УДК 517.9

А. М. Гомилко (Киев. нац. торг.-экон. ун-т),
И. Врубель (Варшав. технол. ун-т, Польша),
Я. Земанек (Ин-т математики Польской академии наук, Варшава, Польша)

О КРИТЕРИИ РАВНОМЕРНОЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ C_0-ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Let $T(t)$, $t \geq 0$, be a C_0-semigroup of linear operators acting in the Hilbert space H with norm $\|\cdot\|$. It is proved that $T(t)$ is uniformly bounded, i.e., $\|T(t)\| \leq M$, $t \geq 0$, if and only if the condition

$$\sup_{t>0} \frac{1}{t} \int_0^t \left\| (T(s) + T^*(s))x \right\|^2 ds < \infty \quad \text{holds for all} \quad x \in H,$$

where T^* is the adjoint operator.

Нехай $T(t)$, $t \geq 0$, є C_0-півгрупою лінійних операторів, що діє у гільбертовому просторі H з нормою $\|\cdot\|$. Доведено, що $T(t)$ є рівномірно обмеженою, тобто $\|T(t)\| \leq M$, $t \geq 0$, тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$\sup_{t>0} \frac{1}{t} \int_0^t \left\| (T(s) + T^*(s))x \right\|^2 ds < \infty \quad \text{для всіх} \quad x \in H,$$

де T^* — спряжений оператор.

1. Введение. Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot\,,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$, $E = E(H)$ — множество линейных плотно определенных замкнутых операторов, действующих в H, а $L = L(H)$ — алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в H. Через $\sigma(A)$ обозначим спектр оператора $A \in E$, I — единичный оператор и $R(A, \lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$, $\lambda \notin \sigma(A)$, — резольвента оператора A. Если оператор A принадлежит E, то A^* — его сопряженный оператор.

В статье [1] (см. также [2]) было показано, что если для C_0-полугруппы операторов $T(t)$, $t \geq 0$, для любого вектора $x \in H$ выполняется оценка

$$\sup_{t>0} \frac{1}{t} \int_0^t \left[\|T(s)x\|^2 + \left\|T^*(s)x\right\|^2 \right] ds < \infty, \tag{1}$$

то полугруппа $T(t)$ является равномерно ограниченной. В данной статье доказано, что условие (1) можно ослабить, а именно, для того чтобы полугруппа

$T(t)$ была равномерно ограниченной, вместо оценки (1) достаточно потребовать выполнения оценки

$$\sup_{t>0} \frac{1}{t} \int_0^t \left\| (T(s) + T^*(s))x \right\|^2 ds < \infty.$$

Этот результат является непрерывным аналогом соответствующего утверждения для дискретной полугруппы операторов T^n, $n = 0, 1, \ldots$. А именно, в работе [3] было показано, что оператор $T \in L(H)$ является степенным ограниченным, т. е. $\left\| T^n \right\| \leq M$, $n \in \mathbb{N}$, тогда и только тогда, когда для любого вектора $x \in H$ справедлива оценка

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \left\| (A^j + A^{*j})x \right\|^2 < \infty.$$

2. Предварительные сведения и результаты. Напомним необходимые для дальнейшего изложения сведения из теории полугрупп операторов [4, 5]. Семейство $T(t)$, $t \geq 0$, линейных ограниченных операторов, действующих в H, образует C_0-полугруппу операторов, если $T(0) = I$, $T(t_1 + t_2) = T(t_1)T(t_2)$, $t_1, t_2 \geq 0$, и

$$\| T(t)x - x \| \to 0, \quad t \to 0, \quad \forall x \in H.$$

Генератор A (производящий оператор) C_0-полугруппы $T(t)$ определяется как сильный предел

$$Ax = \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad x \in D(A),$$

и является плотно заданным замкнутым оператором. При этом для соответствующей полугруппы будем использовать обозначение $T(t) = e^{tA}$, $t \geq 0$. Типом C_0-полугруппы $T(t) = e^{tA}$ называется число

$$\omega_0(A) = \omega_0 = \lim_{t \to \infty} \frac{\ln \| T(t) \|}{t},$$

и полугруппа $T(t)$ называется равномерно ограниченной, если найдется такая постоянная $M \geq 0$, что

$$\| T(t) \| \leq M, \quad t \geq 0. \tag{2}$$

При этом если e^{tA} является C_0-полугруппой, то сопряженный оператор A^* также порождает C_0-полугруппу операторов.

Если тип полугруппы e^{tA} удовлетворяет неравенству $\omega_0(A) \leq 0$ (в частности, если полугруппа является равномерно ограниченной), то спектр $\sigma(A)$ расположен в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda \leq 0$ и для резольвент $R(A, \lambda)$, $R(A^*, \lambda)$, генераторов полугрупп справедливы представления

$$R(A, \lambda) = -\int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{tA} dt, \quad R(A^*, \lambda) = -\int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{tA^*} dt, \quad \mathrm{Re}\lambda > 0. \tag{3}$$

Отсюда и из равенства Парсеваля для преобразования Фурье в гильбертовом пространстве следуют известное равенство

$$\int_0^\infty e^{-\nu t}\left\|e^{tA}x\right\|^2 dt \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{\nu-i\infty}^{\nu+i\infty}\|R(A,\lambda)x\|^2|d\lambda|, \qquad \nu>0, \tag{4}$$

и аналогичное равенство с заменой оператора A на сопряженный оператор A^*.

Лемма. *Пусть T — линейный ограниченный оператор в пространстве H. Тогда для любого вектора $x\in H$ и любого комплексного числа α, $\alpha\neq-1$, выполняется неравенство*

$$\|Tx\|^2+|\alpha|^2\left\|T^*x\right\|^2\le$$

$$\le\; C(\alpha)\left\{\left\|(T+\alpha T^*)x\right\|^2+c_0(|\alpha|)\left|((T^2+\alpha T^{*2})x,x)\right|\right\}, \tag{5}$$

где $c_0(|\alpha|)=\min\{1,|\alpha|\}$ *и постоянная*

$$C(\alpha)\;=\;\begin{cases}\dfrac{2}{2-|1-\alpha|} & \textit{при}\quad |\alpha|\le 1,\\[2ex] \dfrac{2}{2-|1-1/\alpha|} & \textit{при}\quad |\alpha|>1.\end{cases} \tag{6}$$

Доказательство. Для любого вектора $x\in H$ справедливо равенство

$$\left\|(T+\alpha T^*)x\right\|^2=\|Tx\|^2+|\alpha|^2\left\|T^*x\right\|^2+2\,\mathrm{Re}\left\{\overline{\alpha}(T^2x,x)\right\},$$

из которого получаем оценку

$$\|Tx\|^2+|\alpha|^2\left\|T^*x\right\|^2\le\left\|(T+\alpha T^*)x\right\|^2+2\left|\mathrm{Re}\left\{\overline{\alpha}(T^2x,x)\right\}\right|. \tag{7}$$

Рассмотрим сначала случай $|\alpha|\le 1$, $\alpha\neq-1$, так что $c_0(|\alpha|)=|\alpha|$. Тогда, используя представление

$$2\,\mathrm{Re}\left\{\overline{\alpha}(T^2x,x)\right\}=\overline{\alpha}(T^2x,x)+\alpha(T^{*2}x,x)=$$

$$=\overline{\alpha}((T^2+\alpha T^{*2})x,x)+\alpha(1-\overline{\alpha})(T^*x,Tx)$$

и неравенство $2|\alpha|\|Tx\|\left\|T^*x\right\|\le\|Tx\|^2+|\alpha|^2\left\|T^*x\right\|^2$, имеем

$$2\left|\mathrm{Re}\left\{\overline{\alpha}(T^2x,x)\right\}\right|\le|\alpha|\left|((T^2+\alpha T^{*2})x,x)\right|+|1-\alpha||\alpha|\|Tx\|\left\|T^*x\right\|\le$$

$$\le|\alpha|\left|((T^2+\alpha T^{*2})x,x)\right|+\frac{|1-\alpha|}{2}\left\{\|Tx\|^2+|\alpha|^2\left\|T^*x\right\|^2\right\}.$$

Отсюда и из (7) находим

$$\|Tx\|^2+|\alpha|^2\left\|T^*x\right\|^2\le\left\|(T+\alpha T^*)x\right\|^2+$$

$$+\;|\alpha|\left|((T^2+\alpha T^{*2})x,x)\right|+\frac{|1-\alpha|}{2}\left\{\|Tx\|^2+|\alpha|^2\left\|T^*x\right\|^2\right\},$$

откуда, в свою очередь, с учетом того, что $|1-\alpha|<2$, $\alpha\neq-1$, вытекает неравенство (5) при $|\alpha|\le 1$.

Поскольку $(T^*)^*=T$, в случае $|\alpha|>1$ для доказательства леммы можно воспользоваться уже доказанной оценкой (5) для $|\alpha|\le 1$. А именно, при $|\alpha|>1$, полагая $\beta=1/\alpha$, имеем

$$\|Tx\|^2+|\alpha|^2\left\|T^*x\right\|^2=|\alpha|^2\Big[\left\|T^*x\right\|^2+|\beta|^2\|Tx\|^2\Big]\le$$

$$\leq \frac{2|\alpha|^2}{2-|1-\beta|}\left\{\left\|(T^*+\beta T)x\right\|^2 + |\beta|\left|((T^{*2}+\beta T^2)x, x)\right|\right\} =$$

$$= \frac{2}{2-|1-1/\alpha|}\left\{\left\|(T+\alpha T^*)x\right\|^2 + \left|((T^2+\alpha T^{*2})x, x)\right|\right\}.$$

Лемма доказана.

Отметим, что пример произвольного самосопряженного ограниченного оператора $T = T^*$ показывает, что неравенство (5) не выполняется при $\alpha = -1$.

Из леммы, в ее обозначениях для постоянных $c_0(|\alpha|)$ и $C(\alpha)$, непосредственно получаем следующее утверждение.

***Следствие* 1.** *Пусть семейство операторов $T(t) \in L(H)$, $t \geq 0$, имеет полугрупповое свойство $T(t_1+t_2) = T(t_1)T(t_2)$, $t_1, t_2 \geq 0$. Тогда для любых $t \geq 0$, комплексного числа α, $\alpha \neq -1$, и произвольного вектора $x \in H$ выполняется неравенство*

$$\|T(t)x\|^2 + |\alpha|^2\left\|T^*(t)x\right\|^2 \leq$$

$$\leq C(\alpha)\left\{\left\|(T(t)+\alpha T^*(t))x\right\|^2 + c_0(|\alpha|)\left|((T(2t)+\alpha T^*(2t))x, x)\right|\right\}.$$

3. Равномерно ограниченные C_0-полугруппы. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть $T(t)$, $t \geq 0$, — C_0-полугруппа в H и существуют такие число $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq -1$, и постоянная $M \geq 1$, что выполняется неравенство*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \left\|(T(s)+\alpha T^*(s))x\right\|^2 ds \leq M\|x\|^2, \qquad t > 0, \quad \forall x \in H. \tag{8}$$

Тогда $T(t)$ является равномерно ограниченной C_0-полугруппой, а именно

$$\|T(t)\| \leq \frac{C(\alpha)}{|\alpha|}\left\{M + c_0(|\alpha|)\sqrt{M}\right\}, \qquad t \geq 0, \tag{9}$$

где постоянные $C(\alpha)$ и $c_0(|\alpha|)$ взяты из леммы.

Доказательство. В силу полугрупповых свойств семейства операторов $T(t)$ для любых $t > 0$ и $x \in H$ имеем равенство

$$(T(t)x, x) = \frac{1}{t}\int_0^t (T(t)x, x)ds = \frac{1}{t}\int_0^t \left(T(t)x, T^*(t-s)x\right)ds,$$

и, следовательно, используя следствие 1, получаем неравенство

$$\left|(T(t)x, x)\right| \leq \frac{1}{t}\int_0^t \|T(s)x\|\left\|T^*(t-s)x\right\|ds \leq$$

$$\leq \frac{1}{2|\alpha|t}\int_0^t \left\{\|T(s)x\|^2 + |\alpha|^2\left\|T^*(s)x\right\|^2\right\}ds \leq$$

$$\leq \frac{C(\alpha)}{2|\alpha|t}\left\{\int_0^t \left\|(T(s)+\alpha T^*(s))x\right\|^2 ds + c_0(|\alpha|)\|x\|\int_0^t \left\|(T(2s)+\alpha T^*(2s))x\right\|ds\right\}.$$

Отсюда на основании условия (8) имеем

$$|(T(t)x, x)| \le \frac{C(\alpha)}{2|\alpha|}\left\{M\|x\|^2 + c_0(|\alpha|)\|x\|\sqrt{\frac{1}{2t}\int_0^{2t}\left\|(T(s)+\alpha T^*(s))x\right\|^2 ds}\right\} \le$$

$$\le \frac{C(\alpha)}{2|\alpha|}\left\{M + c_0(|\alpha|)\sqrt{M}\right\}\|x\|^2,$$

откуда, используя оценку нормы ограниченного оператора через его числовой радиус [6]

$$\|T\| \le 2w(T), \qquad w(T) = \sup_{x\in H, \|x\|=1} |(Tx, x)|,$$

получаем оценку (9).

Теорема доказана.

Замечание. Полагая в теореме $\alpha = 1$, получаем, что если для C_0-полугруппы $T(t)$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{t}\int_0^t \left\|(T(s)+T^*(s))x\right\|^2 ds \le M\|x\|^2, \qquad t > 0, \quad \forall x \in H,$$

то $T(t)$ является равномерно ограниченной C_0-полугруппой, причем справедлива оценка $\|T(t)\| \le M + \sqrt{M}$, $t \ge 0$.

Отметим, что теорема не верна для значения $\alpha = 0$. А именно, в [7] приведен пример C_0-полугруппы $T(t)$ в гильбертовом пространстве $L_2(\mathrm{R})$, для которой выполняется условие (8) с $\alpha = 0$, однако $T(t)$ не является равномерно ограниченной. С другой стороны, для того чтобы убедиться, что ответ на вопрос о справедливости теоремы для значения $\alpha = -1$ также является отрицательным, достаточно рассмотреть полугруппу $T(t) = e^{tA}$, $t \ge 0$.

Из доказанной теоремы в качестве следствия нетрудно получить следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть оператор $A \in E$ является генератором C_0-полугруппы $T(t) = e^{tA}$, $t \ge 0$, и $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \ne 0$, $\alpha \ne -1$, — некоторое фиксированное комплексное число. Тогда эквивалентны следующие утверждения* :

1) *полугруппа $T(t)$ является равномерно ограниченной*;

2) *полугруппа $T(t)$ имеет тип $\omega_0(A) \le 0$ и для каждого $x \in H$ выполняется оценка*

$$\sup_{\nu>0} \nu \int_{\nu-i\infty}^{\nu+i\infty} \left\|(R(A,\lambda)+\alpha R(A^*,\lambda))x\right\|^2 |d\lambda| < \infty;$$

3) *для любого вектора $x \in H$*

$$\sup_{\nu>0} \nu \int_0^\infty e^{-\nu t}\left\|(T(t)+\alpha T^*(t))x\right\|^2 dt < \infty;$$

4) *для любого вектора $x \in H$ справедлива оценка*

$$\sup_{t>0} \frac{1}{t}\int_0^t \left\|(T(s)+\alpha T^*(s))x\right\|^2 ds < \infty.$$

Доказательство. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) следует из очевидного неравенства

$$\left\|(R(A,\lambda)+\alpha R(A^*,\lambda))x\right\|^2 \le 2\left(\|R(A,\lambda)x\|^2 + |\alpha|^2\left\|R(A^*,\lambda)x\right\|^2\right)$$

и равенства Парсеваля (4) для операторов A и A^*. Далее, если $T(t) = e^{tA}$, $t \ge 0$, является C_0-полугруппой неположительного типа $\omega_0(A) \le 0$, то согласно (3) имеем равенство

$$(R(A,\lambda)+\alpha R(A^*,\lambda))x = -\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,(e^{tA}+\alpha e^{tA^*})\,x\,dt, \qquad \operatorname{Re}\lambda > 0.$$

Тогда из равенства Парсеваля для преобразования Фурье для любого вектора $x \in H$ получаем соотношение

$$\int_0^\infty e^{-\nu t}\left\|(T(t)+\alpha T^*(t))x\right\|^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\nu-i\infty}^{\nu+i\infty}\left\|(R(A,\lambda)+\alpha R(A^*,\lambda))x\right\|^2 |d\lambda| \qquad \forall\, \nu > 0,$$

откуда следует импликация 2) $\Rightarrow$ 3).

Для любой измеримой неотрицательной функции $f(t)$, $t \ge 0$, справедлива оценка (см. [7])

$$e^{-1}\sup_{t>0}\frac{1}{t}\int_0^t f(s)\,ds \le \sup_{\nu>0}\nu\int_0^\infty e^{-\nu t} f(t)\,dt \le \sup_{t>0}\frac{1}{t}\int_0^t f(s)\,ds.$$

Применяя эту оценку к функции $f(t) = \left\|(T(t)+\alpha T^*(t))x\right\|^2$, получаем эквивалентность условий 3) и 4).

Если выполнено условие 4), то согласно теореме Банаха – Штейнгауза о равномерной ограниченности [5], найдется такая постоянная M, что будет выполнено и условие (8). Теперь для завершения доказательства следствия нужно сослаться на доказанную теорему, откуда будет следовать справедливость импликации 4) $\Rightarrow$ 1).

Следствие доказано.

1. *Гомилко А. М.* Об условиях на производящий оператор равномерно ограниченной C_0-полугруппы операторов // Функцион. анализ и прил. – 1999. – **33**, вып. 4. – С. 66 – 69.
2. *Shi D.-H., Feng D.-X.* Characteristic conditions of the generation of C_0-semigroups in a Hilbert space // J. Math. Anal. and Appl. – 2000. – **247**. – P. 356 – 376.
3. *Gomilko A., Wróbel I., Zemánek J.* Numerical ranges in a strip // Proc. 20th Int. Conf. Operator Theory (Timis,oara, Romania, 2004). – Bucharest: Theta, 2006. – P. 111 – 121.
4. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
5. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 896 с.
6. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. – М.: Мир, 1970. – 352 с.
7. *Van Casteren J. A.* Operators similar to unitary or selfadjoint ones // Pacif. J. Math. – 1983. – **104**. – P. 241 – 255.

Получено 18.04.2006