqrt{\delta})}. \tag{74}$$

При $u\ge\dfrac{1}{\sqrt{\delta}}$

$$\mu''(u)=\left(1-e^{-u^2}-u^2\right)\frac{\delta\psi''(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})}+4u\left(e^{-u^2}-1\right)\frac{\sqrt{\delta}\psi'(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})}+$$

$$+2\left(e^{-u^2}-2u^2e^{-u^2}-1\right)\frac{\psi(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})}, \tag{75}$$

і, отже,

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\infty}|\mu''(u)|\,du\le\frac{\delta}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\infty}\left(e^{-u^2}+u^2-1\right)\psi''(\sqrt{\delta}u)du+$$

$$+\frac{4\sqrt{\delta}}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\infty}u\left(1-e^{-u^2}\right)\left|\psi'(\sqrt{\delta}u)\right|du+$$

$$+ \frac{2}{\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\infty} \left(2u^2 e^{-u^2} - e^{-u^2} + 1\right) \psi(\sqrt{\delta} u) du.$$

Зінтегрувавши частинами перший інтеграл у правій частині останньої нерівності двічі, а другий — один раз, будемо мати

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\infty} |\mu''(u)| \, du \leq -\frac{\sqrt{\delta}\psi'(1)}{\psi(\sqrt{\delta})} \left(e^{-\frac{1}{\delta}} + \frac{1}{\delta} - 1\right) +$$

$$+ \frac{6\psi(1)}{\sqrt{\delta}\psi(\sqrt{\delta})} \left(1 - e^{-\frac{1}{\delta}}\right) + \frac{8}{\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\infty} \left(2u^2 e^{-u^2} - e^{-u^2} + 1\right) \psi\left(\sqrt{\delta} u\right) du.$$

Скориставшись першою та другою нерівностями з (23), отримаємо

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\infty} |\mu''(u)| \, du \leq$$

$$\leq \frac{K_1}{\delta\sqrt{\delta}\psi(\sqrt{\delta})} + \frac{K_2}{\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\infty} \left(2u^2 e^{-u^2} - e^{-u^2} + 1\right) \psi(\sqrt{\delta} u) du. \tag{76}$$

Оцінимо останній інтеграл у нерівності (76). Для цього розіб'ємо проміжок інтегрування $\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}; \infty\right)$ на дві частини: $\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}; 1\right]$ та $[1; \infty)$. Застосовуючи третю нерівність з (23), одержуємо

$$\frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1} \left(2u^2 e^{-u^2} - e^{-u^2} + 1\right) \psi(\sqrt{\delta} u) du \leq$$

$$\leq \frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1} u^2 \psi(\sqrt{\delta} u) du = \frac{1}{\delta\sqrt{\delta}\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{1}^{\sqrt{\delta}} u^2 \psi(u) du. \tag{77}$$

Враховуючи нерівність $2u^2 e^{-u^2} - e^{-u^2} + 1 \leq 2$, $u \in R$, отримуємо

$$\frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{1}^{\infty} \left(2u^2 e^{-u^2} - e^{-u^2} + 1\right) \psi(\sqrt{\delta} u) du \leq \frac{2}{\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{1}^{\infty} \psi\left(\sqrt{\delta} u\right) du \leq K. \tag{78}$$

Із співвідношень (76) – (78) маємо

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\infty} |\mu''(u)| \, du \leq K + \frac{K_1}{\delta\sqrt{\delta}\psi(\sqrt{\delta})} + \frac{K_2}{\delta\sqrt{\delta}\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{1}^{\sqrt{\delta}} u^2 \psi(u) du. \tag{79}$$

Об'єднуючи формули (73), (74) і (79) і враховуючи те, що

$$\lim_{\delta\to\infty} \frac{1}{\delta\sqrt{\delta}\psi(\sqrt{\delta})} \int_1^{\sqrt{\delta}} u^2\psi(u)du \geq \lim_{\delta\to\infty} \frac{1}{\delta\sqrt{\delta}\psi(\sqrt{\delta})} \delta\psi(\sqrt{\delta}) \int_1^{\sqrt{\delta}} du = 1, \qquad (80)$$

дістаємо

$$\int_{|t|\geq\pi} \left| \int_0^\infty \mu(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \right| dt = O\left(\frac{1}{\delta\sqrt{\delta}\psi(\sqrt{\delta})} \int_1^{\sqrt{\delta}} u^2\psi(u)du \right). \qquad (81)$$

Розглянемо тепер

$$\int_0^\pi \left| \int_0^\infty \mu(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \right| dt \leq$$

$$\leq \int_0^\pi \left| \left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} + \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 + \int_1^\infty \right) \mu(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \right| dt. \qquad (82)$$

Використавши нерівність

$$e^{-u^2} + u^2 - 1 \leq u^2, \quad u \in R, \qquad (83)$$

одержимо

$$\int_0^\pi \left| \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \mu(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \right| dt \leq \int_0^\pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} |\mu(u)|\, dudt =$$

$$= \frac{\pi\psi(1)}{\psi(\sqrt{\delta})} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \left(e^{-u^2} + u^2 - 1\right) du \leq \frac{\pi\psi(1)}{\psi(\sqrt{\delta})} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^2 du \leq \frac{K}{\delta\sqrt{\delta}\psi(\sqrt{\delta})}, \qquad (84)$$

$$\int_0^\pi \left| \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \mu(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \right| dt \leq \int_0^\pi \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 |\mu(u)| dudt \leq$$

$$\leq \frac{\pi}{\psi(\sqrt{\delta})} \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 u^2\psi(\sqrt{\delta}u)du = \frac{\pi}{\delta\sqrt{\delta}\psi(\sqrt{\delta})} \int_1^{\sqrt{\delta}} u^2\psi(u)du. \qquad (85)$$

Оскільки $\psi \in G$, то, як неважко переконатися, функція $-\mu(u) = (e^{-u^2} + u^2 - 1)\psi(\sqrt{\delta}u)$ буде монотонно спадною починаючи з деякого значення $u_1 \geq 1$.

Враховуючи те, що функція $-\mu(u)$ є монотонно спадною на $[u_1;\infty)$, $u_1 \geq 1$, невід'ємною і прямує до нуля при $u \to \infty$, можемо скористатись нерівністю (4.16) з роботи [12, с. 59]. Отримаємо

$$\int\limits_0^\pi \left| \int\limits_1^\infty \mu(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \right| dt =$$

$$= \int\limits_0^\pi \left| \int\limits_1^\infty (-\mu(u)) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \right| dt \leq$$

$$\leq \int\limits_0^\pi \left| \int\limits_1^{u_1} (-\mu(u)) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \right| dt +$$

$$+ \int\limits_0^\pi \left| \int\limits_{u_1}^\infty (-\mu(u)) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \right| dt \leq$$

$$\leq \int\limits_0^\pi \int\limits_1^{u_1} (-\mu(u))\, du\, dt + \int\limits_0^\pi \int\limits_{u_1}^{u_1+\frac{2\pi}{t}} (-\mu(u))\, du\, dt =$$

$$= \int\limits_0^\pi \int\limits_1^{u_1+\frac{2\pi}{t}} (-\mu(u))\, du\, dt. \tag{86}$$

Використовуючи нерівність (83), маємо

$$\int\limits_0^\pi \int\limits_1^{u_1+\frac{2\pi}{t}} (-\mu(u))\, dudt \leq \frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_0^\pi \int\limits_1^{u_1+\frac{2\pi}{t}} u^2 \psi(\sqrt{\delta}u) dudt. \tag{87}$$

Виконуючи заміну змінних та інтегруючи частинами, одержуємо

$$\frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_0^\pi \int\limits_1^{u_1+\frac{2\pi}{t}} u^2 \psi(\sqrt{\delta}u) dudt = \frac{2\pi}{\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_2^\infty \int\limits_1^{u_1+x} u^2 \psi\left(\sqrt{\delta}u\right) du \frac{dx}{x^2} =$$

$$= \frac{2\pi}{\psi(\sqrt{\delta})} \left(-\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int\limits_1^{u_1+x} u^2 \psi(\sqrt{\delta}u) du + \frac{1}{2} \int\limits_1^{2+u_1} u^2 \psi(\sqrt{\delta}u) du + \right.$$

$$\left. + \int\limits_2^\infty \frac{1}{x} (u_1+x)^2 \psi\left(\sqrt{\delta}(u_1+x)\right) dx \right). \tag{88}$$

У випадку, коли $\lim_{x\to\infty} \int\limits_1^{u_1+x} u^2 \psi(\sqrt{\delta}u)\, du = K > 0$, маємо

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int\limits_1^{u_1+x} u^2\psi(\sqrt{\delta}u)du = 0, \tag{89}$$

а у випадку $\lim\limits_{x\to\infty} \int_1^{u_1+x} u^2\psi(\sqrt{\delta}u)\,du = \infty$, використовуючи правило Лопіталя і те, що $\lim\limits_{u\to\infty} u^2\psi(u) = 0$, отримуємо

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int\limits_1^{u_1+x} u^2\psi(\sqrt{\delta}u)du = \lim_{x\to\infty} (u_1+x)^2\,\psi\left(\sqrt{\delta}(u_1+x)\right) = 0. \tag{90}$$

Оскільки при $u \geq 1$ функція $\psi(u)$ спадає, то

$$\frac{1}{2} \int\limits_1^{2+u_1} u^2\psi(\sqrt{\delta}u)du \leq \frac{\psi(\sqrt{\delta})}{2} \int\limits_1^{2+u_1} u^2du \leq K\psi(\sqrt{\delta}). \tag{91}$$

Внаслідок сумовності функції $u\psi(u)$ на $[1;\infty)$ маємо

$$\int\limits_2^{\infty} \frac{1}{x}\,(u_1+x)^2\,\psi\left(\sqrt{\delta}(u_1+x)\right)dx = \frac{1}{\delta} \int\limits_{\sqrt{\delta}(2+u_1)}^{\infty} \frac{y^2\psi(y)}{y-\sqrt{\delta}u_1}dy =$$

$$= \frac{1}{\delta} \int\limits_{\sqrt{\delta}(2+u_1)}^{\infty} y\psi(y)\left(1+\frac{\sqrt{\delta}u_1}{y-\sqrt{\delta}u_1}\right)dy \leq \frac{\left(1+\dfrac{u_1}{2}\right)}{\delta} \int\limits_{\sqrt{\delta}(2+u_1)}^{\infty} y\psi(y)dy \leq$$

$$\leq \frac{K_1}{\delta} \int\limits_{\sqrt{\delta}}^{\infty} y\psi(y)dy. \tag{92}$$

Враховуючи співвідношення (89) – (92), із (88) одержуємо

$$\frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_1^{u_1+\frac{2\pi}{t}} u^2\psi(\sqrt{\delta}u)dudt \leq K_1 + \frac{K_2}{\delta\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{\sqrt{\delta}}^{\infty} u\psi(u)du. \tag{93}$$

Із (82), враховуючи (84), (85), (93), а також (80), маємо

$$\int\limits_0^{\pi} \left| \int\limits_0^{\infty} \mu(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du \right| dt =$$

$$= O\left(\frac{1}{\delta\sqrt{\delta}\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_1^{\sqrt{\delta}} u^2\psi(u)du + \frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{\sqrt{\delta}}^{\infty} u\psi(u)du\right). \tag{94}$$

Подібними міркуваннями встановлюється і рівність

$$\int\limits_{-\pi}^{0}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\mu(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt=$$

$$=O\left(\frac{1}{\delta\sqrt{\delta}\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{1}^{\sqrt{\delta}}u^2\psi(u)du+\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\sqrt{\delta}}^{\infty}u\psi(u)du\right). \tag{95}$$

Об'єднуючи формули (81), (94) та (95), отримуємо

$$A(\mu)=O\left(\frac{1}{\delta\sqrt{\delta}\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{1}^{\sqrt{\delta}}u^2\psi(u)du+\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\sqrt{\delta}}^{\infty}u\psi(u)du\right). \tag{96}$$

Аналогічно до [1, с. 183] можна показати, що має місце рівність

$$f(x)-W_\delta(f,x)=\psi(\sqrt{\delta})\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_\beta^\psi\left(x+\frac{t}{\sqrt{\delta}}\right)\hat{\tau}_\beta(t)dt.$$

Звідси

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^\psi;W_\delta\right)_C=\sup_{f\in C_{\beta,\infty}^\psi}\left\|\psi(\sqrt{\delta})\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_\beta^\psi\left(x+\frac{t}{\sqrt{\delta}}\right)\hat{\tau}_\beta(t)dt\right\|_C=$$

$$=\sup_{f\in C_{\beta,\infty}^\psi}\left\|\psi(\sqrt{\delta})\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_\beta^\psi\left(x+\frac{t}{\sqrt{\delta}}\right)\left(\hat{\varphi}_\beta(t)+\hat{\mu}_\beta(t)\right)dt\right\|_C=$$

$$=\sup_{f\in C_{\beta,\infty}^\psi}\left\|\psi(\sqrt{\delta})\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_\beta^\psi\left(x+\frac{t}{\sqrt{\delta}}\right)\hat{\varphi}_\beta(t)dt\right\|_C+O\left(\psi(\sqrt{\delta})A(\mu)\right). \tag{97}$$

Аналогічно до співвідношення (1.1) роботи [10] можна показати, що ряд Фур'є функції $f_\varphi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_\beta^\psi\left(x+\frac{t}{\sqrt{\delta}}\right)\hat{\varphi}_\beta(t)dt$ має вигляд

$$S\left[f_\varphi\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{\delta}\frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right),$$

де a_k, b_k — коефіцієнти Фур'є функції f. Тому

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_\beta^\psi\left(x+\frac{t}{\sqrt{\delta}}\right)\hat{\varphi}_\beta(t)dt=\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}f_0^{(2)}(x), \tag{98}$$

де $f_0^{(2)}(x)$ — (r,β)-похідна в розумінні Вейля – Надя при $r=2$, $\beta=0$.

Підставляючи (98) в (97), маємо

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; W_\delta\right)_C = \frac{1}{\delta}\sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}}\left\|f_0^{(2)}(x)\right\|_C + O\left(\psi(\sqrt{\delta})A(\mu)\right), \quad \delta\to\infty, \qquad (99)$$

а підставляючи (96) в (99), отримуємо рівність (61).

Теорему 2 доведено.

Прикладом функцій, для яких має місце теорема 2, є функції вигляду $\psi(u) = \dfrac{1}{u^2\ln^\alpha(u+K)}$, $K>0$, $\alpha>1$; $\psi(u) = \dfrac{1}{u^r}\ln^\alpha(u+K)$, $\psi(u) = \dfrac{1}{u^r}\operatorname{arctg} u$, $\psi(u) = \dfrac{1}{u^r}(K+e^{-u})$ $K>0$, $r>2$, $\alpha\in R$.

3. Оцінка верхніх меж наближень функцій на класах $L^{\psi}_{\beta,1}$ інтегралами Вейєрштрасса в інтегральній метриці. Оскільки функція $\tau(u)$, що задана за допомогою співвідношення (6), є неперервною, а її перетворення $\hat{\tau}_\beta(t)$ вигляду (12), як ми показали при доведенні теореми 1, — сумовним, то аналогічно до леми 2 роботи [10] можна довести, що при $\delta\to\infty$ матиме місце рівність

$$\mathcal{E}\left(L^{\psi}_{\beta,1}; W_\delta\right)_1 = \psi(\sqrt{\delta})A(\tau) + O\left(\psi(\sqrt{\delta})\int\limits_{|t|\geq\frac{\sqrt{\delta}\pi}{2}}|\hat{\tau}_\beta(t)|\,dt\right).$$

Порівнюючи це співвідношення з рівністю (13), приходимо до висновку, що має місце така теорема.

Теорема 3. *Нехай $\psi\in\mathfrak{M}_0' = \mathfrak{M}_0\cap\mathfrak{M}'$, функція $g(u) = u^2\psi(u)$ є опуклою догори або донизу на $[b;\infty)$, $b\geq 1$. Тоді при $\delta\to\infty$ має місце рівність*

$$\mathcal{E}\left(L^{\psi}_{\beta,1}; W_\delta\right)_1 = \psi(\sqrt{\delta})A(\tau) + O\left(\frac{1}{\delta} + \frac{\psi(\sqrt{\delta})}{\sqrt{\delta}}\right),$$

де величина $A(\tau)$ означається за допомогою рівності (7) *і для неї справедлива оцінка* (15).

Із теореми 3 на підставі міркувань, наведених при доведенні наслідків 1 – 3, випливають наступні твердження.

***Наслідок* 4.** *Якщо виконуються умови теореми* 1, $\sin\dfrac{\beta\pi}{2}\neq 0$ *і* $\lim\limits_{t\to\infty}\alpha(t) = \infty$, *де величина $\alpha(t)$ означена рівністю* (11), *то при $\delta\to\infty$ має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(L^{\psi}_{\beta,1}; W_\delta\right)_1 = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int\limits_{\sqrt{\delta}}^{\infty}\frac{\psi(u)}{u}du + O\left(\psi(\sqrt{\delta})\right). \qquad (100)$$

***Наслідок* 5.** *Нехай $\psi\in\mathfrak{M}_0$, $\sin\dfrac{\beta\pi}{2}\neq 0$, функція $u^2\psi(u)$ є опуклою догори або донизу при $u\geq b\geq 1$ і*

$$\lim_{u\to\infty}u^2\psi(u) = \infty,\ \lim_{\delta\to\infty}\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_1^{\sqrt{\delta}}u\psi(u)du = \infty.$$

Тоді при $\delta \to \infty$ має місце асимптотична рівність

$$\mathcal{E}\left(L^{\psi}_{\beta,1}; W_\delta\right)_1 = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \frac{1}{\delta}\int\limits_1^{\sqrt{\delta}} u\psi(u)du + O\left(\psi(\sqrt{\delta})\right). \tag{101}$$

Наслідок 6. *Нехай $\psi \in \mathfrak{M}_0$, $\sin\dfrac{\beta\pi}{2} \neq 0$, функція $u^2\psi(u)$ є опуклою донизу на $[b;\infty)$, $b \geq 1$, і $\lim\limits_{u\to\infty} u^2\psi(u) = K < \infty$, $\lim\limits_{\delta\to\infty}\displaystyle\int_1^{\sqrt{\delta}} u\psi(u)du = \infty$. Тоді при $\delta \to \infty$ має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(L^{\psi}_{\beta,1}; W_\delta\right)_1 = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \frac{1}{\delta}\int\limits_1^{\sqrt{\delta}} u\psi(u)du + O\left(\frac{1}{\delta}\right). \tag{102}$$

Зауважимо, що при виконанні умов наслідків 4 – 6 рівності (100) – (102) дають розв'язок задачі Колмогорова – Нікольського для інтегралів Вейєрштрасса W_δ на класах $L^{\psi}_{\beta,1}$ в інтегральній метриці.

1. *Степанец А. И.* Методы теории приближения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. I. – 427 с.
2. *Nagy B.* Über gewise Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen, I // Period. Fall: Berichte Math. Phys. – 1938. – **90**. – S. 103 – 134.
3. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 407 с.
4. *Баусов Л. И.* О приближении функций класса Z_α положительными методами суммирования рядов Фурье // Успехи мат. наук. – 1961. – **16**, № 3. – С. 143 – 149.
5. *Баусов Л. И.* Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами. I // Изв. вузов. – 1965. – **46**, № 3. – С. 15 – 31.
6. *Бугров Я. С.* Неравенства типа неравенств Бернштейна и их применение к исследованию дифференциальных свойств решений дифференциальных уравнений высшего порядка // Math. Cluj. – 1963. – **5**, № 1. – P. 5 – 25.
7. *Баскаков В. А.* О некоторых свойствах операторов типа операторов Абеля – Пуассона // Мат. заметки. – 1975. – **17**, № 2. – С. 169 – 180.
8. *Фалалеев Л. П.* О приближении функций обобщенными операторами Абеля – Пуассона // Сиб. мат. журн. – 2001. – **1**, № 4. – С. 926 – 936.
9. *Теляковский С. А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. II // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1963. – **27**, № 2. – С. 253 – 272.
10. *Новикова А. К.* О приближении функций в пространствах C и L // Вопросы суммирования рядов Фурье. – Киев, 1985. – С. 14 – 51. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.61).
11. *Жигалло К. М., Харкевич Ю. І.* Наближення бігармонійними інтегралами Пуассона класів (ψ, β)-диференційовних функцій в інтегральній метриці // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2004. – **1**, № 1. – С. 144 – 170.
12. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.

Одержано 20.02.2006,
після доопрацювання – 14.08.2006