УДК 517.9

М. Л. Горбачук (Ін-т математики НАН України, Київ)

ТЕОРЕМА ФРАГМЕНА – ЛІНДЕЛЬОФА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ЕЛІПТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ *

For a second-order elliptic differential equation considered on the semiaxis in a Banach space, we show that if the order of growth of its solution at infinity is not higher than the exponential order, then this solution exponentially tends to zero at infinity.

Для дифференциального уравнения второго порядка эллиптического типа на полуоси в банаховом пространстве показано, что если порядок роста на бесконечности его решения не выше экспоненциального, то это решение экспоненциально стремится к нулю на бесконечности.

Прототипом простору розв'язків абстрактного диференціального рівняння еліптичного типу у банаховому просторі, розглядуваного на півосі, є простір гармонічних функцій $u(t, x)$ в області $G = (0, \infty) \times [0, 1]$, що задовольняють крайові умови $u(t, 0) = u(t, 1) = 0$. Класичний принцип Фрагмена – Ліндельофа у цьому випадку стверджує: якщо така функція при $t \to \infty$ прямує до нескінченності повільніше за $e^{\pi t}$, то вона є обмеженою у півсмузі G і навіть прямує до нуля на нескінченності як $e^{-\pi t}$. У цій статті зазначений принцип поширюється на розв'язки диференціального рівняння вигляду

$$y''(t) = By(t), \quad t \in (0, \infty), \tag{1}$$

де B — позитивний оператор у банаховому просторі X. Це дає змогу довести, що принцип Фрагмена – Ліндельофа справджується і для розв'язків достатньо широкого класу диференціальних рівнянь із частинними похідними не обов'язково еліптичного типу. Відмітимо, що абстрактний підхід до поширення цього принципу для гармонічних функцій на розв'язки деякого класу еліптичних рівнянь у півциліндрі, був запропонований в [1]. Цей підхід базується на можливості компактного вкладення простору таких розв'язків у простір розв'язків того самого рівняння, але у півциліндрі, строго вужчому за вихідний. У випадку, коли $\dim X = \infty$ (а це важливо з огляду на застосування), таке вкладення можливе лише тоді, коли оператор B має компактну резольвенту. Підхід, що пропонується, використовує опис усіх розв'язків рівняння (1) на $(0, \infty)$ і класичний принцип Фрагмена – Ліндельофа для скалярних аналітичних усередині кута функцій.

1. Нехай X — банахів простір з нормою $\|\cdot\|$, $E(X)$ — множина всіх щільно визначених в X замкнених лінійних операторів, $L(X)$ — алгебра обмежених лінійних операторів у X, I — одиничний оператор, $\mathcal{D}(\cdot)$ — область визначення оператора, $\rho(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$, $\sigma_c(\cdot)$, $\sigma_p(\cdot)$ — його резольвентна множина, спектр, неперервний та точковий спектри відповідно.

Наведемо деякі необхідні у подальшому відомості з теорії однопараметричних півгруп операторів.

Сім'я $(T(t))_{t\geq 0}$ лінійних неперервних операторів у X утворює C_0-півгрупу, якщо: a) $T(0) = I$; b) $\forall t_1, t_2 \geq 0$: $T(t_1 + t_2) = T(t_1)T(t_2)$; c) для довільного $x \in X$ $\|T(t)x - x\| \to 0$ при $t \to 0$. Генератор A C_0-півгрупи $(T(t))_{t\geq 0}$ визначається як

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad x \in \mathcal{D}(A),$$

* Виконано за підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень України (проект 14.1-003).

де $\mathcal{D}(A)$ — сукупність векторів $x \in X$, для яких ця границя існує. Генератор A завжди належить до $E(X)$. C_0-півгрупу з генератором A позначатимемо через $(e^{tA})_{t \geq 0}$.

Півгрупа $(e^{tA})_{t \geq 0}$ називається рівномірно обмеженою, якщо існує стала $M \geq 1$ така, що

$$\forall t \geq 0: \quad \left\| e^{tA} \right\| \leq M.$$

Згідно з [2], півгрупа $(e^{tA})_{t \geq 0}$ називається обмеженою аналітичною з кутом $\varphi \in (0, \pi/2]$, якщо e^{tA} допускає продовження до оператор-функції e^{zA}, аналітичної в секторі $\Sigma_\varphi = \{z \in \mathbb{C}: |\arg z| < \varphi\}$, сильно неперервної в нулі на будь-якому промені цього сектора, і для будь-якого $\varphi' < \varphi$ існує стала $c_{\varphi'} > 0$ така, що

$$\left\| e^{zA} \right\| \leq c_{\varphi'} \quad \text{при} \quad z \in \overline{\Sigma_{\varphi'}} = \{z \in \mathbb{C}: |\arg z| \leq \varphi'\}.$$

Оператор $A \in E(X)$ є генератором обмеженої аналітичної C_0-півгрупи з кутом φ тоді і тільки тоді, коли $\Sigma_{\varphi + \pi/2} \subset \rho(A)$ і для довільного $\varphi' \in (0, \varphi)$ існує стала $M_{\varphi'}$ така, що

$$\forall \lambda \in \Sigma_{\varphi' + \pi/2}: \quad \| R_A(\lambda) \| \leq \frac{M_{\varphi'}}{|\lambda|},$$

де $R_A(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$ — резольвента оператора A.

Твердження 1 [2, с. 61]. *Півгрупа $(e^{tA})_{t \geq 0}$ є обмеженою аналітичною тоді і тільки тоді, коли вона диференційовна на $(0, \infty)$ і існує стала $c > 0$ така, що*

$$\forall t > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad \left\| A^n e^{tA} \right\| \leq c^n n^n t^{-n}.$$

Скрізь у подальшому вважатимемо, що для півгрупи $(e^{tA})_{t \geq 0}$ виконується умова $\ker e^{tA} = \{0\}$ для будь-якого $t > 0$.

Позначимо через $X_{-t}(A)$ поповнення X за нормою

$$\| x \|_{-t} = \left\| e^{tA} x \right\|, \quad t > 0.$$

Норми $\| \cdot \|_{-t}$ є узгодженими і порівняльними. При $t < t'$ маємо щільне і неперервне вкладення $X_{-t}(A) \subset X_{-t'}(A)$. Покладемо

$$X_{-}(A) = \operatorname*{proj\,lim}_{t \to 0} X_{-t}(A)$$

(щодо проективної границі банахових просторів див. [3]). $X_{-}(A)$ — повний злічено-нормований простір. Неважко переконатись, що оператор e^{tA} допускає неперервне розширення $S(t)$ з X на $X_{-t}(A)$, причому при $t < t'$ $S(t') \restriction_{X_{-t}(A)} = S(t)$.

Визначимо на $X_{-}(A)$ оператор $\hat{e}^{tA}$ $(t \geq 0)$ як $\hat{e}^{tA} x = S(t) x$. В [4] показано, що сім'я $(\hat{e}^{tA})_{t \geq 0}$ утворює C_0-півгрупу в $X_{-}(A)$ (її генератор позначимо через $\hat{A}$). Півгрупа $(e^{t\hat{A}})_{t \geq 0} = (\hat{e}^{tA})_{t \geq 0}$ має такі властивості:

1) $\forall t > 0: \ e^{t\hat{A}} X_{-}(A) \subseteq X$;

2) $e^{t\hat{A}} x = e^{tA} x$ для $x \in X$, $t \geq 0$;

3) $\forall x \in X_{-}(A)\ \ \forall t, s > 0:\ e^{(t+s)\hat{A}}x = e^{tA}e^{s\hat{A}}x = e^{sA}e^{t\hat{A}}x$.

Розглянемо рівняння

$$y'(t) = Ay(t) + F(t), \quad t \in (0, \infty), \tag{2}$$

де $F \in C^1([0, \infty), X)$.

Вектор-функцію $y(t)\colon (0, \infty) \mapsto \mathcal{D}(A)$ називатимемо розв'язком рівняння (2) на $(0, \infty)$, якщо вона сильно неперервно диференційовна на $(0, \infty)$ і там задовольняє це рівняння. Зауважимо, що жодні умови на поведінку $y(t)$ в околі точки 0 не накладаються. Взагалі кажучи, в точці нуль $y(t)$ може бути невизначеним. В [4] доведено таке твердження.

Твердження 2. *Якщо півгрупа* $(e^{tA})_{t\ge 0}$ *задовольняє умову* $\ker e^{tA} = \{0\}$ *для будь-якого* $t > 0$, *то вектор-функція* $y(t)$ *є розв'язком рівняння* (2) *на* $(0, \infty)$ *тоді і тільки тоді, коли вона зображується у вигляді*

$$y(t) = e^{t\hat{A}}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}F(s)\,ds, \qquad y_0 \in X_{-}(A).$$

2. Нехай A — довільний оператор з $E(X)$. Через $X_{+}(A)$ позначимо множину всіх цілих векторів оператора A:

$$X_{+}(A) =$$

$$= \left\{ x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}(A^n) \,\middle|\, \forall\alpha > 0\ \exists c = c(x,\alpha) > 0\ \forall k \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}:\ \left\|A^k x\right\| \le c\alpha^k k^k \right\}.$$

У просторі $X_{+}(A)$ введемо топологію проективної границі банахових просторів

$$X_{\alpha}(A) = \left\{ x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}(A^n) \,\middle|\, \exists c = c(x) > 0\ \forall k \in \mathbb{N}_0:\ \left\|A^k x\right\| \le c\alpha^k k^k \right\}, \quad \alpha > 0,$$

з нормою

$$\|x\|_{X_{\alpha}(A)} = \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \frac{\left\|A^k x\right\|}{\alpha^k k^k}.$$

Отже,

$$X_{+}(A) = \operatorname*{proj\,lim}_{t\to 0} X_{\alpha}(A).$$

Якщо оператор A обмежений, то $X_{+}(A) = X$.

У випадку, коли

$$X = L_2((a,b)), \quad -\infty < a < b < \infty, \quad Ax(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \quad \mathcal{D}(A) = W_2^1([a,b]),$$

простір $X_{+}(A)$ збігається з множиною всіх цілих функцій, яка є щільною в X. Останнє, взагалі кажучи, може не виконуватись для довільного A; наприклад, для звуження A_0 зазначеного вище оператора A на $\mathcal{D}(A_0) = \{x \in \mathcal{D}(A) \mid x(b) = 0\}$ $X_{+}(A_0) = \{0\}$. Зауважимо, що A_0 є генератором півгрупи стисків.

Проте для генератора аналітичної C_0-півгрупи має місце таке твердження (див. [5]).

Твердження 3. *Якщо півгрупа* $(e^{tA})_{t\ge 0}$ *є аналітичною, то множина* $X_{+}(A)$ *всіх цілих векторів оператора* A *є щільною в* X. *Оператор-функція*

$$\exp(zA) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} A^k$$

є цілою в просторі $X_+(A)$. *Сім'я* $(\exp(zA))_{z\in\mathbb{C}}$ *утворює групу лінійних неперервних операторів в* $X_+(A)$, *і якщо* $t \in \mathbb{R}_1$, *а* $x \in X_+$, *то* $\exp(tA)x = e^{tA}x$ *при* $t \geq 0$ *і* $\exp(tA)x = (e^{-tA})^{-1}x$ *при* $t < 0$.

У просторі $X_+(A)$ введемо цілу оператор-функцію

$$\frac{\sinh(zA)}{A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} A^{2k}.$$

Неважко перевірити, що

$$\frac{\sinh(zA)}{A} = \int_0^z \exp((z-2s)A)\,ds. \tag{3}$$

В [5] доведено наступне твердження.

Твердження 4. *Нехай* $-A$ — *генератор аналітичної* C_0*-півгрупи в* X. *Для того щоб вектор-функція* $y(t)$ *була розв'язком рівняння* (2) *з* $F(t) \equiv 0$, *необхідно і достатньо, щоб*

$$y(t) = \exp(At)y_0, \qquad y_0 \in X_+(A).$$

3. Нехай тепер B — позитивний оператор в X. Це означає, що $B \in E(X)$, $(-\infty, 0] \subset \rho(B)$ і існує стала $M > 0$ така, що

$$\forall \lambda \geq 0: \quad \|R_B(-\lambda)\| \leq \frac{M}{1+\lambda}. \tag{4}$$

Як показано в [6],

$$\exists \gamma > 0 \ \ \exists \theta \in [0,\pi): \quad \overline{\Sigma_{\gamma,\theta}} = \{z \in \mathbb{C}: |\arg(z-\gamma)| \leq \theta\} \supseteq \sigma(B),$$

а зовні сектора $\Sigma_{\gamma',\theta'}$ $(0 < \gamma' < \gamma,\ \theta < \theta' < \pi)$ для резольвенти оператора B виконується оцінка (4) з константою $M = M_{\gamma',\theta'}$. Величини $\gamma = \gamma(B) = \inf\{\Re\lambda: \lambda \in \sigma(B)\}$ і $\theta = \theta(B)$ називатимемо вершиною і півкутом оператора B.

Для оператора B визначено степені B^α, $0 \leq \alpha \leq 1$, і $\gamma(B^\alpha) = (\gamma(B))^\alpha$, $\theta(B^\alpha) = \alpha\theta(B)$. Звідси випливає, що оператор $A = -B^{1/2}$ генерує обмежену аналітичну C_0--півгрупу з кутом $\dfrac{\pi-\theta}{2}$, тип якої

$$\omega = \omega(A) := \lim_{t\to\infty} \frac{\ln\left\|e^{tA}\right\|}{t} = -\sqrt{\gamma(B)},$$

тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists c_\varepsilon > 0: \quad \left\|e^{tA}\right\| \leq c_\varepsilon e^{(\omega+\varepsilon)t}. \tag{5}$$

Теорема 1. *Нехай* B — *позитивний оператор в* X *з вершиною* γ *і півкутом* θ, *а* $y(t)$ — *розв'язок рівняння* (1) *на* $(0,\infty)$, *який при* $t \geq t_0 > 0$ (t_0 *фіксоване*) *задовольняє умову*

$$\exists a > 0 \ \ \exists c_a > 0: \quad \|y(t)\| \leq c_a e^{at^\beta}, \qquad t \in (t_0, \infty), \tag{6}$$

де $\beta < \dfrac{\pi}{\pi+\theta}$. *Тоді для довільного* $\varepsilon > 0$ *існує стала* $c_\varepsilon > 0$ *така, що*

$$\|y(t)\| \leq c_\varepsilon e^{(\omega+\varepsilon)t} \quad \text{при} \quad t \geq t_0 > 0, \tag{7}$$

де $\omega = \omega(A)$ — *тип півгрупи* $(e^{tA})_{t\geq 0}$.

Доведемо спочатку дві леми, які мають і самостійний інтерес.

Лема 1. *Вектор-функція* $y(t)$ *є розв'язком рівняння* (1) *на* $(0, \infty)$ *тоді і тільки тоді, коли її можна подати у вигляді*

$$y(t) = e^{t\hat{A}} f_1 + e^{-tA} f_2, \qquad f_1 \in X_-(A), \quad f_2 \in X_+(A), \tag{8}$$

де $A = -B^{1/2}$.

Доведення. Нехай $y(t)$ — розв'язок рівняння (1) на $(0, \infty)$. Оскільки $A^2 = B$, то рівняння (1) можна записати як

$$\left(\frac{d}{dt} + A\right)\left(\frac{d}{dt} - A\right) y(t) = 0.$$

Покладемо $z(t) = \left(\frac{d}{dt} - A\right) y(t)$. Зрозуміло, що вектор-функція $z(t)$ належить до $C^1((0,\infty), X)$ і є розв'язком рівняння

$$\frac{dz(t)}{dt} = -Az(t), \quad t \in (0, \infty).$$

Враховуючи, що оператор $A = -(-A)$ генерує обмежену аналітичну C_0-півгрупу, і твердження 4, приходимо до висновку, що

$$z(t) = \exp(-tA) f, \quad f \in X_+(A),$$

а тому вектор-функція $y(t)$ на $(0, \infty)$ задовольняє рівняння (2), в якому $F(t) = \exp(-tA) f$ — ціла вектор-функція. Тоді твердження 2 і формула (3) зумовлюють рівність

$$y(t) = e^{t\hat{A}} g + \int_0^t e^{(t-s)A} e^{-sA} f \, ds = e^{t\hat{A}} g + \frac{\sinh(tA)}{A} f, \tag{9}$$

де $g \in X_-(A)$, $f \in X_+(A)$.

Покладемо $f_1 = g + f_2$, $f_2 = A^{-1} f$. Оскільки $0 \in \rho(A)$, то $A^{-1} X_+(A) = X_+(A)$, а отже, з (9) одержуємо зображення (8). Безпосередньою перевіркою неважко переконатися, що вектор-функція вигляду (8) є розв'язком рівняння (1) на $(0, \infty)$, що й завершує доведення леми.

Лема 2. *Нехай* B — *позитивний оператор в* X *з півкутом* θ, $A = -B^{1/2}$, $x \in X_+(A)$. *Якщо існує стала* $a > 0$ *така, що*

$$\left\| e^{-tA} x \right\| \leq c_a e^{at^\beta}, \quad t \in (0, \infty),$$

де $\beta < \dfrac{\pi}{\pi + \theta}$, $0 < c_a = \text{const}$, *то* $x = 0$.

Доведення. Зафіксуємо довільне $t_0 > 0$. Із групової властивості e^{-tA} у просторі $X_+(A)$ і твердження 3 випливає

$$y(t) = e^{-tA} x = e^{(t_0 - t)A} y(t_0), \quad t \in [0, t_0],$$

звідки

$$y^{(n)}(t) = A^n e^{(t_0 - t)A} y(t_0).$$

Тоді, згідно з твердженням 1,

$$\left\| y^{(n)}(t) \right\| = \left\| A^n e^{(t_0 - t)A} y(t_0) \right\| \le c^n n^n (t_0 - t)^{-n} \| y(t_0) \|.$$

Покладаючи $t = 0$, $t_0 = n^{1/\beta}$, приходимо до співвідношення

$$\left\| A^n x_0 \right\| = \left\| y^{(n)}(0) \right\| \le c^n n^n c_a e^{an} n^{-n/\beta} = c_a c^n e^{an} n^{(1-1/\beta)n}.$$

Ця оцінка показує, що вектор-функція

$$h(z) = (I - zA)^{-1} x = \sum_{k=0}^{\infty} z^k A^k x$$

є цілою. Порядок її росту

$$\rho := \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n \ln n}{\ln \left(\sqrt[n]{\| A^n x \|} \right)^{-1}} \le \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n \ln n}{\ln n^{n(1/\beta - 1)}} = \frac{\beta}{1-\beta} \le \frac{\dfrac{\pi}{\pi+\theta}}{1 - \dfrac{\pi}{\pi+\theta}} = \frac{\pi}{\theta}.$$

Оскільки A генерує обмежену аналітичну C_0-півгрупу з кутом $\dfrac{\pi-\theta}{2}$, його резольвента $R_A(z)$ є аналітичною в секторі $\Sigma_{\pi-\theta/2}$, і якщо $0 < \varepsilon < 2\pi - \theta$, то

$$\| h(z) \| = \left\| z^{-1} (A - z^{-1} I)^{-1} x \right\| \le M_\varepsilon \quad \text{при} \quad z \in \Sigma_{\pi-(\theta+\varepsilon)/2}. \tag{10}$$

Беручи до уваги, що порядок росту ρ вектор-функції $h(z)$ менший за π/θ, вибираємо $\varepsilon \in (0, 2\pi - \theta)$ так, щоб виконувалась нерівність $\rho < \dfrac{\pi}{\theta+\varepsilon}$. Тоді з (10) випливає, що ціла вектор-функція $h(z)$, порядок якої $\rho < \dfrac{\pi}{\theta+\varepsilon}$, є обмеженою на сторонах кута $\{ z \in \mathbb{C} : |\arg(-z)| \le (\theta+\varepsilon)/2 \}$. За теоремою Фрагмена – Ліндельофа (див. [7, с. 69]) $\| h(z) \| < M_\varepsilon$ всередині цього кута, а нерівність (10) обумовлює обмеженість $\| h(z) \|$ у всій комплексній площині. За теоремою Ліувілля

$$h(z) = (I - zA)^{-1} x \equiv x_1 \in \mathcal{D}(A),$$

тобто $x = x_1 - zAx_1$, а це можливо лише при $Ax_1 = 0$. Враховуючи, що $0 \in \rho(A)$, приходимо до висновку, що $x_1 = 0$, а отже, $x_0 = 0$.

Лему доведено.

Доведення теореми **1.** Нехай $y(t)$ — розв'язок рівняння (1) на $(0, \infty)$. За лемою 1 $y(t)$ можна зобразити у вигляді (8). Із властивостей 1 і 3 півгрупи $(e^{t\hat{A}})_{t \ge 0}$ і нерівності (5) випливає, що для довільних $t \ge t_0 > 0$ і $\varepsilon \in (0, \omega)$

$$\left\| e^{t\hat{A}} f_1 \right\| = \left\| e^{(t-t_0)A} e^{t_0 \hat{A}} f_1 \right\| \le c_\varepsilon e^{(\omega+\varepsilon)(t-t_0)} \left\| e^{t_0 \hat{A}} f_1 \right\| \le \tilde{c}_\varepsilon e^{(\omega+\varepsilon)t}, \tag{11}$$

де $\tilde{c}_\varepsilon = e^{-(\omega+\varepsilon)t_0} \left\| e^{t_0 \hat{A}} f_1 \right\|$. Тоді нерівності (6) та (11) зумовлюють при $t \ge t_0 >$ > 0 оцінку

$$\left\| e^{-tA} f_2 \right\| \le \tilde{c}_a e^{at^\beta}.$$

Згідно з лемою 2, $e^{-tA} f_2 \equiv 0$, а отже, $y(t) = e^{t\hat{A}} f_1$ і завдяки (11) справджується оцінка (7), що й потрібно було довести.

У випадку, коли $X = \mathfrak{H}$ — гільбертів простір, а B — нормальний позитивний оператор в $\mathfrak{H}$, теорема 1 допускає уточнення.

Теорема 2. *Нехай B — позитивний нормальний оператор в $\mathfrak{H}$ з вершиною γ і півкутом θ. Якщо розв'язок $y(t)$ рівняння* (1) *на $(0, \infty)$ при $t \geq 1$ задовольняє умову*

$$\| y(t) \| \leq c_\varepsilon e^{(\sqrt{\gamma} - \varepsilon)t} \tag{12}$$

з деякими $c_\varepsilon > 0$ і $\varepsilon \in (0, \sqrt{\gamma})$, то

$$\forall t \geq 1: \quad \| y(t) \| \leq c e^{-\sqrt{\gamma} t}. \tag{13}$$

Доведення. Як і в теоремі 1, можна показати, що оцінки (5) і (12) для розв'язку $y(t)$ зумовлюють нерівність

$$\left\| e^{-tA} f_2 \right\| \leq \tilde{c}_\varepsilon e^{(\sqrt{\gamma} - \varepsilon)t}. \tag{14}$$

Позначимо через $E(\lambda)$ спектральну міру оператора $-A$. Тоді нерівність (14) еквівалентна співвідношенню

$$e^{-2(\sqrt{\gamma} - \varepsilon)t} \left\| e^{-tA} f_2 \right\|^2 = \int\limits_{\sigma(-A)} e^{-2(\sqrt{\gamma} - \operatorname{Re}\lambda - \varepsilon)t} d(E(\lambda) f_2, f_2)$$

($(\cdot, \cdot)$ — скалярний добуток в $\mathfrak{H}$). Оскільки для $\lambda \in \sigma(-A)$ $e^{-2(\sqrt{\gamma} - \operatorname{Re}\lambda - \varepsilon)t} \to \to \infty$ при $t \to \infty$, то за лемою Фату про граничний перехід під знаком інтеграла в нерівностях $(E(\Delta) f_2, f_2) = 0$ для довільної борельової множини $\Delta \in \sigma(-A)$, а тому й $f_2 = 0$. Враховуючи, що для $f \in \mathfrak{H}$

$$\left\| e^{tA} f \right\| = \int\limits_{\sigma(A)} e^{\operatorname{Re}\lambda t} d(\tilde{E}(\lambda) f, f) \leq e^{-\sqrt{\gamma} t} \| f \|^2$$

($\tilde{E}(\lambda)$ — спектральна міра оператора A), для $y(t) = e^{tA} f_1$, $f_1 \in X_-(A)$, на основі рівності $e^{t\hat{A}} f_1 = e^{(t - t_0)A} e^{t_0 \hat{A}} f_1$, де $e^{t_0 \hat{A}} f_1 \in X$, одержуємо (13).

Теорему доведено.

4. Проілюструємо наведені вище результати на прикладі крайової задачі

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = (-1)^m \frac{\partial^{2m} u(x,t)}{\partial x^{2m}}, \qquad m \in \mathbb{N},$$
$$u^{(2k)}(t, 0) = u^{(2k)}(t, l) = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{15}$$

у смузі $t \in (0, \infty)$, $x \in [0, l]$, $0 < l < \infty$.

Покладемо

$$X = L_2((0, l)), \qquad (Bf)(x) = (-1)^{(2m)} f^{(2m)}(x),$$
$$\mathcal{D}(B) = \left\{ f \in W_2^{2m}([0, l]) : f^{(2k)}(0) = f^{(2k)}(l) = 0, \ k = 0, 1, \ldots, m-1 \right\}.$$

Оператор B є самоспряженим і додатно визначеним, а тому позитивним. Його спектр $\sigma(B) = \sigma_p(B) = \{\lambda_k = (\pi / l)^{2m}\}_{k \in \mathbb{N}}$ дискретний і простий, $\gamma(B) = = (\pi / l)^{2m}$. З теореми 2 тоді маємо такий наслідок: *якщо розв'язок $u(t, x)$ задачі* (15) *при $t \geq 1$ задовольняє умову*

$$\exists \varepsilon > 0: \int\limits_0^l |u(t, x)|^2 dx \leq c_\varepsilon e^{2((l/\pi)^m - \varepsilon)t},$$

то

$$\int_0^l |u(t,x)|^2 dx \;\le\; ce^{-2(l/\pi)^m t}, \qquad t \ge 1, \qquad 0 < c = \text{const}.$$

Аналогічне твердження можна отримати, якщо простір $L_2([0, l])$ замінити на $L_p([0, l])$ $(p > 1)$, або $C([0, l])$.

При $m = 1$ розв'язки задачі (15) є гармонічними функціями в півсмузі $G = (0, \infty) \times [0, l]$, що задовольняють умову $u(t, 0) = u(t, l) = 0$. Таким чином, при $m = 1$ одержуємо згаданий у вступі результат.

Зауважимо також, що в задачі (15) замість оператора $(-1)^m \dfrac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}$ можна взяти еліптичний диференціальний оператор в обмеженій області.

5. Теореми 1 і 2 втрачають правильність, якщо замість умови позитивності для оператора B вимагати лише його слабку позитивність (див. [6]), тобто замінити (4) на умову

$$\forall \lambda > 0: \quad \| R_B(-\lambda) \| \le \frac{M}{\lambda}$$

з деякою сталою $M > 0$. Якщо $0 \in \sigma_c(B)$, то розв'язки, що задовольняють оцінку (6) ((12)) в теоремі 1 (теоремі 2), прямують до нуля на нескінченності, але порядок цього прямування може бути яким завгодно.

1. *Lax P. D.* A Fragmen – Lindelöf theorem in harmonic analysis and its applications to some questions in the theory of elliptic equations // Communs Pure and Appl. Math. – 1957. – **10**. – P. 361 – 389.
2. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. – New York etc.: Springer, 1983. – 300 p.
3. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.
4. *Горбачук М. Л., Горбачук В. І.* Про одне узагальнення еволюційного критерію Березанського самоспряженості оператора // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 5. – С. 608 – 615.
5. *Gorbachuk V. I., Gorbachuk M. L.* Boundary value problems for operator differential equations. – Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1991. – 347 p.
6. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
7. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. – М.: Гостехтеориздат, 1956. – 632 с.

Одержано 27.02.2007