УДК 517. 5

А. И. Степанец, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБРАТНЫЕ ТЕОРЕМЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

New inverse theorems on approximation of periodic functions $f(\cdot)$ establishing conditions for existence of their (ψ, β)-derivatives are received. The theorems also guarantee a certain smoothness of these derivatives.

Одержано нові обернені теореми наближення періодичних функцій $f(\cdot)$, що встановлюють умови існування їх (ψ, β)-похідних $f_\beta^\psi(\cdot)$, які, до того ж, гарантують певну гладкість цих похідних.

В настоящей статье продолжается исследование связей между последовательностями наилучших приближений

$$E_n(f)_X = \inf_{t_{n-1}} \|f(x) - t_{n-1}(x)\|_X \tag{1}$$

суммируемых 2π-периодических функций $f(\cdot)$ ($f \in L_1$) тригонометрическими полиномами t_{n-1} порядка $n-1$ в нормированном пространстве X и свойствами их (ψ, β)-производных $f_\beta^\psi(\cdot)$, определение которых дано в [1]. Будем говорить, что функция $f \in L_1$, имеет (ψ, β)-производную $f_\beta^\psi(\cdot)$, если для данных последовательности $\psi(k), k = 1, 2, \ldots$, и числа $\beta \in \mathbb{R}$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} (a_k \cos(kx + \beta\pi/2) + b_k \sin(kx + \beta\pi/2)), \tag{2}$$

где $a_k = a_k(f)$ и $b_k = b_k(f)$ —коэффициенты Фурье функции $f(\cdot)$, является рядом Фурье некоторой функции $f_\beta^\psi(\cdot)$.

В качестве X в дальнейшем рассматриваются пространство C непрерывных и пространство L_p, $1 \le p < \infty$, 2π-периодических функций, интегрируемых в p-й степени со стандартными нормами.

Рассматриваемая здесь задача заключается в том, чтобы для данной функции $f \in X$ по заданной последовательности $E_n(f)_X$, $n = 1, 2, \ldots$, указать те пары (ψ, β), для которых производные $f_\beta^\psi(\cdot)$ существуют и находятся в пространстве X и получить оценки наилучших приближений и модулей непрерывности этих производных.

Результаты настоящей статьи дополняют утверждения работы [2], которые, в свою очередь, распространяют на случай обобщенного (ψ, β)-дифференцирования результаты С. Б. Стечкина [3] и А. А. Конюшкова [4].

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество функций $\psi(v)$, выпуклых вниз при всех $v \ge 1$ и удовлетворяющих условию $\lim_{v\to\infty} \psi(v) = 0$. Каждой функции $\psi \in \mathfrak{M}$ сопоставим пару функций $\eta(t) = \eta(\eta; t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2)$ и $\mu(t) = \mu(\psi; t) = t/(\eta(t) - t)$ и положим

$$\mathfrak{M}_C = \{\psi \in \mathfrak{M}: K_1 \le \mu(\psi; t) \le K_2, K_1, K_2 > 0\},$$

$$\mathfrak{M}_0 = \{\psi \in \mathfrak{M}: 0 < \mu(\psi; t) \le K_3\},$$

$$\mathfrak{M}_\infty = \{\psi \in \mathfrak{M}: \mu(\psi; t) \uparrow \infty\}; \quad \overline{\eta}(t) = \overline{\eta}(\eta; t) = \psi^{-1}(2\psi(t)), \quad t \ge \eta(1).$$

В дальнейшем последовательности $\psi(k)$, входящие в определение (ψ, β)-производных, рассматриваются как сужения на множество N натуральных чисел функций $\psi(v)$ из множества $\mathfrak{M}$.

В [2] исследуемые здесь вопросы рассматривались в случае, когда $\psi \in \mathfrak{M}_{C,\infty} = \mathfrak{M}_C \cup \mathfrak{M}_\infty$. В настоящей работе основное внимание уделяется случаю, когда $\psi \in \mathfrak{M}_0$. Из определения множеств $\mathfrak{M}_C$ и $\mathfrak{M}_0$ следует, что $\mathfrak{M}_0 \supset \mathfrak{M}_C$. Положим $\mathfrak{M}'_0 = \mathfrak{M}_0 \setminus \mathfrak{M}_C$. Множество $\mathfrak{M}_0$ состоит из функций $\psi \in \mathfrak{M}$, которые убывают медленнее, чем функции $\exp(-\alpha t^r)$, $\alpha > 0$, при любом $r > 0$; $\mathfrak{M}'_0$ — из функций, убывающих медленнее функций t^{-r} при любом $r > 0$. К примеру, к $\mathfrak{M}'_0$ принадлежат функции $\ln^{-\alpha}(t+e)$ и $\ln^{-\alpha}(\ln(t+e)+e)$ при любых $\alpha > 0$.

Определение. *Будем говорить, что пары* (ψ, β), *где* $\psi(k)$ — *произвольная последовательность и* β — *действительное число, принадлежат к множеству* B_X, $((\psi, \beta) \in B_X)$, *если для любого тригонометрического полинома* $T_n(\cdot)$ *порядка* n *справедливо неравенство*

$$\| (T_n(\cdot))^\psi_\beta \|_X \leq O(1)(\Psi(n))^{-1} \| T_n(\cdot) \|_X, \tag{3}$$

в котором $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная по* n *и по* $T_n(\cdot)$.

В случае, когда $X = C$ и $\psi(k) = k^{-1}, k = 1, 2, \ldots$, а $\beta = 1$, соотношение (3) — известное неравенство С. Н. Бернштейна [5] (в нем величина $O(1)$ может быть заменена на 1); если $\psi(k) = k^{-r}, r \in N$, и $\beta = r$ то оно является следствием утверждения С. Б. Стечкина [3]. Это неравенство известно также и в ряде других случаев, которые отмечаются ниже.

Основной результат настоящей работы содержится в следующем утверждении.

Теорема 1. *Пусть* X *есть* C *или* L_p, $1 \leq p < \infty$, *и* $f \in X$. *Тогда если* $(\psi, \beta) \in B_X, \psi \in \mathfrak{M}_0$, *и ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} E_k(f)_X (k\psi(k))^{-1} \tag{4}$$

сходится, то существует производная $f^\psi_\beta(\cdot) \in X$, *для которой*

$$E_n(f^\psi_\beta)_X \leq K_1 \left(\frac{E_n(f)_X}{\psi(n)} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} E_\nu(f)_X (\nu\Psi(\nu))^{-1} \right), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

и для каждого $k \in N$

$$w_k(f^\psi_\beta; n^{-1})_X \leq$$

$$\leq K_1 \left(n^{-k} + \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} E_\nu(f)_X (\Psi(\nu))^{-1} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} E_\nu(f)_X (\nu\Psi(\nu))^{-1} \right), \tag{6}$$

где $w_k(f^\psi_\beta; n^{-1})_X$ — k*-й модуль непрерывности функции* $f^\psi_\beta(\cdot)$ *в пространстве* X *(см., например, [6]).*

Доказательство будем проводить по схеме, которая применялась в [2]. Именно: сначала покажем, что в условиях теоремы функция $f(\cdot)$ имеет (ψ, β)-производную $f^\psi_\beta(\cdot)$, причем $f^\psi_\beta \in X$, т. е. в X существует функция $\psi(\cdot)$

такая, что ее ряд Фурье $S[\varphi]$ имеет вид (2).

Пусть $t_n(\cdot)$ — тригонометрический полином, осуществляющий наилучшее приближение функции $f(\cdot)$ в пространстве X и при каждом натуральном n, $n_0 = n, n_1 = [\eta(n)] + 1, \ldots, n_k = [\eta(n_{k-1})] + 1, \ldots$, $[\alpha]$ — целая часть числа α. Тогда ряд

$$t_{n_0}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(t_{n_k}(x) - t_{n_{k-1}}(x)\right) \tag{7}$$

будет сходиться к $f(x)$ по норме пространства X, поскольку его частные суммы $S_n(x)$ совпадают с полиномами $t_{n_N}(x)$.

Рассмотрим ряд

$$\left(t_{n_0}(x)\right)_\beta^\psi + \sum_{k=1}^{\infty} \left(t_{n_k}(x) - t_{n_{k-1}}(x)\right)_\beta^\psi \tag{8}$$

и покажем, что он сходится в X к сумме $S(x)$, ряд Фурье которой имеет вид (2). Тем самым существование производной $f_\beta^\psi(\cdot)$ будет доказано.

Разность $u_k(x) = t_{n_k}(x) - t_{n_{k-1}}(x)$ является полиномом порядка n_k. Поэтому, используя неравенство (3), имеем

$$\left\| \left(u_k(x)\right)_\beta^\psi \right\| \le K \frac{\| u_k(x) \|}{\psi(n_k)} \le$$

$$\le K \frac{\left(\| t_{n_k}(x) - f(x) \| + \| t_{n_{k-1}}(x) - f(x) \|\right)}{\psi(n_k)} \le$$

$$\le 2KE_{n_{k-1}+1}(f)\left(\psi(n_k)\right)^{-1}. \tag{9}$$

Здесь и в дальнейшем через K обозначены положительные величины, вообще говоря, различные, которые могут зависеть только от функций $\psi(\cdot)$, и для упрощения записи индекс X при написании величин $\|\cdot\|_X$ и $E_n(\cdot)_X$ опущен. Таким образом, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \left(u_k(x)\right)_\beta^\psi \right\| \le K\left(E_{n+1}(f)\left(\psi(n)\right)^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} E_{n_k+1}(f)\left(\Psi(n_k)\right)^{-1} \right). \tag{10}$$

Заметим, что $\forall\, \psi \in \mathfrak{M}_0$ найдется постоянная C такая, что $\forall\, \tau \ge \eta(1)$

$$\frac{\tau}{\tau - \overline{\eta}(\tau)} \le C \tag{11}$$

и при $\tau \in [t, \eta(t)], \tau \ge \eta(1)$,

$$\frac{\tau - \overline{\eta}(\tau)}{\eta(t) - t} \le C. \tag{12}$$

Действительно, полагая $z = \overline{\eta}(\tau)$ и принимая во внимание определение множества $\mathfrak{M}_0$, имеем

$$\frac{\tau}{\tau - \overline{\eta}(\tau)} = \frac{\eta(z)}{\eta(z) - z} = 1 + \frac{z}{\eta(z) - z} = 1 + \mu(\psi; z) \le C.$$

Так же просто устанавливается и справедливость соотношения (12):

$$\frac{\tau-\overline{\eta}(\tau)}{\eta(t)-t} \le \frac{\tau\eta(t)}{\eta(t)(\eta(t)-t)} \le C\frac{\tau}{\eta(t)} \le C.$$

Принимая во внимание оценки (11) и (12), а также тот факт, что на любом промежутке $[t, \eta(t)]$ справедливо неравенство $\psi(\tau) \ge (\eta(t)) = \psi(\tau)/2$ и без ограничения общности можно положить $\eta(t)-t>1$, получаем

$$\frac{E_{n_k+1}(f)}{\psi(n_k)} \le K\sum_{\nu=n_k-1}^{n_k-1}\frac{E_{\nu+1}(f)}{\psi(\nu)}\frac{1}{\eta(n_{k-1})-n_{k-1}} \le$$

$$\le K\sum_{\nu=n_k-1}^{n_k-1}\frac{E_{\nu+1}(f)}{\nu\psi(\nu)}\frac{\nu}{(\nu-\overline{\eta}(\nu))}\frac{\nu-\overline{\eta}(\nu)}{\eta(n_{k-1})-n_{k-1}} \le \sum_{\nu=n_k-1}^{n_k-1}\frac{E_{\nu+1}(f)}{\nu\psi(\nu)}.$$

Подставляя эту оценку в (10), находим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\left(u_k(x)\right)_{\beta}^{\psi}\right\| \le K\left(E_{n+1}(f)(\psi(n))^{-1}+\sum_{k=1}^{\infty}E_{\nu+1}(f)(\nu\Psi(\nu))^{-1}\right). \tag{13}$$

Согласно (4) ряд в правой части (13) сходится. Отсюда заключаем, что ряд (8) действительно сходится по норме пространства X к некоторой функции $S(x)$ из этого же пространства.

Пусть $a_k^{(n)} = a_k(t_n)$ и $b_k^{(n)} = b_k(t_n)^\wedge$, $k = 0, 1, \ldots, n$, — коэффициенты полиномов $t_n(\cdot)$. Тогда соответствующие коэффициенты $\alpha_k^{(n)}$ и $\beta_k^{(n)}$ полиномов $\left(t_n(\cdot)\right)_{\beta}^{\psi}$ имеют вид

$$\alpha_k^{(n)} = \frac{1}{\psi(k)}\left(a_k^{(n)}\cos(\beta\pi/2)+b_k^{(n)}\sin(\beta\pi/2)\right), \tag{14}$$

$$\beta_k^{(n)} = \frac{1}{\psi(k)}\left(b_k^{(n)}\cos(\beta\pi/2)-a_k^{(n)}\sin(\beta\pi/2)\right), \tag{15}$$

и, так как равенство

$$S(x) = \lim_{n\to\infty}\left(t_n(x)\right)_{\beta}^{\psi}$$

выполняется по крайней мере в смысле сходимости в L_1, то

$$a_k(S) = \lim_{n\to\infty}\alpha_k^{(n)},\ b_k(S) = \lim_{n\to\infty}\beta_k^{(n)}, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{16}$$

Очевидно,

$$a_k(f) = \lim_{n\to\infty}\alpha_k^{(n)},\ b_k(f) = \lim_{n\to\infty}\beta_k^{(n)}, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{17}$$

Из (14)–(17) следует

$$a_k(S) = \frac{1}{\psi(k)}\left(a_k^{(n)}\cos(\beta\pi/2)+b_k^{(n)}\sin(\beta\pi/2)\right), \tag{18}$$

$$b_k(S) = \frac{1}{\psi(k)}\left(b_k^{(n)}\cos(\beta\pi/2)-a_k^{(n)}\sin(\beta\pi/2)\right). \tag{19}$$

Отсюда заключаем, что ряд Фурье функции $S(x)$ совпадает с рядом (2).

Это означает, что функция $f(\cdot)$ в самом деле имеет (ψ, β)-производную $f_\beta^\psi(\cdot)$, которая находится в X и справедливо равенство

$$f_\beta^\psi(\cdot) = \left(t_n(x)\right)_\beta^\psi + \sum_{k=1}^{\infty}\left(u_k(x)\right)_\beta^\psi \tag{20}$$

в смысле нормы этого пространства.

Неравенство (5) получается объединением соотношений (14) и (13). Чтобы получить оценку (6), достаточно воспользоваться неравенством

$$w_k(f; n^{-1})_X \le K n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} E_\nu(f)_X, \tag{21}$$

которое при $X = C$ получено С. Б. Стечкиным [3], а при $X = L_p$, $1 \le p < \infty$, — А. Ф. Тиманом и М. Ф. Тиманом [6]. Теорема 1 доказана.

В [7] показано, что если функция $\psi(\cdot)$ такова, что

$$\sup_q \sum_{k=2^q}^{2^{q+1}} \left| \psi_n^{-1}(k+1) - \psi_n^{-1}(k) \right| \le K\lambda_n, \tag{22}$$

где

$$\psi_n(k) = \begin{cases} \psi(k), & 1 \le k \le n, \\ 0, & k > n, \end{cases}$$

то для любого тригонометрического полинома $t_n(\cdot)$ при любом $p \in (1, \infty)$ выполняется неравенство

$$\left\| \left(t_n(\cdot)\right)_\beta^\psi \right\|_p \le C_p \lambda_n \| t_n(\cdot) \|_p, \tag{23}$$

где C_p — величина, которая может зависеть только от функции $\psi(\cdot)$ и числа p. Отсюда заключаем, что включение $(\psi, \beta) \in B_{L_p}$ при $p \in (1, \infty)$ справедливо для любого $\beta \in \mathbb{R}$, если только выполнено (22) при $\lambda_n = (\psi(n))^{-1}$. Последнее, как легко видеть, выполняется для любой невозрастающей функции $\psi(k)$. Поэтому оно заведомо имеет место для всех $\psi \in \mathfrak{M}$ и, таким образом, условие $(\psi, \beta) \in B_{L_p}$ при $p \in (1, \infty)$ в рассматриваемой теореме всегда выполнено.

Если $X = C$ или $X = L_1$, то это условие является существенным.

Пусть $T_n(x)$ — произвольный тригонометрический полином порядка n. Тогда для его (ψ, β)-производной справедливо равенство

$$\psi(n)\left(T_n(x)\right)_\beta^\psi = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x+t)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\psi(n)}{\psi(k)} \cos(kt - \beta\pi/2)\right) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x+t)\tau_{2n-1}(t)\, dt, \tag{24}$$

где

$$\tau_{2n-1}(t) = \sum_{k=1}^{2n-1} \lambda_k^{(n)} \cos(kt - \beta\pi/2) \tag{25}$$

и

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} \psi(n)/\psi(k), & 1 \le k \le n, \\ 2 - k/n, & n \le k \le 2n. \end{cases} \tag{26}$$

Поэтому, применяя неравенство Минковского, получаем

$$\psi(n)\left\|\left(T_n(x)\right)_\beta^\psi\right\|_X \le \frac{1}{\pi}\|T_n(\cdot)\|_X \|\tau_{2n-1}\|_1 \quad (\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_{L_1}). \tag{27}$$

Таким образом, вопрос о принадлежности пары (ψ, β) множеству B_X сводится к выполнению неравенств

$$\|\tau_{2n-1}\|_1 \le K, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{28}$$

В настоящее время известен целый ряд условий для коэффициентов $\lambda_k^{(n)}$, обеспечивающих выполнение этих неравенств. Воспользуемся, к примеру, соотношениями (4.7) и (4.8) из [8], в силу которых

$$\|\tau_{2n-1}\|_1 = O(1)\times$$

$$\times\left(|\sin(\beta\pi/2)|\sum_{k=1}^{2n-1} k^{-1}|\lambda_k^{(n)}| + \sum_{k=1}^{2n-1}(2n-k)^{-1}|\lambda_k^{(n)}| + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n-1} k(2n-k)|\Delta^2\lambda_{k-1}^{(n)}|\right), \tag{29}$$

где $\Delta^2\lambda_{k-1}^{(n)} = \lambda_{k-1}^{(n)} - 2\lambda_k^{(n)} + \lambda_{k+1}^{(n)}$, $\lambda_0^{(n)} = 0$, и $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по n.

Согласно (26) при $k \in [n, 2n]$ $\lambda_k^{(n)} = (2n-k)/n$, поэтому

$$\sum_{k=1}^{2n-1} k^{-1}\lambda_k^{(n)} = \sum_{k=1}^{2n-1}\left(\frac{2}{k} - \frac{1}{n}\right) \le 2\sum_{k=n}^{2n-1} k^{-1} = O(1), \tag{30}$$

$$\sum_{k=n}^{2n-1}(2n-k)^{-1}\lambda_k^{(n)} = \sum_{k=n}^{2n-1}\frac{2n-k}{n(2n-k)} = 1 \tag{31}$$

и

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{2n-1} k(2n-k)|\Delta^2\lambda_{k-1}| = O. \tag{32}$$

Значит, в рассматриваемом случае соотношение (29) принимает вид

$$\|\tau_{2n-1}\|_1 = O(1)\times$$

$$\times\left(|\sin(\beta\pi/2)|\sum_{k=1}^{n-1} k^{-1}|\lambda_k^{(n)}| + \sum_{k=1}^{n-1}(2n-k)^{-1}|\lambda_k^{(n)}| + \frac{1}{2n}\sum_{k=2}^{n-1} k(2n-k)|\Delta^2\lambda_{k-1}^{(n)}|\right), \tag{33}$$

и тогда получаем следующее утверждение.

Лемма. *Пусть $\psi(v)$ — произвольная функция, заданная при всех $v \ge 1$ и β — действительное число, для которых справедливо соотношение*

$$\psi(n)\left[\,|\sin(\beta\pi/2)|\sum_{k=1}^{n-1}(k|\psi(k)|)^{-1} + \sum_{k=1}^{n-1}((2n-k)|\psi(k)|)^{-1} + \right.$$

$$+\frac{1}{2n}\sum_{k=2}^{n-1} k(2n-k)|\Delta^2(1/\psi(k-1))|\Bigg] = O(1), \tag{34}$$

где $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная по* n. *Тогда* $(\psi, \beta) \in B_X$.

Заметим, что если функция $\psi(\cdot)$ не возрастает и положительна, то

$$\psi(n)\sum_{k=1}^{n-1} ((2n-k)|\psi(k)|)^{-1} = O(1),$$

а если, к тому же, и величины $\Delta^2(1/\psi(k-1))$ не меняют своих знаков, то

$$\frac{\psi(n)}{2n}\sum_{k=2}^{n} k(2n-k)|\Delta^2(1/\psi(k-1))| = O(1).$$

Поэтому на основании леммы получаем такое утверждение.

Следствие 1. *Если* $\psi(v)$ — *произвольная положительная и неубывающая при* $v \geq 1$ *функция, для которой*

$$\Delta^2(1/\psi(k-1)) \geq 0 \tag{35}$$

либо

$$\Delta^2(1/\psi(k)) \leq 0, \quad k = 1, 2, \dots n-1, \tag{36}$$

и, кроме того,

$$|\sin(\beta\pi/2)| \sum_{k=1}^{n-1} \psi(n)(k\psi(k))^{-1} = O(1), \tag{37}$$

то $(\psi, \beta) \in B_X$.

Отметим, что это утверждение можно получить и не используя соотношение (29), если воспользоваться результатами С. Б. Стечкина из [9].

Условие (37) выполняется для всех $\beta \in \mathbb{R}$, если $\psi \in \mathfrak{M}_C \cup \mathfrak{M}_\infty$, поскольку в этом случае, как показано в [1, с. 95], $\forall\, t \geq 1$ $\psi(t) \leq Kt|\psi(t)|$ и поэтому

$$\psi(n)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k\psi(k)} = \psi(n)\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{(k+1)\psi(k)} + O(1) \leq$$

$$\leq \psi(n)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)}\int_k^{k+1}\frac{dt}{\psi(t)} + O(1) \leq \psi(n)\int_1^{n-1}\frac{dt}{t\psi(t)} + O(1) \leq$$

$$\leq k\psi(n)\int_1^{n-1}\frac{\psi^1(t)}{\psi^2(t)}dt + O(1) = k\psi(n)\int_1^{n-1} d\left(\frac{1}{\psi(t)}\right) + O(1) = O(1). \tag{38}$$

Если же $\psi \in \mathfrak{M}'_0 = \mathfrak{M}_0 \setminus \mathfrak{M}_C$, то, как показывает пример функции $\psi(t) = \ln^{-1}(t+e)$, принадлежащей $\mathfrak{M}'_0$, выполнение соотношения (37) может быть гарантировано только равенством $\sin(\beta\pi/2) = 0$, т. е. когда $\beta = 2k$, $k = 0, 1, \dots$.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть* $\psi \in \mathfrak{M}_0$ *и выполнено одно из условий* (35) *или* (36).

Тогда если $\psi \in \mathfrak{M}_C$, *то* $(\psi, \beta) \in B_x$ *при любом* $\beta \in \mathbb{R}$. *Если же* $\psi \in \mathfrak{M}'_0$, *то* $(\psi, \beta) \in B_x$ *при любом* $\beta = 0, \pm 1, \ldots$.

В случае, когда $X = L_p$, $1 < p < \infty$, *условие* $(\psi, \beta) \in B_x$ *выполняется* $\forall\, \psi \in \mathfrak{M}$ *и* $\forall\, \beta \in \mathbb{R}$.

Объединяя утверждения теоремы 1 и следствия 2, получаем такой результат.

Теорема 2. *Пусть* $X = C$ *или* $X = L_1$, $f \in X$, $\psi \in \mathfrak{M}_0$; *ряд* (4) *сходится и выполняется одно из условий* (35) *или* (36). *Тогда если* $\psi \in \mathfrak{M}_C$, *то при любом* $\beta \in \mathbb{R}$, *а если* $\psi \in \mathfrak{M}'_0$, *то при* $\beta = 2k$, $k = 0, \pm 1, \ldots$, *существует производная* $f^{\psi}_{\beta} \in X$, *для которой выполняются неравенства* (5) *и* (6). *Если же* $X = L_p$, $1 < p < \infty$, $f \in X$, $\psi \in \mathfrak{M}_0$ *и сходится ряд* (4), *то* $\forall\, \beta \in \mathbb{R}$ *существует производная* $f^{\psi}_{\beta} \in X$ *и выполняются неравенства* (5) *и* (6).

Отметим, что утверждения следствия 2 и теоремы 2 в случае, когда $\psi \in \mathfrak{M}_C$ и выполнено условие (35), доказаны ранее автором и Е. И. Жукиной в [2].

Отметим также, что утверждения теорем 1 и 2 остаются в силе, а их доказательства не изменяются, если вместо $E_n(f)_X$ рассматривать величины $R_n(f;\, T_n)_X$ уклонений фиксированной последовательности $\{T_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ тригонометрических полиномов степени $\le n$ от функции $f \in X$:

$$R_n(f; T_n)_X = \| f(x) - T_n(x) \|_X$$

при условии, что $R_n(f; T_n)_X \ge R_{n+1}(f; T_{n+1})_X$, $n = 1, 2, \ldots$.

1. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
2. *Степанец А. И., Жукина Е. И.* Обратные теоремы приближения (ψ, β)-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 8. – С. 1106–1112.
3. *Стечкин С. Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1951. – **15**, № 2. – С. 219–242.
4. *Конюшков А. А.* Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Мат. сб. – 1958. – **44**, № 1. – С. 53–84.
5. *Бернштейн С. Н.* Об оценках производных многочленов. Собрание сочинений. – М: Изд-во АН СССР, 1952. – **1**. – С. 497–499.
6. *Тиман А. Ф., Тиман М. Ф.* Обобщенный модуль непрерывности и наилучшее приближение в среднем // Докл. АН СССР. – 1950. – **71**, № 1. – С. 17–20.
7. *Степанец А. И., Кушпель А. К.* Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций. – Киев, 1984. – С. 3–43. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.15).
8. *Теляковский С. А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. I // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1961. – **ХХII**. – С. 61–97.
9. *Стечкин С. Б.* К проблеме множителей для тригонометрических полиномов // Докл. АН СССР. – 1950. – **75**, № 2. – С. 165–168.

Получено 23.02.94