УДК 517.9

А. А. Мурач (Ин-т математики НАН Украины, Киев; Чернигов. технол. ун-т)

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В УТОЧНЕННОЙ ШКАЛЕ ПРОСТРАНСТВ НА ЗАМКНУТОМ МНОГООБРАЗИИ

We study linear elliptic pseudodifferential operators in the refined scale of functional Hilbert spaces over a smooth closed manifold. Elements of this scale are presented by the Hörmander – Volevich – Paneyakh isotropic spaces. The local smoothness of a solution of an elliptic equation in the refined scale is investigated. Elliptic pseudodifferential operators with a parameter are also studied.

Вивчаються лінійні еліптичні псевдодиференціальні оператори в уточненій шкалі функціональних гільбертових просторів на гладкому замкненому многовиді. Елементами цієї шкали є ізотропні простори Хермандера – Волевіча – Панеяха. Досліджено локальну гладкість розв'язку еліптичного рівняння в уточненій шкалі. Вивчено також еліптичні псевдодиференціальні оператори з параметром.

Введение. В настоящей статье изучается линейный эллиптический псевдодифференциальный оператор (ПДО) на замкнутом (компактном) гладком многообразии. Известно (см., например, [1, 2]), что указанный ПДО ограничен и фредгольмов в подходящих парах соболевских пространств и порождает в двусторонней соболевской шкале пространств набор топологических изоморфизмов. В статье этот классический результат уточняется применительно к гильбертовой шкале некоторых изотропных пространств Хермандера – Волевича – Панеяха [3, 4]. Эта шкала характеризует гладкостные свойства распределений посредством пары параметров: вещественного числового и дополнительного функционального, который медленно меняется на $+\infty$ по Карамата. Указанная шкала введена и изучена в [5 – 7]. Ее естественно называть *уточненной*. Она содержит в себе классическую соболевскую шкалу и является существенно более тонкой. Отметим, что пространства, характеризующие гладкость распределений посредством функциональных параметров (т. е. пространства функциональной и обобщенной гладкости), являются в настоящее время предметом многих исследований (см., например, [8 – 10] и приведенную там литературу).

Статья состоит из 6 пунктов. В п. 1 сформулирован основной результат работы — утверждение о топологическом изоморфизме, который задает эллиптический ПДО в уточненной шкале пространств на замкнутом многообразии. В п. 2 приведено определение уточненной шкалы и сформулирован ряд ее свойств. Пункт 3 посвящен интерполяции с функциональным параметром, как основному методу исследования линейных ограниченных операторов в уточненной шкале. В п. 4 доказан основной результат работы. В п. 5 исследована уточненная локальная гладкость решения эллиптического псевдодифференциального уравнения. Пункт 6 посвящен эллиптическим ПДО с параметром.

Отметим, что для эллиптических *дифференциальных* операторов уравнения и краевые задачи систематически исследовались в уточненных шкалах пространств в работах [5, 7, 11 – 15].

1. Постановка задачи и основной результат. Пусть Γ — замкнутое бесконечно гладкое многообразие размерности $n \geq 1$. (Напомним, что многообразие называется замкнутым, если оно компактно и без края.) Предполагается, что на Γ задана некоторая C^∞-плотность dx. Обозначим через $\mathcal{D}'(\Gamma)$ линейное топологическое пространство всех распределений (обобщенных функций) на Γ, т. е. пространство, антидвойственное к пространству $C^\infty(\Gamma)$ относительно полуторалинейной формы

$$(f, v)_\Gamma := \int_\Gamma f(x)\overline{v(x)}\,dx.$$

Последняя продолжается по непрерывности до формы $(f, v)_\Gamma$ аргументов $f \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ и $v \in C^\infty(\Gamma)$, равной значению распределения f на основной функции v.

Следуя [2] (п. 2.1), обозначим через $\Psi^m_{\mathrm{ph}}(\Gamma)$ класс полиоднородных (или, другими словами, классических) ПДО вещественного порядка m, заданных на многообразии Γ. Напомним, что для ПДО $A \in \Psi^m_{\mathrm{ph}}(\Gamma)$ определен главный символ $a_0(x, \xi)$, являющийся бесконечно гладкой комплекснозначной функцией аргументов $x \in \Gamma$ и $\xi \in T^*_x\Gamma \setminus \{0\}$ однородной степени m по переменной ξ. Здесь, как обычно, через $T^*_x\Gamma$ обозначено кокасательное пространство к многообразию Γ в точке x. Нам удобно принять, что в качестве главного символа допускается также функция, тождественно равная нулю. Тогда $\Psi^m_{\mathrm{ph}}(\Gamma) \subset \subset \Psi^r_{\mathrm{ph}}(\Gamma)$ при $m < r$. ПДО A линеен и непрерывен в каждом из топологических пространств $C^\infty(\Gamma)$ и $\mathcal{D}'(\Gamma)$. Напомним, что для распределения $u \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ образ $Au \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ определяется по формуле $(Au, v)_\Gamma = (u, A^+v)_\Gamma$, где v — произвольная функция из пространства $C^\infty(\Gamma)$, а A^+ — ПДО класса $\Psi^m_{\mathrm{ph}}(\Gamma)$, формально сопряженный к оператору A относительно плотности dx. Частным и важным случаем ПДО класса $\Psi^m_{\mathrm{ph}}(\Gamma)$, $m \geq 1$, является линейный дифференциальный оператор на многообразии Γ порядка $\leq m$ с бесконечно гладкими комплексными коэффициентами.

Предположим далее, что ПДО $A \in \Psi^m_{\mathrm{ph}}(\Gamma)$, где m — произвольное фиксированное вещественное число, *является эллиптическим на многообразии* Γ, т. е. $a_0(x, \xi) \neq 0$ для любых точки $x \in \Gamma$ и ковектора $\xi \in T^*_x\Gamma \setminus \{0\}$.

Наша задача — изучить отображение $u \mapsto Au$ *в уточненной шкале пространств* на многообразии Γ. Эта шкала образована гильбертовыми пространствами $H^{s,\varphi}(\Gamma)$, где числовой параметр s произвольный вещественный, а функциональный параметр φ пробегает некоторый класс $\mathcal{M}$ функций, медленно меняющихся по Карамата на $+\infty$. Определение уточненной шкалы приведено в п. 2. Здесь отметим лишь, что она содержит в себе гильбертову шкалу пространств Соболева: $H^s(\Gamma) = H^{s,1}(\Gamma)$ и дает значительно более тонкую градацию гладкостных свойств распределений, чем это возможно в соболевской (степенной) шкале.

Сформулируем основной результат статьи. Положим

$$N := \{u \in C^\infty(\Gamma):\ Au = 0 \ \text{ на } \ \Gamma\}, \qquad N^+ := \{v \in C^\infty(\Gamma):\ A^+v = 0 \ \text{ на } \ \Gamma\}.$$

Поскольку ПДО A и A^+ одновременно эллиптичны на Γ, пространства N и N^+ конечномерны [2, с. 28].

Теорема 1.1. *Предположим, что пространства N и N^+ тривиальны. Тогда для произвольных параметров $s \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in \mathcal{M}$ справедлив топологический изоморфизм*

$$A:\ \ H^{s+m,\varphi}(\Gamma) \leftrightarrow H^{s,\varphi}(\Gamma). \tag{1.1}$$

Более общее утверждение приведено в п. 4. Как видим, ПДО (1.1) оставляет инвариантным функциональный параметр φ. Теорема 1.1 уточняет известный результат о свойствах эллиптического ПДО в соболевской шкале (см. [1, с. 262; 2, с. 28] и приведенную там литературу). Она также позволяет исследовать локальную гладкость решения $u \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ эллиптического уравнения $Au = f$ в уточненной шкале.

2. Уточненные шкалы пространств введены и изучались в [5, 7, 12]. Приведем (для удобства читателя) определения и некоторые свойства этих шкал.

Обозначим через $\mathcal{M}$ совокупность всех функций $\varphi\colon [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ таких, что:

а) φ измерима по Борелю на полуоси $[1, +\infty)$;

б) функции φ и $1/\varphi$ ограничены на каждом отрезке $(1, b)$, где $1 < b < +\infty$;

в) функция φ медленно меняющаяся по Карамата на $+\infty$, т. е. [16, с. 9]

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)} = 1 \quad \text{для любого} \quad \lambda > 0.$$

Пусть $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$. Обозначим через $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ множество всех таких распределений w медленного роста, заданных в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, что преобразование Фурье $\hat{w}$ распределения w является локально суммируемой по Лебегу в $\mathbb{R}^n$ функцией, удовлетворяющей условию

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{2s} \varphi^2(\langle\xi\rangle) |\hat{w}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

Здесь $\langle\xi\rangle = (1 + \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)^{1/2}$ — сглаженный модуль вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. В пространстве $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ определено скалярное произведение по формуле

$$(w_1, w_2)_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)} := \int_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{2s} \varphi^2(\langle\xi\rangle)\, \widehat{w_1}(\xi) \overline{\widehat{w_2}(\xi)} d\xi.$$

Оно естественным образом порождает норму в $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$.

Пространство $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ — это частный изотропный гильбертов случай пространств, рассмотренных Л. Хермандером [3, с. 54] и Б. П. Волевичем, Л. Р. Панеяхом [4, с. 14]. В случае $\varphi \equiv 1$ пространство $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ совпадает с пространством Соболева $H^s(\mathbb{R}^n)$. Из включений

$$\bigcup_{\varepsilon>0} H^{s+\varepsilon}(\mathbb{R}^n) =: H^{s+}(\mathbb{R}^n) \subset H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) \subset H^{s-}(\mathbb{R}^n) := \bigcap_{\varepsilon>0} H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$$

следует, что в семействе

$$\left\{ H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) \colon s \in \mathbb{R},\ \varphi \in \mathcal{M} \right\} \tag{2.1}$$

функциональный параметр φ *уточняет* основную (степенную) s-гладкость. Поэтому семейство естественно называть *уточненной* шкалой в $\mathbb{R}^n$ (по отношению к соболевской шкале).

Уточненная шкала пространств на многообразии Γ строится по шкале (2.1) следующим образом. Возьмем конечный атлас из C^∞-структуры на Γ, образованный локальными картами $\alpha_j\colon \mathbb{R}^n \to U_j$, $j = 1, \ldots, r$. Здесь открытые множества U_j составляют конечное покрытие многообразия Γ. Пусть функции $\chi_j \in C^\infty(\Gamma)$, $j = 1, \ldots, r$, образуют разбиение единицы на Γ, удовлетворяющее условию $\operatorname{supp} \chi_j = U_j$.

Положим

$$H^{s,\varphi}(\Gamma) = \left\{ f \in \mathcal{D}'(\Gamma) \colon (\chi_j f) \circ \alpha_j \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) \text{ для каждого } j = 1, \ldots, r \right\}.$$

Здесь $(\chi_j f) \circ \alpha_j$ — представление распределения $\chi_j f$ в локальной карте α_j. В пространстве $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ определено скалярное произведение по формуле

$$(f_1, f_2)_{s,\varphi} := \sum_{j=1}^{r} ((\chi_j f_1) \circ \alpha_j, (\chi_j f_2) \circ \alpha_j)_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)}.$$

Оно стандартным образом задает норму: $\| f \|_{s,\varphi} := (f, f)_{s,\varphi}^{1/2}$. В соболевском случае $\varphi \equiv 1$ индекс φ в обозначениях будем опускать.

Пространство $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ сепарабельное гильбертово, непрерывно вложено в топологическое пространство $\mathcal{D}'(\Gamma)$ и с точностью до эквивалентности норм не зависит от выбора атласа и разбиения единицы. Семейство функциональных пространств

$$\left\{ H^{s,\varphi}(\Gamma) \colon s \in \mathbb{R}, \ \varphi \in \mathcal{M} \right\}$$

называется *уточненной* шкалой на многообразии Γ. Отметим следующие ее свойства.

Предложение 2.1 [7, 12]. *Пусть* $s \in \mathbb{R}$ *и* $\varphi, \varphi_1 \in \mathcal{M}$. *Тогда*:

а) *множество* $C^\infty(\Gamma)$ *плотно в* $H^{s,\varphi}(\Gamma)$;

б) *справедливы компактные плотные вложения*

$$H^{s+\varepsilon}(\Gamma) \hookrightarrow H^{s,\varphi}(\Gamma) \hookrightarrow H^{s-\varepsilon}(\Gamma) \quad \text{и} \quad H^{s+\varepsilon,\varphi_1}(\Gamma) \hookrightarrow H^{s,\varphi}(\Gamma) \quad \text{при} \quad \varepsilon > 0;$$

в) *если* $\varphi(t) \le c\,\varphi_1(t)$ *при* $t >> 1$ *для некоторого числа* $c > 0$, *то справедливо непрерывное плотное вложение* $H^{s,\varphi_1}(\Gamma) \hookrightarrow H^{s,\varphi}(\Gamma)$; *это вложение компактно, если* $\varphi(t)/\varphi_1(t) \to 0$ *при* $t \to +\infty$;

г) *если*

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\,\varphi^2(t)} < \infty, \tag{2.2}$$

то для любого целого числа $\rho \ge 0$ *справедливо компактное вложение*

$$H^{\rho+n/2,\varphi}(\Gamma) \hookrightarrow C^\rho(\Gamma); \tag{2.3}$$

обратно, для каждого целого $\rho \ge 0$ *из включения* (2.3) *вытекает условие* (2.2);

д) *пространства* $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ *и* $H^{-s,1/\varphi}(\Gamma)$ *взаимно сопряжены относительно формы* $(\cdot,\cdot)_\Gamma$ *с точностью до эквивалентных норм.*

В связи с пунктом д) отметим, что $\varphi \in \mathcal{M} \;\Leftrightarrow\; 1/\varphi \in \mathcal{M}$. Следовательно, пространство $H^{-s,1/\varphi}(\Gamma)$ определено корректно.

3. Интерполяция с функциональным параметром пар гильбертовых пространств — это естественное обобщение классического интерполяционного метода [17, с. 21 – 23] на случай, когда в качестве параметра интерполяции вместо степенной берется более общая функция. Приведем здесь определение такой интерполяции (см. [6, 11, 18]). При этом достаточно ограничиться сепарабельными гильбертовыми пространствами.

Упорядоченную пару $[X_0, X_1]$ комплексных гильбертовых пространств X_0 и X_1 будем называть *допустимой,* если пространства X_0, X_1 сепарабельны и справедливо непрерывное плотное вложение $X_1 \hookrightarrow X_0$. Если, кроме того, $\|u\|_{X_0} \le \|u\|_{X_1}$ для любого $u \in X_1$, то допустимую пару $[X_0, X_1]$ назовем *нор-*

мальной. Заметим, что каждую допустимую пару $[X_0, X_1]$ можно сделать нормальной, заменив, например, норму $\|u\|_{X_1}$ на эквивалентную норму $c\|u\|_{X_1}$, где c — достаточно большое положительное число.

Пусть задана допустимая пара $X = [X_0, X_1]$ гильбертовых пространств. Как известно [17, с. 22], для X существует такой изометрический изоморфизм J: $X_1 \leftrightarrow X_0$, что J является самосопряженным положительно определенным оператором в пространстве X_0 с областью определения X_1. Оператор J называется *порождающим* для пары X, этот оператор определяется парой X однозначно.

Обозначим через $\mathcal{B}$ множество всех положительных функций, заданных и измеримых по Борелю на полуоси $(0, +\infty)$. Пусть $\psi \in \mathcal{B}$. Поскольку спектр оператора J является подмножеством полуоси $(0, +\infty)$, в пространстве X_0 определен как функция от J оператор $\psi(J)$. Область определения оператора $\psi(J)$ есть линейное множество, плотное в X_0. Обозначим через $[X_0, X_1]_\psi$ или, короче, X_ψ область определения оператора $\psi(J)$, наделенную скалярным произведением графика:

$$(u, v)_{X_\psi} = (u, v)_{X_0} + (\psi(J)u, \psi(J)v)_{X_0}.$$

Пространство X_ψ гильбертово сепарабельное.

Будем называть функцию ψ *интерполяционным параметром,* если для произвольных допустимых пар $X = [X_0, X_1]$, $Y = [Y_0, Y_1]$ гильбертовых пространств и для любого линейного отображения T, заданного на X_0, выполняется следующее условие. Если при $j = 0, 1$ сужение отображения T на пространство X_j является ограниченным оператором $T: X_j \to Y_j$, то и сужение отображения T на пространство X_ψ является ограниченным оператором T: $X_\psi \to Y_\psi$.

Иными словами, функция ψ является интерполяционным параметром тогда и только тогда, когда отображение $X \mapsto X_\psi$ является интерполяционным функтором, заданным на категории допустимых пар X гильбертовых пространств. В этом случае будем говорить, что *пространство X_ψ получено в результате интерполяции пары X с функциональным параметром ψ.*

Классический результат [17, с. 41] в теории интерполяции гильбертовых пространств состоит в том, что степенная функция $\psi(t) = t^\theta$ порядка $\theta \in (0, 1)$ является интерполяционным параметром (в этом случае θ естественным образом играет роль числового параметра интерполяции). Иные, значительно более широкие классы интерполяционных функциональных параметров найдены в [6, 11, 18]. Среди таковых нам понадобится следующий класс.

Предложение 3.1 [6] (п. 2), [15] (п. 7). *Предположим, что функция $\psi \in \mathcal{B}$:*

а) *ограничена на каждом отрезке $[a, b]$, где $0 < a < b < +\infty$;*

б) *правильно меняющаяся по Карамата на $+\infty$ порядка θ, где $0 < \theta < 1$, т. е.* [16, с. 9]

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\psi(\lambda t)}{\psi(t)} = \lambda^\theta \quad \textit{для любого} \quad \lambda > 0.$$

Тогда ψ — интерполяционный параметр, причем существует число $c_\psi > 0$ такое, что

$$\|T\|_{X_\psi \to Y_\psi} \le c_\psi \max\{\|T\|_{X_j \to Y_j} : j = 0, 1\}.$$

Здесь $X = [X_0, X_1]$ *и* $Y = [Y_0, Y_1]$ *— произвольные допустимые пары гильбертовых пространств, а* T *— произвольное линейное отображение, заданное на* X_0 *и такое, что операторы* $T : X_j \to Y_j$ *ограничены при* $j = 0, 1$. *Число* $c_\psi > 0$ *не зависит от* T, *а также от пар* X *и* Y, *если эти пары нормальные.*

Интерполяция с функциональным параметром устанавливает тесную связь между классической соболевской шкалой и уточненной шкалой пространств. А именно, справедливо следующее предложение.

Предложение 3.2 [7] (п. 3). *Пусть заданы функция* $\varphi \in \mathcal{M}$ *и положительные числа* ε, δ. *Положим* $\psi(t) = t^{\varepsilon/(\varepsilon+\delta)}\varphi(t^{1/(\varepsilon+\delta)})$ *при* $t \geq 1$ *и* $\psi(t) = \varphi(1)$ *при* $0 < t < 1$. *Тогда*:

а) *функция* $\psi \in \mathcal{B}$ *удовлетворяет всем условиям предложения* 3.1, *где* $\theta = \varepsilon/(\varepsilon+\delta)$ *и, следовательно, является интерполяционным параметром*;

б) *для произвольного* $s \in \mathbb{R}$ *справедливы следующие равенства пространств с точностью до эквивалентности норм в них*:

$$[H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n), H^{s+\delta}(\mathbb{R}^n)]_\psi = H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) \quad и \quad [H^{s-\varepsilon}(\Gamma), H^{s+\delta}(\Gamma)]_\psi = H^{s,\varphi}(\Gamma). \tag{3.1}$$

Отметим, что содержащиеся в формуле (3.1) пары пространств являются нормальными.

Далее понадобятся следующие два утверждения об интерполяции фредгольмовых операторов и прямых произведений пространств [18] (п. 3). Напомним, что линейный ограниченный оператор $T: X \to Y$, где X, Y — банаховы пространства, называется *фредгольмовым,* если его ядро конечномерно, а область значений $T(X)$ замкнута в Y и имеет там конечную коразмерность. Фредгольмов оператор T имеет конечный индекс $\operatorname{ind} T = \dim\ker T - \dim(Y/T(X))$.

Предложение 3.3. *Пусть заданы две допустимые пары* $X = [X_0, X_1]$ *и* $Y = [Y_0, Y_1]$ *гильбертовых пространств. Пусть, кроме того, на* X_0 *задано линейное отображение* T, *для которого существуют ограниченные фредгольмовы операторы* $T: X_j \to Y_j$, $j = 0, 1$, *имеющие общее ядро* $\mathcal{N}$ *и одинаковый индекс* κ. *Тогда для произвольного интерполяционного параметра* $\psi \in \mathcal{B}$ *ограниченный оператор* $T: X_\psi \to Y_\psi$ *фредгольмов с ядром* $\mathcal{N}$, *областью значений* $Y_\psi \cap T(X_0)$ *и тем же индексом* κ.

Предложение 3.4. *Пусть задано конечное число допустимых пар* $[X_0^{(k)}, X_1^{(k)}]$, $k = 1, \ldots, r$, *гильбертовых пространств. Тогда для любой функции* $\psi \in \mathcal{B}$ *справедливо*

$$\left[\prod_{k=1}^{r} X_0^{(k)}, \prod_{k=1}^{r} X_1^{(k)}\right]_\psi = \prod_{k=1}^{r}\left[X_0^{(k)}, X_1^{(k)}\right]_\psi$$

с равенством норм.

4. Эллиптический оператор в уточненной шкале. Вернемся к ПДО $A \in \Psi^m_{\mathrm{ph}}(\Gamma)$, эллиптическому на многообразии Γ. Справедливо следующее утверждение, содержащее в себе, как частный случай, теорему 1.1.

Теорема 4.1. *Для произвольных параметров* $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$ *оператор*

$$A: \quad H^{s+m,\varphi}(\Gamma) \to H^{s,\varphi}(\Gamma) \tag{4.1}$$

ограничен и фредгольмов. Его ядро совпадает с пространством N, *а область значений равна множеству*

$$\left\{ f \in H^{s,\varphi}(\Gamma):\ (f, v)_\Gamma = 0 \quad \text{для любого} \quad v \in N^+ \right\}. \tag{4.2}$$

Индекс оператора (4.1) *равен числу* $\dim N - \dim N^+$ *и, значит, не зависит от* s, φ.

Доказательство. В случае $\varphi \equiv 1$ (соболевская шкала) эта теорема известна [1, с. 262 – 263; 2, с. 25 – 31]. Отсюда общий случай $\varphi \in \mathcal{M}$ получается с помощью интерполяции с подходящим функциональным параметром. А именно, пусть $s \in \mathbb{R}$. Имеем ограниченные фредгольмовы операторы

$$A: \quad H^{s\mp 1+m}(\Gamma) \to H^{s\mp 1}(\Gamma) \tag{4.3}$$

с общим ядром N и одинаковым индексом $\kappa := \dim N - \dim N^+$. При этом

$$A(H^{s\mp 1+m}(\Gamma)) = \left\{ f \in H^{s\mp 1}(\Gamma):\ (f, v)_\Gamma = 0 \quad \text{для любого} \quad v \in N^+ \right\}. \tag{4.4}$$

Применим к операторам (4.3) интерполяцию с функциональным параметром ψ из предложения 3.2, где положим $\varepsilon = \delta = 1$. Получим ограниченный оператор

$$A: \quad [H^{s-1+m}(\Gamma), H^{s+1+m}(\Gamma)]_\psi \to [H^{s-1}(\Gamma), H^{s+1}(\Gamma)]_\psi,$$

который в силу предложения 3.2 б) совпадает с оператором (4.1). Следовательно, согласно предложению 3.3, оператор (4.1) фредгольмов с ядром N, индексом $\kappa = \dim N - \dim N^+$ и областью значений

$$A(H^{s+m,\varphi}(\Gamma)) = H^{s,\varphi}(\Gamma) \cap A(H^{s-1+m}(\Gamma)) \quad .$$

Последняя совпадает с множеством (4.2) в силу равенства (4.4) и вложения $H^{s,\varphi}(\Gamma) \hookrightarrow H^{s-1}(\Gamma)$.

Теорема 4.1 доказана.

Согласно этой теореме N^+ — дефектное подпространство оператора (4.1). Заметим, что в силу предложения 2.1 д) оператор

$$A^+: \quad H^{-s,1/\varphi}(\Gamma) \to H^{-s-m,1/\varphi}(\Gamma) \tag{4.5}$$

является сопряженным к оператору (4.1) относительно формы $(\cdot,\cdot)_\Gamma$. Поскольку ПДО A^+ эллиптический на Γ, в силу теоремы 4.1 ограниченный оператор (4.5) фредгольмов и имеет ядро N^+ и дефектное подпространство N.

Отметим [19; 2, с. 32], что в случае $\dim \Gamma \geq 2$ индексы операторов (4.1) и (4.5) равны нулю. В случае $\dim \Gamma = 1$ индекс ПДО A может быть ненулевым. Если оператор A дифференциальный, то его индекс равен нулю всегда.

Если пространства N и N^+ тривиальны, то из теоремы 4.1 и теоремы Банаха об обратном операторе следует, что оператор (4.1) совпадает с топологическим изоморфизмом (1.1). В общем случае изоморфизм удобно задавать с помощью следующих проекторов.

Представим пространства, в которых действует оператор (4.1), в виде прямых сумм замкнутых подпространств:

$$H^{s+m,\varphi}(\Gamma) = N \dotplus \left\{ u \in H^{s+m,\varphi}(\Gamma):\ (u, w)_\Gamma = 0 \quad \text{для любого} \quad w \in N \right\},$$

$$H^{s,\varphi}(\Gamma) = N^+ \dotplus \left\{ f \in H^{s,\varphi}(\Gamma):\ (f, v)_\Gamma = 0 \quad \text{для любого} \quad v \in N^+ \right\}.$$

Такие разложения в прямые суммы существуют, так как пространства N и N^+ конечномерны. Обозначим через P и P^+ косые проекторы соответственно пространств $H^{s+m,\varphi}(\Gamma)$ и $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ на вторые слагаемые в этих суммах. Эти проекторы не зависят от s и φ.

Теорема 4.2. *Для произвольных параметров* $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$ *сужение оператора* (4.1) *на подпространство* $P(H^{s+m,\varphi}(\Gamma))$ *является топологическим изоморфизмом*

$$A: \quad P(H^{s+m,\varphi}(\Gamma)) \leftrightarrow P^{+}(H^{s,\varphi}(\Gamma)). \tag{4.6}$$

Доказательство. Согласно теореме 4.1, N — ядро, а $P^{+}(H^{s,\varphi}(\Gamma))$ — область значений оператора (4.1). Следовательно, оператор (4.6) — биекция. Кроме того, этот оператор ограничен. Значит, в силу теоремы Банаха об обратном операторе он является топологическим изоморфизмом.

Из теоремы 4.2 вытекает следующая априорная оценка решения эллиптического уравнения $Au = f$.

Теорема 4.3. *Для произвольных фиксированных параметров* $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$ *и числа* $\sigma < s + m$ *существует такое число* $c > 0$, *что для любого распределения* $u \in H^{s+m,\varphi}(\Gamma)$ *выполняется неравенство*

$$\|u\|_{s+m,\varphi} \le c\Big(\|Au\|_{s,\varphi} + \|u\|_{\sigma}\Big). \tag{4.7}$$

Доказательство. Пусть $u \in H^{s+m,\varphi}(\Gamma)$. Поскольку N — конечномерное подпространство в пространствах $H^{s+m,\varphi}(\Gamma)$ и $H^{\sigma}(\Gamma)$, нормы в этих пространствах эквивалентны на N. В частности, для функции $u - Pu \in N$ выполняется неравенство

$$\|u - Pu\|_{s+m,\varphi} \le c_1\|u - Pu\|_{\sigma}$$

с постоянной $c_1 > 0$, не зависящей от u. Отсюда получаем

$$\|u\|_{s+m,\varphi} \le \|u - Pu\|_{s+m,\varphi} + \|Pu\|_{s+m,\varphi} \le$$
$$\le c_1\|u - Pu\|_{\sigma} + \|Pu\|_{s+m,\varphi} \le c_1 c_2\|u\|_{\sigma} + \|Pu\|_{s+m,\varphi},$$

где c_2 — норма проектора $1 - P$, действующего в пространстве $H^{\sigma}(\Gamma)$. Итак,

$$\|u\|_{s+m,\varphi} \le \|Pu\|_{s+m,\varphi} + c_1 c_2\|u\|_{\sigma}. \tag{4.8}$$

Далее, поскольку $APu = Au$, $Pu \in H^{s+m,\varphi}(\Gamma)$ — прообраз распределения $Au \in H^{s,\varphi}(\Gamma)$ при топологическом изоморфизме (4.6). Следовательно,

$$\|Pu\|_{s+m,\varphi} \le c_3\|Au\|_{s,\varphi},$$

где c_3 — норма оператора, обратного к (4.6). Отсюда и из неравенства (4.8) непосредственно следует оценка (4.7).

Теорема 4.3 доказана.

Отметим, что если $N = \{0\}$, т. е. уравнение $Au = f$ имеет не более одного решения, то величина $\|u\|_{\sigma}$ в правой части оценки (4.7) отсутствует. Если же $N \ne \{0\}$, то для каждого распределения u эту величину можно сделать как угодно малой за счет выбора достаточно малого числа σ.

5. Локальная гладкость решения эллиптического уравнения. Зададимся следующим вопросом. Предположим, что правая часть эллиптического уравнения $Au = f$ имеет некоторую локальную гладкость в уточненной шкале на заданном открытом подмножестве Γ_0 многообразия Γ. Что тогда можно сказать о локальной гладкости решения u уравнения? Ответ на этот вопрос будет получен ниже. Рассмотрим сначала случай, когда $\Gamma_0 = \Gamma$.

Теорема 5.1. *Предположим, что распределение* $u \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ *является решением уравнения* $Au = f$ *на многообразии* Γ, *где* $f \in H^{s,\varphi}(\Gamma)$ *для некоторых* *параметров* $s\in\mathbb{R}$ *и* $\varphi\in\mathcal{M}$. *Тогда* $u\in H^{s+m,\varphi}(\Gamma)$.

Доказательство. Поскольку многообразие Γ компактно, пространство $\mathcal{D}'(\Gamma)$ является объединением соболевских пространств $H^{\sigma}(\Gamma)$, где $\sigma\in\mathbb{R}$. Следовательно, для распределения $u\in\mathcal{D}'(\Gamma)$ существует такое число σ, что $u\in H^{\sigma+m}(\Gamma)$. В силу теоремы 4.1 (где полагаем $s=\sigma$ и $\varphi\equiv 1$) распределение $f=Au$ удовлетворяет условию $(f,v)_\Gamma=0$ для любой функции $v\in N^+$. Отсюда и из условия $f\in H^{s,\varphi}(\Gamma)$, согласно теореме 4.1, вытекает включение $f\in A(H^{s+m,\varphi}(\Gamma))$. Таким образом, на многообразии Γ наряду с равенством $Au=f$ выполняется также равенство $Av=f$ для некоторого распределения $v\in H^{s+m,\varphi}(\Gamma)$. Следовательно, $A(u-v)=0$ на Γ и, согласно теореме 4.1, справедливо

$$w:=u-v\in N\subset C^\infty(\Gamma)\subset H^{s+m,\varphi}(\Gamma).$$

Значит, $u=v+w\in H^{s+m,\varphi}(\Gamma)$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь общий случай, когда Γ_0 — произвольное открытое непустое подмножество многообразия Γ. Обозначим

$$H^{s,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0):=\left\{f\in\mathcal{D}'(\Gamma):\ \chi f\in H^{s,\varphi}(\Gamma)\ \text{для любого}\ \chi\in C^\infty(\Gamma),\ \operatorname{supp}\chi\subset\Gamma_0\right\}.$$

Теорема 5.2. *Предположим, что распределение* $u\in\mathcal{D}'(\Gamma)$ *является решением уравнения* $Au=f$ *на множестве* Γ_0, *где* $f\in H^{s,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$ *для некоторых параметров* $s\in\mathbb{R}$ *и* $\varphi\in\mathcal{M}$. *Тогда* $u\in H^{s+m,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$.

Доказательство. Покажем сначала, что из условия $f\in H^{s,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$ вытекает следующее свойство повышения локальной гладкости решения уравнения $Au=f$: для каждого номера $r\geq 1$ справедлива импликация

$$u\in H^{s+m-r,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)\ \Rightarrow\ u\in H^{s+m-r+1,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0). \tag{5.1}$$

Произвольно выберем такие функции $\chi,\ \eta\in C^\infty(\Gamma)$, чтобы $\operatorname{supp}\chi,\ \operatorname{supp}\eta\subset\Gamma_0$ и $\eta=1$ в окрестности $\operatorname{supp}\chi$. Переставляя ПДО A и оператор умножения на функцию χ, можем записать следующие равенства:

$$\begin{aligned}A\chi u &= A\chi\eta u=\chi A\eta u+A'\eta u=\chi Au+\chi A(\eta-1)u+A'\eta u=\\ &=\chi f+\chi A(\eta-1)u+A'\eta u\quad\text{на}\quad\Gamma.\end{aligned} \tag{5.2}$$

Здесь A' — коммутатор ПДО A и оператора умножения на функцию χ. Поскольку $A'\in\Psi^{m-1}_{\mathrm{ph}}(\Gamma)$, существует ограниченный оператор

$$A':\quad H^{s+m-r,\varphi}(\Gamma)\to H^{s-r+1,\varphi}(\Gamma). \tag{5.3}$$

Это получаем с помощью интерполяции из следующего известного утверждения [2, с. 23]: ПДО класса $\Psi^{m-1}_{\mathrm{ph}}(\Gamma)$ является ограниченным оператором из пространства $H^{\sigma}(\Gamma)$ в пространство $H^{\sigma-m+1}(\Gamma)$ при любом $\sigma\in\mathbb{R}$. В самом деле, возьмем здесь $\sigma:=s\mp 1+m-r$ и рассмотрим ограниченные операторы

$$A':\quad H^{s\mp1+m-r}(\Gamma)\to H^{s\mp1-r+1}(\Gamma).$$

Применим к ним интерполяцию с функциональным параметром ψ из теоремы 3.2, где примем $\varepsilon=\delta=1$. Получим ограниченный оператор

$$A':\quad [H^{s-1+m-r}(\Gamma),\,H^{s+1+m-r}(\Gamma)]_\psi\to[H^{s-1-r+1}(\Gamma),\,H^{s+1-r+1}(\Gamma)]_\psi,$$

который согласно пункту б) этой теоремы совпадает с оператором (5.3).

Продолжим вывод формулы (5.1). В силу (5.3) можем записать следующее:

$$u \in H^{s+m-r,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0) \;\Rightarrow\; \eta u \in H^{s+m-r,\varphi}(\Gamma) \;\Rightarrow\; A'\eta u \in H^{s-r+1,\varphi}(\Gamma). \tag{5.4}$$

На основании условия $f \in H^{s,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$ и в силу неравенства $-r+1 \le 0$ имеем

$$\chi f \in H^{s,\varphi}(\Gamma) \hookrightarrow H^{s-r+1,\varphi}(\Gamma). \tag{5.5}$$

Кроме того, так как носители функций χ и $\eta - 1$ не пересекаются, то

$$\chi A(\eta-1)u \in C^{\infty}(\Gamma) \subset H^{s-r+1,\varphi}(\Gamma). \tag{5.6}$$

Таким образом, из формул (5.2) и (5.4) – (5.6) следует импликация

$$u \in H^{s+m-r,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0) \;\Rightarrow\; A\chi u \in H^{s-r+1,\varphi}(\Gamma). \tag{5.7}$$

Далее, согласно теореме 5.1,

$$A\chi u \in H^{s-r+1,\varphi}(\Gamma) \;\Rightarrow\; \chi u \in H^{s-r+1+m,\varphi}(\Gamma). \tag{5.8}$$

Формулы (5.7), (5.8) влекут импликацию (5.1) вследствие произвольности выбора функции $\chi \in C^{\infty}(\Gamma)$, удовлетворяющей условию $\operatorname{supp}\chi \subset \Gamma_0$.

Теперь с помощью (5.1) легко показать, что $u \in H^{s+m,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$. Поскольку u — распределение на компакте Γ, существует такой достаточно большой номер r_0, что

$$u \in H^{s+m-r_0+1}(\Gamma) \subset H^{s+m-r_0,\varphi}(\Gamma) \subset H^{s+m-r_0,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0).$$

Отсюда, применяя импликацию (5.1) последовательно для $r = r_0, r_0 - 1, \ldots, 1$, получаем требуемое:

$$u \in H^{s+m-r_0,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0) \Rightarrow u \in H^{s+m-r_0+1,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0) \Rightarrow \ldots \Rightarrow u \in H^{s+m,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0).$$

Теорема 5.2 доказана.

Теорема 5.2 уточняет применительно к шкале пространств $\{H^{s,\varphi}(\Gamma)\colon s \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{M}\}$ известные утверждения о повышении локальной гладкости решения эллиптического уравнения (см., например, [2, 3, 20] и приведенную там библиографию). При этом, как видим, уточненная локальная гладкость φ правой части эллиптического уравнения наследуется его решением. Теорема 5.2 в сочетании с предложением 2.1 г) позволяет установить наличие классических производных у решения эллиптического уравнения.

Теорема 5.3. *Предположим, что распределение* $u \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ *является решением уравнения* $Au = f$ *на множестве* Γ_0, *где* $f \in H^{\rho-m+n/2,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$ *для некоторых целого числа* $\rho \ge 0$ *и функционального параметра* $\varphi \in \mathcal{M}$, *удовлетворяющего неравенству* (2.2). *Тогда* $u \in C^{\rho}(\Gamma_0)$.

Доказательство. Согласно теореме 5.2, условие $f \in H^{\rho-m+n/2,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$ влечет свойство $u \in H^{\rho+n/2,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$. Последнее означает, что $\chi u \in H^{\rho+n/2,\varphi}(\Gamma)$ для любой функции $\chi \in C^{\infty}(\Gamma)$, у которой $\operatorname{supp}\chi \subset \Gamma_0$. Далее, поскольку функциональный параметр $\varphi \in \mathcal{M}$ удовлетворяет неравенству (2.2), в силу предложения 2.1 г) справедливо вложение $H^{\rho+n/2,\varphi}(\Gamma) \hookrightarrow C^{\rho}(\Gamma)$. Таким образом, $\chi u \in C^{\rho}(\Gamma)$. Отсюда, фиксируя произвольную точку $x \in \Gamma_0$ и выбирая функцию χ, равную единице в окрестности этой точки, получаем, что распределение u совпадает в окрестности точки x с функцией класса C^{ρ}. Следовательно, $u \in C^{\rho}(\Gamma_0)$, что и требовалось доказать.

Отметим, что если использовать эту теорему лишь для соболевской шкалы пространств, то вместо условия $f \in H^{\rho-m+n/2,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$ следует потребовать, чтобы $f \in H^{\rho-m+n/2+\varepsilon}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$ для некоторого числа $\varepsilon > 0$, т. е. завысить основную гладкость правой части уравнения, что существенно огрубляет результат.

Из теоремы 5.3 для $\rho = m$ непосредственно вытекает следующее достаточное условие *классичности* решения эллиптического *дифференциального* уравнения.

***Следствие* 5.1.** *Пусть A — эллиптический линейный дифференциальный оператор на многообразии Γ порядка m с бесконечно гладкими комплексными коэффициентами. Предположим, что распределение $u \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ является* (*обобщенным*) *решением уравнения $Au = f$ на множестве Γ_0, где $f \in H^{n/2,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$ для некоторого функционального параметра $\varphi \in \mathcal{M}$, удовлетворяющего неравенству* (2.2). *Тогда $u \in C^m(\Gamma_0)$, т. е. решение u является классическим на множестве Γ_0.*

6. Эллиптический ПДО с параметром. Эллиптические операторы и краевые задачи с параметром изучались в работах Ш. Агмона, Л. Ниренберга [21], М. С. Аграновича, М. И. Вишика [22], А. Н. Кожевникова [23] и их последователей (см. [2, 24, 25] и приведенную там библиографию). Ими было установлено, что при достаточно больших по модулю значениях комплексного параметра эллиптический оператор является изоморфизмом в подходящих парах соболевских пространств, причем норма оператора допускает некоторую двустороннюю оценку с постоянными, не зависящими от параметра. Мы покажем, что для эллиптического ПДО с параметром на замкнутом многообразии справедлив аналог этого результата в уточненной шкале пространств. Отметим, что эллиптическая краевая задача с параметром (для дифференциального уравнения) в уточненной шкале пространств изучалась в работе [15].

При определении эллиптического ПДО с параметром будем следовать обзору [2, с. 57]. Произвольно зафиксируем числа $m > 0$ и $q \in \mathbb{N}$. Рассмотрим ПДО $A(\lambda)$ класса $\Psi^{mq}_{\mathrm{ph}}(\Gamma)$, который зависит от комплексного параметра λ следующим образом:

$$A(\lambda) = \sum_{j=0}^{q} \lambda^{q-j} A_j . \tag{6.1}$$

Здесь $A_j \in \Psi^{mj}_{\mathrm{ph}}(\Gamma)$ для каждого номера $j = 0, \ldots, q$, причем A_0 — оператор умножения на некоторую функцию $a_0 \in C^\infty(\Gamma)$. (Поскольку $m(q-j) + \operatorname{ord} A_j = \operatorname{ord} A(\lambda)$, в формуле (6.1) параметру λ приписывается вес m.)

Пусть K — фиксированный замкнутый угол на комплексной плоскости с вершиной в начале координат (не исключается случай, когда K вырождается в луч). Предположим, что ПДО $A(\lambda)$ *является эллиптическим с параметром в угле* K, т. е.

$$\sum_{j=0}^{q} \lambda^{q-j} a_{j,0}(x,\xi) \neq 0 \text{ для любых } x \in \Gamma,\ \xi \in T^*_x\Gamma,\ \lambda \in K \text{ таких, что } (\xi,\lambda) \neq 0. \tag{6.2}$$

Здесь $a_{j,0}(x,\xi)$ — главный символ ПДО A_j; при этом $a_{0,0}(x,\xi) \equiv a_0(x)$, а функции $a_{1,0}(x,\xi)$, $a_{2,0}(x,\xi), \ldots$ считаются равными 0 при $\xi = 0$ (такое допущение обусловлено тем, что главные символы изначально не определены при $\xi = 0$).

Например, для ПДО $A-\lambda I$, где $A \in \Psi^m_{\mathrm{ph}}(\Gamma)$, а I — тождественный оператор, условие эллиптичности с параметром в угле K означает, что $a_0(x,\xi) \notin K$ при $\xi \neq 0$. Здесь, как и прежде, $a_0(x,\xi)$ — главный символ ПДО A. Этот пример важен в спектральной теории ПДО.

Из эллиптичности с параметром в угле K ПДО $A(\lambda)$ вытекает, что при каждом фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ этот ПДО эллиптический на Γ. В самом деле, главный символ ПДО $A(\lambda)$ равен $a_{q,0}(x,\xi)$ для каждого λ и, как это следует из (6.2) при $\lambda = 0$, удовлетворяет неравенству $a_{q,0}(x,\xi) \neq 0$ для любых $x \in \Gamma$ и $\xi \in T^*_x\Gamma \setminus \{0\}$. Последнее означает, что ПДО $A(\lambda)$ эллиптический на Γ. Таким образом, согласно теореме 4.1, для произвольных $\lambda \in \mathbb{C}$, $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$ оператор

$$A(\lambda):\quad H^{s+mq,\varphi}(\Gamma) \to H^{s,\varphi}(\Gamma) \tag{6.3}$$

ограничен и фредгольмов. Более того, поскольку $A(\lambda)$ — эллиптический с параметром ПДО, он имеет следующие дополнительные свойства.

Теорема 6.1. 1. *Существует такое число* $\lambda_0 > 0$, *что для каждого значения параметра* $\lambda \in K$, *удовлетворяющего условию* $|\lambda| \geq \lambda_0$, *при любых* $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$ *справедлив топологический изоморфизм*

$$A(\lambda):\quad H^{s+mq,\varphi}(\Gamma) \leftrightarrow H^{s,\varphi}(\Gamma). \tag{6.4}$$

2. *Для произвольных фиксированных параметров* $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$ *найдется число* $c \geq 1$ *такое, что*

$$c^{-1}\|A(\lambda)u\|_{s,\varphi} \leq \left(\|u\|_{s+mq,\varphi} + |\lambda|^q\|u\|_{s,\varphi}\right) \leq c\|A(\lambda)u\|_{s,\varphi} \tag{6.5}$$

для любого $\lambda \in K$, $|\lambda| \geq \lambda_0$, *и произвольного распределения* $u \in H^{s+mq,\varphi}(\Gamma)$.

В случае $\varphi \equiv 1$ (соболевские пространства) эта теорема известна [2, с. 58]. Отметим, что левое неравенство в двусторонней оценке (6.5) справедливо без предположения об эллиптичности с параметром ПДО $A(\lambda)$. Оно тривиально следует из формулы (6.1) и интерполяционного неравенства (ср. с [22, с. 62])

$$\|u\|_{s+mj} \leq |\lambda|^{j-q}\|u\|_{s+mq} + |\lambda|^j\|u\|_s, \quad j = 0, \dots, q.$$

Докажем отдельно пункты 1 и 2 теоремы 6.1.

***Доказательство пункта* 1.** Пусть $s \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in \mathcal{M}$. Поскольку для каждого $\lambda \in \mathbb{C}$ ПДО $A(\lambda)$ эллиптический на Γ, в силу теоремы 4.1 ограниченный фредгольмов оператор (6.3) имеет не зависящие от s и φ конечномерные ядро $N(\lambda)$ и дефектное подпространство $N^+(\lambda)$. Но, как отмечалось выше, в случае соболевской шкалы существует такое число $\lambda_0 > 0$, что для каждого $\lambda \in K$, удовлетворяющего условию $|\lambda| \geq \lambda_0$, справедлив топологический изоморфизм

$$A(\lambda):\quad H^{s+mq}(\Gamma) \leftrightarrow H^s(\Gamma).$$

Следовательно, для указанных λ пространства $N(\lambda)$ и $N^+(\lambda)$ тривиальны, т. е. линейный ограниченный оператор (6.3) является биекцией. Отсюда по теореме Банаха об обратном операторе получаем топологический изоморфизм (6.4). Пункт 1 доказан.

Пункт 2 докажем с помощью интерполяции с функциональным параметром. При этом воспользуемся следующей интерполяционной леммой (ср. с [15] (лемма 7.2)).

Пусть заданы функция $\varphi \in \mathcal{M}$ и числа $\sigma \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$, $\theta > 0$. Обозначим через $H^{\sigma,\varphi}(\Gamma,\rho,\theta)$ пространство $H^{\sigma,\varphi}(\Gamma)$, которое наделено нормой, зависящей от числовых параметров ρ и θ следующим образом:

$$\|u\|_{H^{\sigma,\varphi}(\Gamma,\rho,\theta)} := \left(\|u\|^2_{\sigma,\varphi} + \rho^2\|u\|^2_{\sigma-\theta,\varphi}\right)^{1/2}.$$

Это определение корректно в силу непрерывного вложения $H^{\sigma,\varphi}(\Gamma) \hookrightarrow \hookrightarrow H^{\sigma-\theta,\varphi}(\Gamma)$. Отсюда вытекает, что нормы в пространствах $H^{\sigma,\varphi}(\Gamma,\rho,\theta)$ и $H^{\sigma,\varphi}(\Gamma)$ эквивалентны. Норма в пространстве $H^{\sigma,\varphi}(\Gamma,\rho,\theta)$ порождена скалярным произведением

$$(u_1,u_2)_{H^{\sigma,\varphi}(\Gamma,\rho,\theta)} := (u_1,u_2)_{\sigma,\varphi} + \rho^2(u_1,u_2)_{\sigma-\theta,\varphi}.$$

Следовательно, это пространство гильбертово. Как и прежде, в случае $\varphi \equiv 1$ индекс φ в обозначениях опускаем. Возвращаясь к формулировке теоремы 6.1, заметим, что

$$\|u\|_{H^{s+mq,\varphi}(\Gamma,|\lambda|^q,mq)} \le \|u\|_{s+mq,\varphi} + |\lambda|^q\|u\|_{s,\varphi} \le \sqrt{2}\,\|u\|_{H^{s+mq,\varphi}(\Gamma,|\lambda|^q,mq)}. \tag{6.6}$$

В силу предложения 3.2 пространства

$$[H^{\sigma-\varepsilon}(\Gamma,\rho,\theta),\, H^{\sigma+\delta}(\Gamma,\rho,\theta)]_\psi \quad \text{и} \quad H^{\sigma,\varphi}(\Gamma,\rho,\theta), \qquad \varepsilon > 0, \quad \delta > 0,$$

равны с точностью до эквивалентных норм. Оказывается, в оценках норм этих пространств постоянные можно выбрать так, чтобы они не зависели от параметра ρ.

Лемма 6.1. *Пусть* $\sigma \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$ *и заданы положительные числа* θ, ε, δ. *Тогда существует число* $c_0 \ge 1$ *такое, что для произвольных* $\rho > 0$, $u \in \in H^{\sigma,\varphi}(\Gamma)$ *справедлива двусторонняя оценка норм*

$$c_0^{-1}\|u\|_{H^{\sigma,\varphi}(\Gamma,\rho,\theta)} \le \|u\|_{[H^{\sigma-\varepsilon}(\Gamma,\rho,\theta),\, H^{\sigma+\delta}(\Gamma,\rho,\theta)]_\psi} \le c_0\|u\|_{H^{\sigma,\varphi}(\Gamma,\rho,\theta)}. \tag{6.7}$$

Здесь ψ *— интерполяционный параметр из формулировки предложения* 3.2.

Доказательство. Пусть параметр $\rho > 0$. Установим сначала аналог оценки (6.7) для пространств распределений в $\mathbb{R}^n$, а затем с помощью операторов „распрямления" и „склейки" перейдем к пространствам распределений на многообразии Γ (ср. с доказательством леммы 7.2 из работы [15]). Обозначим через $H^{\sigma,\varphi}(\mathbb{R}^n,\rho,\theta)$ пространство $H^{\sigma,\varphi}(\mathbb{R}^n)$, наделенное гильбертовой нормой

$$\|u\|_{H^{\sigma,\varphi}(\mathbb{R}^n,\rho,\theta)} := \left(\|u\|^2_{H^{\sigma,\varphi}(\mathbb{R}^n)} + \rho^2\|u\|^2_{H^{\sigma-\theta,\varphi}(\mathbb{R}^n)}\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{2\sigma}(1+\rho^2\langle\xi\rangle^{-2\theta})\,\varphi^2(\langle\xi\rangle)\,|\hat{u}(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2}. \tag{6.8}$$

Для каждого фиксированного $\rho > 0$ эта норма эквивалентна норме в пространстве $H^{\sigma,\varphi}(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, пространство $H^{\sigma,\varphi}(\mathbb{R}^n,\rho,\theta)$ гильбертово. Аналогично определяются пространства $H^{\sigma-\varepsilon}(\mathbb{R}^n,\rho,\theta)$ и $H^{\sigma+\delta}(\mathbb{R}^n,\rho,\theta)$. В силу предложения 3.2 пространства

$$[H^{\sigma-\varepsilon}(\mathbb{R}^n,\rho,\theta),\, H^{\sigma+\delta}(\mathbb{R}^n,\rho,\theta)]_\psi \quad \text{и} \quad H^{\sigma,\varphi}(\mathbb{R}^n,\rho,\theta) \tag{6.9}$$

равны с точностью до эквивалентных норм при каждом фиксированном $\rho > 0$. Покажем, что в оценках норм этих пространств можно взять постоянные, не зависящие от параметра ρ.

Вычислим норму в первом пространстве (6.9) (ср. с [7, с. 354}). Обозначим через J псевдодифференциальный оператор в пространстве $\mathbb{R}^n$ с символом $\langle\xi\rangle^{\varepsilon+\delta}$, где аргумент $\xi \in \mathbb{R}^n$. Непосредственно проверяется, что оператор J является порождающим для пары пространств $[H^{\sigma-\varepsilon}(\mathbb{R}^n, \rho, \theta),\ H^{\sigma+\delta}(\mathbb{R}^n, \rho, \theta)]$. С помощью изометрического изоморфизма

$$\mathcal{F}:\quad H^{\sigma-\varepsilon}(\mathbb{R}^n, \rho, \theta) \ \leftrightarrow\ L_2(\mathbb{R}^n, \langle\xi\rangle^{2(\sigma-\varepsilon)}(1+\rho^2\langle\xi\rangle^{-2\theta})\,d\xi),$$

где $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье, оператор J приводится к виду умножения на функцию $\langle\xi\rangle^{\varepsilon+\delta}$, а оператор $\psi(J)$ — к виду умножения на функцию $\psi(\langle\xi\rangle^{\varepsilon+\delta}) = \langle\xi\rangle^{\varepsilon}\varphi(\langle\xi\rangle)$. Следовательно,

$$\|u\|^2_{[H^{\sigma-\varepsilon}(\mathbb{R}^n,\rho,\theta),\,H^{\sigma+\delta}(\mathbb{R}^n,\rho,\theta)]_\psi} = \|\psi(J)u\|^2_{H^{\sigma-\varepsilon}(\mathbb{R}^n,\rho,\theta)} + \|u\|^2_{H^{\sigma-\varepsilon}(\mathbb{R}^n,\rho,\theta)} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{2(\sigma-\varepsilon)}(1+\rho^2\langle\xi\rangle^{-2\theta})\left|\langle\xi\rangle^{\varepsilon}\varphi(\langle\xi\rangle)\hat{u}(\xi)\right|^2 d\xi\ +$$

$$+\ \int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{2(\sigma-\varepsilon)}(1+\rho^2\langle\xi\rangle^{-2\theta})\,|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi\ =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{2\sigma}(1+\rho^2\langle\xi\rangle^{-2\theta})\,\varphi^2(\langle\xi\rangle)\,(1+\langle\xi\rangle^{-2\varepsilon}\varphi^{-2}(\langle\xi\rangle))\,|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

Поскольку $\varphi \in \mathcal{M}$, $\varepsilon > 0$, справедливо [16, с. 24] $t^{\varepsilon}\varphi(t) \to \infty$ при $t \to +\infty$ и поэтому

$$c_1\ :=\ \sup\{1+\langle\xi\rangle^{-2\varepsilon}\varphi^{-2}(\langle\xi\rangle) : \xi \in \mathbb{R}^n\}\ <\ \infty.$$

Отсюда в силу (6.8) получаем оценку

$$\|u\|_{H^{\sigma,\varphi}(\mathbb{R}^n,\rho,\theta)}\ \le\ \|u\|_{[H^{\sigma-\varepsilon}(\mathbb{R}^n,\rho,\theta),\,H^{\sigma+\delta}(\mathbb{R}^n,\rho,\theta)]_\psi}\ \le\ \sqrt{c_1}\,\|u\|_{H^{\sigma,\varphi}(\mathbb{R}^n,\rho,\theta)} \tag{6.10}$$

для произвольных $u \in H^{\sigma,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ и $\rho > 0$.

Выведем теперь неравенство (6.7) из оценки (6.10). Обратимся к определению уточненной шкалы на Γ, приведенному в п. 2, и рассмотрим линейное отображение „распрямления” многообразия Γ:

$$T:\ f\ \mapsto\ ((\chi_1 f)\circ\alpha_1, \ldots, (\chi_r f)\circ\alpha_r), \qquad f \in \mathcal{D}'(\Gamma).$$

Непосредственно проверяется, что это отображение задает изометрические операторы

$$T:\ H^{\sigma,\varphi}(\Gamma, \rho, \theta)\ \to\ \prod_{j=1}^{r} H^{\sigma,\varphi}(\mathbb{R}^n, \rho, \theta) \tag{6.11}$$

и

$$T:\ H^{s}(\Gamma, \rho, \theta)\ \to\ \prod_{j=1}^{r} H^{s}(\mathbb{R}^n, \rho, \theta), \qquad s \in \{\sigma-\varepsilon,\ \sigma+\delta\}. \tag{6.12}$$

Применив к операторам (6.12) интерполяцию с параметром ψ, получим ограниченный оператор

$$T:\ [H^{\sigma-\varepsilon}(\Gamma,\rho,\theta),\ H^{\sigma+\delta}(\Gamma,\rho,\theta)]_{\psi}\ \to\left[\prod_{j=1}^{r}H^{\sigma-\varepsilon}(\mathbb{R}^{n},\rho,\theta),\ \prod_{j=1}^{r}H^{\sigma+\delta}(\mathbb{R}^{n},\rho,\theta)\right]_{\psi}. \tag{6.13}$$

Поскольку записанные здесь пары пространств нормальны, в силу предложения 3.1 норма оператора (6.13) не превышает некоторого числа c_{ψ}, зависящего лишь от функции ψ и, значит, не зависящего от параметра ρ. Отсюда на основании предложения 3.4 и левой части двусторонней оценки (6.10) получаем ограниченный оператор

$$T:\ [H^{\sigma-\varepsilon}(\Gamma,\rho,\theta),\ H^{\sigma+\delta}(\Gamma,\rho,\theta)]_{\psi}\ \to\ \prod_{j=1}^{r}H^{\sigma,\varphi}(\mathbb{R}^{n},\rho,\theta)\quad \text{с нормой}\ \le c_{\psi}. \tag{6.14}$$

Далее, наряду с отображением T рассмотрим линейное отображение „склейки”

$$K:\ (w_1,\dots,w_r)\ \mapsto\ \sum_{j=1}^{r}\Theta_j\big((\eta_j w_j)\circ\alpha_j^{-1}\big),$$

где $w_1,\dots,w_r$ — распределения в $\mathbb{R}^n$, функция $\eta_j\in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ финитна и равна 1 на множестве $\alpha_j^{-1}(\operatorname{supp}\chi_j)$, а Θ_j — оператор продолжения нулем на Γ. Оператор K является правым обратным к T:

$$KTf\ =\ \sum_{j=1}^{r}\Theta_j\Big(\big(\eta_j((\chi_j f)\circ\alpha_j)\big)\circ\alpha_j^{-1}\Big)\ =\ \sum_{j=1}^{r}\Theta_j\Big((\chi_j f)\circ\alpha_j\circ\alpha_j^{-1}\Big)\ =\ \sum_{j=1}^{r}\chi_j f\ =\ f$$

для произвольного распределения $f\in\mathcal{D}'(\Gamma)$. Из свойств пространств Соболева следует ограниченность оператора

$$K:\ \prod_{j=1}^{r}H^{s}(\mathbb{R}^{n})\ \to\ H^{s}(\Gamma)\quad \text{при любом}\quad s\in\mathbb{R}. \tag{6.15}$$

Взяв здесь $s\in\{\beta-\varepsilon,\ \beta+\delta\}$ и применив интерполяцию с параметром ψ, в силу предложений 3.2 и 3.4 получим ограниченный оператор

$$K:\ \prod_{j=1}^{r}H^{\beta,\varphi}(\mathbb{R}^{n})\ \to\ H^{\beta,\varphi}(\Gamma)\quad \text{при любом}\quad \beta\in\mathbb{R}. \tag{6.16}$$

Пусть c_2 — максимум норм операторов (6.15), где

$$s\in\{\sigma-\varepsilon,\ \sigma-\varepsilon-\theta,\ \sigma+\delta,\ \sigma+\delta-\theta\},$$

и операторов (6.16), где $\beta\in\{\sigma,\ \sigma-\theta\}$. Как видим, число c_2 не зависит от параметра ρ. Непосредственно проверяется, что нормы операторов

$$K:\ \prod_{j=1}^{r}H^{\sigma,\varphi}(\mathbb{R}^{n},\rho,\theta)\ \to\ H^{\sigma,\varphi}(\Gamma,\rho,\theta) \tag{6.17}$$

и

$$K:\ \prod_{j=1}^{r}H^{s}(\mathbb{R}^{n},\rho,\theta)\ \to\ H^{s}(\Gamma,\rho,\theta),\qquad s\in\{\sigma-\varepsilon,\ \sigma+\delta\}, \tag{6.18}$$

не превышают числа c_2. Применив к операторам (6.18) интерполяцию с параметром ψ, получим ограниченный оператор

$$K : \left[\prod_{j=1}^{r} H^{\sigma-\varepsilon}(\mathbb{R}^n, \rho, \theta),\ \prod_{j=1}^{r} H^{\sigma+\delta}(\mathbb{R}^n, \rho, \theta) \right]_{\psi} \to [H^{\sigma-\varepsilon}(\Gamma, \rho, \theta),\ H^{\sigma+\delta}(\Gamma, \rho, \theta)]_{\psi},$$

норма которого, в силу предложения 3.1, не превышает числа $c_{\psi} c_2$. Отсюда на основании предложения 3.4 и правой части двусторонней оценки (6.10) получаем ограниченный оператор

$$K : \prod_{j=1}^{r} H^{\sigma,\varphi}(\mathbb{R}^n, \rho, \theta) \to [H^{\sigma-\varepsilon}(\Gamma, \rho, \theta),\ H^{\sigma+\delta}(\Gamma, \rho, \theta)]_{\psi} \quad \text{с нормой} \quad \le c_3, \tag{6.19}$$

где число $c_3 := \sqrt{c_1}\, c_{\psi} c_2$ не зависит от параметра ρ.

Теперь, поскольку $KT = I$ — тождественный оператор, в силу (6.11) (изометрический оператор) и (6.19) имеем ограниченный оператор

$$I = KT : H^{\sigma,\varphi}(\Gamma, \rho, \theta) \to [H^{\sigma-\varepsilon}(\Gamma, \rho, \theta),\ H^{\sigma+\delta}(\Gamma, \rho, \theta)]_{\psi} \quad \text{с нормой} \quad \le c_3.$$

Кроме того, в силу (6.14) и (6.17) (норма второго оператора не превышает числа c_2) имеем еще один ограниченный оператор

$$I = KT : [H^{\sigma-\varepsilon}(\Gamma, \rho, \theta),\ H^{\sigma+\delta}(\Gamma, \rho, \theta)]_{\psi} \to H^{\sigma,\varphi}(\Gamma, \rho, \theta) \quad \text{с нормой} \quad \le c_{\psi} c_2 .$$

Отсюда непосредственно следует двусторонняя оценка (6.7), где число $c_0 :=$ $:= \max\{1, c_3, c_2 c_{\psi}\}$ не зависит от параметра ρ.

Лемма 6.1 доказана.

Продолжим доказательство пункта 2 теоремы 6.1. Пусть $s \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in \mathcal{M}$. Напомним, что теорема 6.1 известна в случае соболевской шкалы [2, с. 58]. Значит, существует число $\lambda_0 > 0$ такое, что для каждого значения параметра $\lambda \in$ $\in K$, удовлетворяющего условию $|\lambda| \ge \lambda_0$, справедливы топологические изоморфизмы

$$A(\lambda) : H^{s\mp 1+mq}(\Gamma, |\lambda|^q, mq) \leftrightarrow H^{s\mp 1}(\Gamma), \tag{6.20}$$

причем нормы оператора (6.20) и обратного оператора ограничены равномерно по параметру λ (ср. с формулой (6.6)). Пусть ψ — интерполяционный параметр из формулировки предложения 3.2, где положим $\varepsilon = \delta = 1$. Применив интерполяцию с этим параметром к оператору (6.20), получим топологический изоморфизм

$$A(\lambda) : [H^{s-1+mq}(\Gamma, |\lambda|^q, mq),\ H^{s+1+mq}(\Gamma, |\lambda|^q, mq)]_{\psi} \leftrightarrow [H^{s-1}(\Gamma),\ H^{s+1}(\Gamma)]_{\psi}. \tag{6.21}$$

При этом в силу предложения 3.1 нормы оператора (6.21) и обратного к нему оператора ограничены равномерно по параметру λ. Остается применить лемму 6.1, где полагаем

$$\sigma := s + mq, \qquad \rho := |\lambda|^q, \qquad \theta := mq,$$

и предложение 3.2. Тогда оператор (6.21) влечет топологический изоморфизм

$$A(\lambda) : H^{s+mq,\varphi}(\Gamma, |\lambda|^q, mq) \leftrightarrow H^{s,\varphi}(\Gamma) \tag{6.22}$$

такой, что нормы оператора (6.22) и обратного оператора ограничены равномерно по параметру λ. Это в силу неравенства (6.6) и означает двустороннюю оценку (6.5), где число c не зависит от параметра λ. Пункт 2 доказан.

1. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4 т. – Т. 3. Псевдодифференциальные операторы. – М.: Мир, 1987. – 696 с.
2. *Агранович М. С.* Эллиптические операторы на замкнутых многообразиях // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Фундам. направления / ВИНИТИ. – 1990. – **63**. – С. 5 – 129.
3. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – М.: Мир, 1965. – 380 с.
4. *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 1. – С. 3 – 74.
5. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Эллиптические операторы в уточненной шкале функциональных пространств // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 5. – С. 689 – 696.
6. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. I // Там же. – 2006. – **58**, № 2. – С. 217 – 235.
7. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. II // Там же. – № 3. – С. 352 – 370.
8. *Лизоркин П. И.* Пространства обобщенной гладкости // Теория функциональных пространств / Х. Трибель. – М.: Мир, 1986. – С. 381 – 415.
9. *Haroske D. D., Moura S. D.* Continuity envelopes of spaces of generalized smoothness, entropy and approximation numbers // J. Approxim. Theory. – 2004. – **128**. – P. 151 – 174.
10. *Farkas W., Leopold H.-G.* Characterization of function spaces of generalized smoothness // Ann. math. pura ed appl. – 2006. – **185**, № 1. – P. 1 – 62.
11. *Шлензак Г.* Эллиптические задачи в уточненной шкале пространств // Вестн. Моск. ун-та. – 1974. – № 4. – С. 48 – 58.
12. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Эллиптический оператор в уточненной шкале пространств на замкнутом многообразии // Доп. НАН України. – 2006. – № 10. – С. 27 – 33.
13. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Регулярная эллиптическая граничная задача для однородного уравнения в двусторонней уточненной шкале пространств // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 11. – С. 1536 – 1555.
14. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Эллиптический оператор с однородными регулярными граничными условиями в двусторонней уточненной шкале пространств // Укр. мат. вісн. – 2006. – **3**, № 4. – С. 547 – 580.
15. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. III // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 5. – С. 679 – 701.
16. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 142 с.
17. *Лионс Ж. -Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – С. 372 с.
18. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Интерполяция с функциональным параметром и пространства дифференцируемых функций // Доп. НАН України. – 2006. – № 6. – С. 13 – 18.
19. *Atiyah M. F., Singer I.M.* The index of elliptic operators on compact manifolds // Bull. Amer. Math. Soc. – 1963. – **69**, № 3. – P. 422 – 433.
20. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 800 с.
21. *Agmon S.* On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems // Communs Pure and Appl. Math. – 1962. – **15**, № 2. – P. 119 – 147.
22. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат. наук. – 1964. – **19**, № 3. – С. 53 – 161.
23. *Кожевников А. Н.* Спектральные задачи для псевдодифференциальных систем, эллиптических по Дуглису – Ниренбергу и их приложения // Мат. сб. – 1973. – **92(134)**, № 1(9). – С. 60 – 88.
24. *Grubb G.* Functional calculus of pseudo-differential boundary problems. – Boston etc.: Birkhäuser, 1996. – 522 p.
25. *Roitberg Ya. A.* Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996. – 427 p.

Получено 14.03.2007