УДК 517.5

В. П. Моторный, д-р физ.-мат. наук (Днепропетр. ун-т)

О КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ С РАВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Asymptotically optimal, with respect to coefficients, weighted quadrature formulas are obtained for Lipschitz classes.

Одержані асимптотично оптимальні за коефіцієнтами вагові квадратурні формули для класів Ліпшіца.

Рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_{-1}^{1} f(x)q(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} p_k f(\gamma_k) + R_n(f; q, \Gamma, P), \tag{1}$$

в которой весовая функция $q(x)$ неотрицательна на интервале $(-1, 1)$ и интегрируема (может быть, в несобственном смысле) по Риману, $\Gamma = \{\gamma_k\}$ — некоторый вектор узлов, $P = \{p_k\}$ — вектор коэффициентов, а $R_n(f; q, \Gamma, P)$ — погрешность квадратурной формулы (1) на функции $f(x)$. Через $R_n(H; q, \Gamma, P)$ обозначим погрешность квадратурной формулы (1) на классе функций H:

$$R_n(H; q, \Gamma, P) = \sup_{f \in H} |R_n(f; q, \Gamma, P)|$$

и положим

$$R_n(H; q, \Gamma) = \inf_{P} R_n(H; q, \Gamma, P),$$

$$R_n(H; q) = \inf_{P, \Gamma} R_n(H; q, \Gamma, P).$$

Квадратурная формула (1) называется оптимальной или наилучшей на классе H по коэффициентам при фиксированных узлах, если погрешность ее на классе H равна $R_n(H; q, \Gamma)$.

При фиксированных узлах $\{\gamma_k\}$ наилучшей по коэффициентам будет квадратурная формула (1) с коэффициентами [1]

$$P_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} q(x)\,dx, \tag{2}$$

где $x_k = (\gamma_k + \gamma_{k+1})/2$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, $x_0 = -1$, $x_n = 1$, а ее погрешность на классе H^α вычисляется по формуле

$$R_n(H^\alpha; q, \Gamma) = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} q(x)\,|k-\gamma_k|^\alpha\,dx, \tag{3}$$

H^α — класс функций, удовлетворяющих на отрезке $[-1, 1]$ условию Липшица порядка α, $0 < \alpha \le 1$.

В работах [2, 3] рассматривались наилучшие по коэффициентам на классе H^α квадратурные формулы (1) для веса $(1-k^2)^\beta$ с узлами $\Gamma_n^0 = (\gamma_1^0, \gamma_2^0, \ldots, \gamma_n^0)$, являющимися нулями многочленов Якоби степени n, соответствующих указанному весу для $\beta \in [-1/2, 1/2]$. В частности, установлено

© В. П. МОТОРНЫЙ, 1995

асимптотическое равенство

$$R_n\left(H^{\alpha}; (1-x^2)^{\beta}, \Gamma_n^0\right) = \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{\alpha} \frac{1}{\alpha+1} \int_0^{\pi} \sin^{1+\alpha+2\beta} x\, dx \tag{4}$$

и для данной последовательности векторов Γ_n^0 указана последовательность асимптотически оптимальных по коэффициентам на классе H^{α} квадратурных формул.

Последовательность квадратурных формул с векторами узлов Γ_n и векторами коэффициентов P_n называется асимптотически оптимальной по коэффициентам при фиксированных векторах узлов для класса H, если

$$R_n(H; q, \Gamma_n, P_n) = (1+o(1)) R_n(H^{\alpha}; q, \Gamma).$$

Квадратурная формула (1) называется оптимальной на классе H, если ее погрешность на этом классе равна $R_n(H; q)$.

В отличие от периодического случая наилучшие квадратурные формулы для классов функций, заданных на отрезке, трудно построить даже для простых классов функций. Например, в работах [4, 5] получены асимптотически точные оценки величин $R_n(H^{\alpha}; q)$, но не построены асимптотически оптимальные квадратурные формулы. То же относится к случаю нахождения наилучших по коэффициентам квадратурных формул вида (1). Поэтому представляет интерес найти квадратурные формулы, коэффициенты или узлы которых не зависят от класса или весовой функции и которые дают на классе погрешность, незначительно отличающуюся от оптимальной. В данной работе построим квадратурные формулы вида (1) с равными коэффициентами, являющиеся асимптотически оптимальными по коэффициентам, и для веса $(1-x^2)^{\beta}$, $\beta \in$ $\in [-1/2, 1/2]$, сравним их погрешность на классе H^{α} с величиной погрешности (4).

Предполагая, что функция $q(x) \geq \sigma > 0$ и непрерывна на интервале $(-1, 1)$, с помощью функции

$$F(x) = \int_{-1}^{x} q(t)\, dt$$

определим

$$\overline{\gamma}_k = F^{-1}\left(\frac{2k-1}{2n} F(1)\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad \overline{\gamma}_0 = -1, \quad \overline{\gamma}_{n+1} = -1,$$

и рассмотрим квадратурную формулу с узлами $\overline{\Gamma} = \{\overline{\gamma}_k\}$ и равными коэффициентами $\overline{p}_k = F(1)/n$ (квадратурная формула должна быть точной на константах):

$$\int_{-1}^{1} f(x) q(x)\, dx = \frac{F(1)}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{\gamma}_k) + R_n(f; q, \overline{\Gamma}). \tag{5}$$

Отметим, что ко множеству квадратурных формул вида (5) относится, например, квадратурная формула Гаусса, соответствующая весу $(1-x^2)^{-1/2}$.

Исследованию квадратурных формул (5) предпошлем одно вспомогательное утверждение.

Пусть $1 = \gamma_0 < \gamma_1 < \ldots < \gamma_n < \gamma_{n+1} = 1$ — произвольная система узлов, $\Delta\gamma_k =$ $= \gamma_{k+1} - \gamma_k$ и $\Delta n = \max \Delta\gamma_k$. Для интегрируемой функции $q(x)$ рассмотрим кусочно-постоянную функцию

$$q_n(x) = q_k = \frac{1}{\Delta\gamma_k} = \int\limits_{\gamma_k}^{\gamma_{k+1}} q(t)\,dt,$$

$$x \in [\gamma_k, \gamma_{k+1}), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Известно [6, 7], что если узлы равноотстоящие, то

$$\int\limits_{-1}^{1} |q(x) - q_n(x)|\,dx \le C\,\omega(q; 1/n)_1, \tag{6}$$

где

$$\omega(q; t)_1 = \sup_{|h| \le t} \int\limits_{-1}^{1} |q(x+h) - q(x)|\,dx,$$

C — некоторая константа. Определяя $\omega(q; t)_1$, считаем, что $q(x) = 0$ вне отрезка $[-1, 1]$.

Это утверждение можно обобщить следующим образом.

Лемма. *Для любой интегрируемой на отрезке $[-1, 1]$ функции $q(x)$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_{-1}^{1} |q(x) - q_n(x)|\,dx \le C n \Delta_n \omega(q; \Delta_n)_1, \tag{7}$$

где C — некоторая константа.

Доказательство. Для любого y положим

$$q_{k,y}(x) = q_{k,y} = \frac{1}{\Delta\gamma_k} \int\limits_{\gamma_k}^{\gamma_{k+1}} q(t+y)\,dt,$$

$$x \in [\gamma_k, \gamma_{k+1}), \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Тогда

$$\int\limits_{-1}^{1} |q(x) - q_{n,y}(x)|\,dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{\gamma_k}^{\gamma_{k+1}} |q(x) - q_{k,y}(x)|\,dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\Delta\gamma_k} \int\limits_{\gamma_k}^{\gamma_{k+1}} \left| \int\limits_{\gamma_k}^{\gamma_{k+1}} [q(x) - q(t+y)]\,dt\,dx. \right.$$

Пусть

$$I(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\Delta\gamma_k} \int\limits_{\gamma_k}^{\gamma_{k+1}} \int\limits_{\gamma_k}^{\gamma_{k+1}} |q(x) - q(t+y)|\,dt\,dx.$$

Рассмотрим интеграл от функции $I(y)$ на отрезке $[0, 1/n]$:

$$I = \int\limits_{0}^{1/n} I(y)\,dy = \int\limits_{0}^{1/n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\Delta\gamma_k} \int\limits_{\gamma_k}^{\gamma_{k+1}} \int\limits_{\gamma_k}^{\gamma_{k+1}} |q(x) - q(t+y)|\,dt\,dx\,dy$$

и в нем сделаем замену переменных интегрирования: $x_1 = x$, $t_1 = t$, $y_1 = t - x + y$. Тогда

$$I = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\Delta\gamma_k} \int_{\gamma_k}^{\gamma_{k+1}} \int_{\gamma_k}^{\gamma_{k+1}} \int_{t-x}^{t-x+1/n} |q(x_1) - q(y_1 + x_1)| \, dx_1 dy_1 dt_1 \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\Delta\gamma_k} \int_{\gamma_k}^{\gamma_{k+1}} \int_{\gamma_k}^{\gamma_{k+1}} \int_{-\Delta n}^{\Delta n + 1/n} |q(x_1) - q(y_1 + x_1)| \, dx_1 dt_1 dy_1.$$

Полагая $y = (2n\Delta_n + 1)y - \Delta_n$, $x_1 = x$, получаем

$$I \le (2n\Delta_n + 1) \int_0^{1/n} \sum_{k=0}^{n} \int_{\gamma_k}^{\gamma_{k+1}} |q(x) - q(x + (2n\Delta_n + 1)y)| \, dx\, dy =$$

$$= (2n\Delta_n + 1) \int_0^{1/n} \int_{-1}^{1} |q(x) - q(x + (2n\Delta_n + 1)y)| \, dx\, dy.$$

Следовательно, существует точка $y_0 \in [0, 1/n]$ такая, что

$$I(y_0) \le (2n\Delta_n + 1) \int_{-1}^{1} |q(x) - q(x + (2n\Delta_n + 1)y_0)| \, dx \le C_1 n \Delta_n \omega(q; \Delta_n)_1. \quad (8)$$

Оценим соотношение

$$\int_{-1}^{1} |q_n(x) - q_{n,y_0}(x)| \, dx = \sum_{k=0}^{n} \int_{\gamma_k}^{\gamma_{k+1}} |q_k(x) - q_{k,y_0}| \, dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \Delta\gamma_k \frac{1}{\Delta\gamma_k} \left| \int_{\gamma_k}^{\gamma_{k+1}} q(t) - q(t + y_0) \right| dt \le$$

$$\le \int_{-1}^{1} |q(t) - q(t + y_0)| \, dx \le \omega(q; 1/n)_1. \quad (9)$$

Используя неравенства (7)–(9), получаем (6):

$$\int_{-1}^{1} |q(x) - q_n(x)| \, dx \le$$

$$\le \int_{-1}^{1} |q(x) - q_{n,y_0}(x)| \, dx + \int_{-1}^{1} |q_{n,y_0}(x) - q_n(x)| \, dx \le$$

$$\le I(y_0) + \omega(q; 1/n)_1 \le C n \Delta_n \omega(q; \Delta_n)_1.$$

Лемма доказана.

Следствие. *Пусть $q(x) \ge \sigma > 0$. Тогда функция $F(x)$ имеет почти всюду ограниченную производную и, следовательно, произведение $n\Delta_n$ ограничено. В этом случае из* (6) *вытекает оценка*

$$\int_{-1}^{1} |q(x) - q_n(x)| \, dx \le C\omega(q; 1/n)_1. \quad (10)$$

Теорема 1. *Последовательность квадратурных формул* (5) *является асимптотически оптимальной по коэффициентам при фиксированных узлах* $\{\overline{\gamma}_k\}$ *на классе* H^α, *а погрешность на классе* H^α *формулы* (5) *удовлетворяет асимптотическому равенству*

$$\sup_{f \in H^\alpha} R_n(f; q, \overline{\Gamma}) = \frac{1}{\alpha+1}\left(\frac{F(1)}{2n}\right)^\alpha \int_{-1}^{1} q^{1-\alpha}(x)\,dx + o(1/n^\alpha). \tag{11}$$

Доказательство. Для весовой функции $q_n(x)$ квадратурная формула (5) является оптимальной по коэффициентам при фиксированных узлах $\{\overline{\gamma}_k\}$, так как коэффициенты этой формулы удовлетворяют условию (2). Пользуясь равенством (3), оценим для заданного n погрешность этой квадратурной формулы на классе H^α:

$$\sup_{f \in H^\alpha} R_n(f; q_n, \overline{\Gamma}) = \int_{-1}^{\overline{\gamma}_1} q^\alpha(\gamma_1 - x)^\alpha\,dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\overline{\gamma}_k}^{\overline{\gamma}_{k+1}} q_k \varphi_n(x)\,dx + \int_{\overline{\gamma}_n}^{1} q_n (x - \overline{\gamma}_n)^\alpha\,dx,$$

где

$$\varphi_n(x) = \min_{1 \le k \le n} |x - \overline{\gamma}_k|^\alpha.$$

Сумма первого и последнего слагаемых есть $o(1/n^\alpha)$, а сумма остальных представима в виде

$$\frac{1}{(\alpha+1)2^\alpha} \sum_{k=1}^{n-1} q_k(\overline{\gamma}_{k+1} - \overline{\gamma}_k)^{\alpha+1} = \frac{1}{\alpha+1}\left(\frac{F(1)}{2n}\right)^\alpha \sum_{k=1}^{n-1} \frac{F(1)}{q^\alpha(\theta_k) n}, \tag{12}$$

где $\theta_k \in (\overline{\gamma}_k, \overline{\gamma}_{k+1})$ и $q(\theta_k) = q_k$. Сумма $\sum_{k=1}^{n-1} q^{-\alpha}(\theta_k) F(1)/n$ является интегральной суммой по равномерному разбиению для интеграла $\int_0^{F(1)} q^{-\alpha}(F^{-1}(y))\,dy$.

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n-1} q^{-\alpha}(\theta_k) \frac{F(1)}{n} - \int_0^{F(y)} q^{-\alpha}(F^{-1}(y))\,dy \xrightarrow[n \to \infty]{} 0. \tag{13}$$

Из соотношений (12), (13) следует

$$R_n(H^\alpha; q_n, \overline{\Gamma}) = \frac{1}{\alpha+1}\left(\frac{F(1)}{2n}\right)^\alpha \int_0^{F(1)} q^{-\alpha}(F^{-1}(y))\,dy + o(1/n^\alpha).$$

Производя замену переменной $y = F(x)$ в интеграле, получаем

$$R_n(H^\alpha; q_n, \overline{\Gamma}) = \frac{1}{\alpha+1}\left(\frac{F(1)}{2n}\right)^\alpha \int_{n-1}^{1} q^{1-\alpha}(x)\,dx + o(1/n^\alpha). \tag{14}$$

Используя (14) и лемму, оцениваем $\sup_{f \in H^\alpha} |R_n(f; q_n, \overline{\Gamma})|$:

$$R_n(f; q, \overline{\Gamma}) = \int_{-1}^{1} f(x)q(x)dx - \frac{F(1)}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\overline{\gamma}_k) =$$

$$= \left[\int_{-1}^{1} f(x)q_n(x)\,dx - \frac{F(1)}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\overline{\gamma}_k)\right] - \left[\int_{-1}^{1} f(x)(q(x)-q_n(x))\,dx\right].$$

Верхняя грань по $f\in H^{\alpha}$ первого слагаемого равна $R_n(H^{\alpha}; q_n, \overline{\Gamma})$. Покажем, что второе слагаемое равномерно относительно f стремится к нулю быстрее, чем n^{-2}. Действительно, так как

$$\int_{\overline{\gamma}_k}^{\overline{\gamma}_{k+1}} (q(x)-q_n(x))\,dx = 0,$$

то

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)(q(x)-q_n(x))\,dx\right| = \left|\sum_{k=0}^{n}\int_{\overline{\gamma}_k}^{\overline{\gamma}_{k+1}} (f(x)-f(x_k))(q(x)-q_n(x))\,dx\right| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\Delta\overline{\gamma}_k}{2}\right)^{\alpha}\int_{\overline{\gamma}_k}^{\overline{\gamma}_{k+1}} |q(x)-q_n(x)|\,dx = o(1/n^{\alpha}).$$

При выводе последних соотношений использовали неравенство $\overline{\gamma}_{k+1}-\overline{\gamma}_k \le \le C/n$ и (10). Следовательно, равенство (11) выполняется. Чтобы доказать асимптотическую оптимальность формул (5), используем (3) и (10):

$$R_n(H^{\alpha}; q, \overline{\Gamma}) - R_n(H^{\alpha}; q_n, \overline{\Gamma}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\int_{\overline{\gamma}_k}^{\overline{\gamma}_{k+1}} (q(x)-q_n(x))\,\varphi_n(x)\,dx =$$

$$= O(1/n^{\alpha})\int_{-1}^{1} |q(x)-q_n(x)|\,dx = o(n^{-\alpha}).$$

Теорема доказана.

Замечание. Условие $q(x)\ge\sigma>0$ не является необходимым. В частности, рассматривая вес $(1-x^2)^{\beta}$, $\beta>0$, нетрудно показать, что утверждение теоремы 1 справедливо и в этом случае.

Сравним квадратурные формулы (5) и оптимальные по коэффициентам квадратурные формулы для веса $(1-x^2)^{\beta}$, $-1/2\le\beta\le 1/2$, с узлами $\Gamma_n^0 = = (\gamma_1^0, \gamma_2^0, \ldots, \gamma_n^0)$. Для этого сравним главные члны правых частей равенств (4) и (11).

Теорема 2. *Для всех* $0<\alpha\le 1$ *и* $\beta\in(-1/2, 1/2]$ *справедливо неравенство*

$$\pi^{\alpha}\int_{0}^{\pi} \sin^{1+\alpha+2\beta} x\,dx > \left\{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\beta}\,dx\right\}^{\alpha}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\beta(1-\alpha)}\,dx. \qquad (15)$$

Следовательно, для достаточно больших n

$$R_n(H^\alpha;\,(1-x^2)^\beta,\,\Gamma_n^0) > R_n(H^\alpha;\,(1-x^2)^\beta,\,\overline{\Gamma}).$$

Доказательство. Так как левая и правая части неравенства (15) при $\beta = -1/2$ совпадают, достаточно показать, что отношение левой части неравенства к правой монотонно возрастает, если β изменяется от $-1/2$ до $1/2$. Обозначим это отношение через $y(\beta)$:

$$y(\beta) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha \frac{\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{1+\alpha+2\beta} x\,dx}{\left(\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2\beta+1} x\,dx\right)^\alpha \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2\beta(1-\alpha)+1} x\,dx}.$$

Выразим функцию $y(\beta)$ через гамма-функцию [8, с. 770]:

$$y(\beta) = \pi^{\alpha/2} \frac{\Gamma(\beta+1+\alpha/2)\Gamma^\alpha(\beta+3/2)\Gamma(\beta(1-\alpha)+3/2)}{\Gamma(\beta+3/2+\alpha/2)\Gamma^\alpha(\beta+1)\Gamma(\beta(1-\alpha)+1)}$$

и покажем, что логарифмическая производная функции $y(\beta)$ положительна на интервале $(-1/2, 1/2)$:

$$\frac{d}{d\beta}\ln y(\beta) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)\left((1+x^{\beta\alpha})-(1+x^{-\alpha/2})\right)\frac{dx}{(1+x)^{1+\beta}} +$$

$$+\ \alpha\int\limits_0^\infty x^{-1}(1+x)^{-1-\beta}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)dx > 0,$$

так как подынтегральные функции положительны. Теорема 2 доказана.

1. *Лебедь Г. К.* О квадратурных формулах с наименьшей оценкой остатка на некоторых классах функций // Мат. заметки. – 1968. – **3**, № 5. – С. 577–586.
2. *Моторный В. П., Дунайчук Е. Е.* О приближенном вычислении интегралов от непериодических функций // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложения. – Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1986. – С. 40–50.
3. *Моторный В. П., Дунайчук Е. Е.* О формулах приближенного вычисления интегралов // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1987. – **180**. – С. 161–163.
4. *Бабенко В. Ф.* Асимптотически точная оценка остатка наилучших для некоторых классов функций кубатурных формул // Мат. заметки. – 1976. – **19**, № 3. – С. 313–322.
5. *Моторный В. П.* Исследования днепропетровских математиков по оптимизации квадратурных формул // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 1. – С. 18–33.
6. *Ульянов П. Л.* Вложение некоторых классов функций H_p^ω // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1968. – **3**. – С. 649–689.
7. *Моторный В. П.* Приближение функций алгебраическими полиномами в метрике L_p // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1971. – **35**, № 4. – С. 874–899.
8. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. – М.–Л.: Физматгиз, 1969. – Т. 2. – 807 с.

Получено 20.05.94