УДК 517.9

Ю. А. Митропольский, акад. (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ПОСТРОЕНИИ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА*

An application of the asymptotic method of nonlinear mechanics to construction of an approximate solution of the Klein–Gordon equation is considered.

Розглядається застосування асимптотичного методу нелінійної механіки для побудови наближеного розв'язку рівняння Клейна–Гордона [1].

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda^2 u = \varepsilon f\left(\nu t, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{1}$$

которое при $\varepsilon = 0$ является уравнением Клейна–Гордона, а при $\lambda = 0$ превращается в классическое волновое уравнение.

Уравнение (1) рассматривалось многими учеными в связи с изучением нелинейных волновых процессов в самых различных областях естествознания.

Ниже мы остановимся на основных моментах применения асимптотических методов нелинейной механики (метода КБМ) для построения приближенных решений уравнения (1). Это может оказаться полезным при рассмотрении конкретных задач естествознания, приводящих к необходимости исследования волновых процессов, находящихся под воздействием нелинейных возмущающих сил и описываемых уравнением типа (1), а также при анализе получаемых результатов. Развитие и подробное применение асимптотического метода для решения конкретной задачи, приводящейся к уравнению (1) при отсутствии периодического возмущения с периодом ν, впервые осуществлено в [2].

Итак, при $\varepsilon = 0$ уравнение (1) является классическим волновым уравнением Клейна–Гордона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda^2 u = 0, \tag{2}$$

которое допускает решение вида

$$u = a \cos(kx - \omega_0 t + \varphi), \tag{3}$$

где a и φ — постоянные, а k и ω_0 удовлетворяют дисперсионному соотношению

$$\omega_0^2 = C^2 k^2 + \lambda^2. \tag{4}$$

Предположим, что $\varepsilon > 0$ — малый параметр, функция $f(\nu t, u, u_t, u_x)$ периодическая по $\theta = \nu t$ (или почти периодическая), и имеет достаточное число производных по остальным своим аргументам для всех их конечных значений. Здесь и в дальнейшем будем обозначать $u_t = \partial u/\partial t$, $u_{tt} = \partial^2 u/\partial t^2$, $u_x = \partial u/\partial x$, $u_{xx} = \partial^2 u/\partial x^2$.

Тогда согласно известным положениям асимптотического метода нелинейной механики при $\varepsilon \neq 0$ асимптотическое решение уравнения (1) будем искать в виде следующего ряда (при этом для упрощения выкладок будем рассматривать нерезонансный случай $(\nu \neq \omega)$):

---

* Работа выполнена при частичной поддержке „Международной Соросовской Программы поддержки программы просвещения в области точных наук".

$$u(t,x) = a\cos\psi + \varepsilon u_1(a,\psi,\theta) + \varepsilon^2 u_2(a,\psi,\theta) + \ldots \quad (\psi = kx - \omega_0 t + \varphi), \tag{5}$$

где a и ψ определяются из следующих уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \ldots, \\ \frac{\partial a}{\partial x} &= \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \ldots, \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\omega_0 + \varepsilon C_1(a) + \varepsilon^2 C_2(a) + \ldots, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= k + \varepsilon D_1(a) + \varepsilon^2 D_2(a) + \ldots. \end{aligned} \tag{6}$$

Дифференцируя правые части ряда (5), с учетом уравнений (6) находим выражения для u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, подставляем их в левую часть уравнения (1) и разлагаем ее по степеням ε. Получаем

$$\begin{aligned} u_{tt} - C^2 u_{xx} + \lambda^2 u = \varepsilon \Big\{ 2\left[\omega_0 A_1 + C^2 k B_1\right]\sin\psi &+ \\ + 2\left[\omega_0 C_1 + C^2 k D_1\right] a\cos\psi + \omega_0^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} &- \\ - 2\omega_0 \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi\partial\theta} + \nu^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial\theta^2} - C^2 k^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2} + \lambda^2 u_1 \Big\} &+ \\ + \varepsilon^2 \Big\{ 2\left[\omega_0 A_2 + C^2 k B_2\right]\sin\psi + 2\left[\omega_0 C_2 + C^2 k D_2\right] a\cos\psi &+ \\ + \left[\frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 - a C_1^2\right]\cos\psi - \left[2A_1 C_1 + \frac{\partial C_1}{\partial a} A_1 a\right]\sin\psi &- \\ - C^2\left[\frac{\partial B_1}{\partial a} B_1 - a D_1^2\right]\cos\psi + C^2\left[2B_1 D_1 + \frac{\partial D_1}{\partial a} B_1 a\right]\sin\psi &+ \\ + 2\nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial\theta\partial\psi} C_1 + 2\nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial\theta\partial a} A_1 - 2\omega_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2} C_1 - 2\omega_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi\partial a} A_1 &+ \\ + 2C^2 k \frac{\partial^2 u_1}{\partial a\partial\psi} B_1 + 2kC^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2} D_1 + \omega_0^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial\psi^2} &- \\ - 2\omega_0 \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial\psi\partial\theta} + \nu^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial\theta^2} - C^2 k^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial\psi^2} + \lambda^2 u_2 \Big\} + \varepsilon^3 \ldots. & \end{aligned} \tag{7}$$

Далее, подставляя в правую часть уравнения (1) значения

$$\begin{aligned} u &= a\cos\psi + \varepsilon u_1(a,\psi,\theta) + \varepsilon^2 u_2(a,\psi,\theta) + \ldots, \\ u_t &= a\omega_0 \sin\psi + \varepsilon\{A_1\cos\psi - a\sin\psi C_1 - u'_{1\psi}\omega_0 - u'_{1\theta}\nu\} + \varepsilon^2 \ldots, \\ u_x &= -ak\sin\psi + \varepsilon\{-a\sin\psi D_1 + u'_{1\psi}k\} + \varepsilon^2 \ldots \end{aligned} \tag{8}$$

и разлагая в ряд по степеням ε, имеем

$$\varepsilon f(\theta, u, u_t, u_x) = \varepsilon f(\theta, a\cos\psi, a\omega\sin\psi, -ak\sin\psi) +$$

$$+ \varepsilon^2 \{ f'_u(\theta, a\cos\psi, a\omega_0 \sin\psi, -ak\sin\psi) u(a, \psi, \theta) +$$

$$+ f'_{u_t}(\theta, a\cos\psi, a\omega_0 \sin\psi, -ak\sin\psi)(A_1 \cos\psi - aC_1 \sin\psi - u'_{1a}\omega_0 + u'_{1\theta}\nu) \} -$$

$$- f'_{u_x}(\theta, a\cos\psi, a\omega\sin\psi, -ak\sin\psi)(aD_1 \sin\psi - u'_{1\psi}k) \} + \varepsilon^3 \ldots . \qquad (9)$$

Приравнивая теперь в правых частях соотношений (7) и (9) коэффициенты при одинаковых степенях ε и учитывая при этом дисперсионное соотношение (4), получаем следующие уравнения для определения $u_1(a, \psi, \theta)$, $u_2(a, \psi, \theta), \ldots$:

$$\lambda^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + u_1 \right) - 2\omega_0 \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi \partial \theta} + \nu^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} =$$

$$= -2 [A_1 \omega_0 + C^2 k B_1] \sin\psi - 2 [C_1 \omega_0 + C^2 k D_1] a\cos\psi + f_0(\theta, a, \psi), \qquad (10)$$

$$\lambda^2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} + u_2 \right) - 2\omega_0 \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi \partial \theta} + \nu^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta^2} =$$

$$= -2 [A_2 \omega_0 + C^2 k B_2] \sin\psi - 2 [C_2 \omega_0 + C^2 k D_2] a\cos\psi + f_1(\theta, a, \psi), \qquad (11)$$

где

$$f_0(\theta, a, \psi) = f(\theta, a\cos\psi, a\omega_0 \sin\psi, -ak\sin\psi),$$

$$f_1(\theta, a, \psi) = f'_u(\theta, a, \psi) u_1(a, \psi, \theta) +$$

$$+ f'_{u_t}(a, \psi, \theta)(A_1 \cos\psi - aC_1 \sin\psi -$$

$$- u'_{1a}\omega_0 + u'_{1\theta}\nu) + f'_{u_x}(a, \psi, \theta)(-aD_1 \sin\psi + u'_{1\psi}k) -$$

$$- \left[\frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 - aC_1^2 \right] \cos\psi + \left[2A_1 C_1 + \frac{\partial C_1}{\partial a} A_1 a \right] \sin\psi +$$

$$+ C^2 \left[\frac{\partial B_1}{\partial a} B_1 - aD_1^2 \right] \cos\psi - C^2 \left[2B_1 D_1 + \frac{\partial D_1}{\partial a} B_1 a \right] \sin\psi -$$

$$- 2\nu \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta \partial \psi} C_1 + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta \partial a} A_1 \right] + 2\omega_0 \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} C_1 + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi \partial a} A_1 \right] -$$

$$- 2C^2 k \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} B_1 + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} D_1 \right].$$

Очевидно, функции $f_0(\theta, a, \psi)$, $f_1(\theta, a, \psi)$, ... являются 2π-периодическими функциями по обоим аргументам ψ и νt и, кроме того, зависят от a. Явное выражение для этой функции известно, если найдены значения $A_j(a)$, $B_j(a)$, $C_j(a)$, $D_j(a)$ и $u_j(a, \psi, \theta)$, $j = 1, 2, \ldots$.

Перейдем к определению этих функций. Для этого разложим в двойной ряд Фурье функцию $f_0(a, \psi, \theta)$:

$$f_0(a, \psi, \theta) = \sum_{n,m} f_{n,m}^{(0)}(a) e^{i(n\theta + m\psi)}, \qquad (12)$$

где

$$f_{n,m}^{(0)}(a) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(a,\psi,\theta)\, e^{-i(n\theta+m\psi)}\, d\theta\, d\psi. \tag{13}$$

Выражение для функции $u_1(\theta, a, \psi)$, как обычно, ищем в виде ряда

$$u_1(\theta, a, \psi) = \sum_{n,m} \bar{f}_{n,m}(a)\, e^{i(n\theta+m\psi)}, \tag{14}$$

коэффициенты которого должны быть определены.

Подставляя ряд (12) и ряд (14) в уравнение (10), приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках в левой и правой частях полученного соотношения и учитывая при этом условие отсутствия нулевых знаменателей, после несложных выкладок получаем следующее выражение для $u_1(\theta, a, \psi)$:

$$u_1(\theta, a, \psi) = \sum_{\substack{n,m \\ (n\neq 0,\, m\neq \pm 1)}} \frac{f_{n,m}^{(0)}(a)\, e^{i(n\theta+m\psi)}}{\lambda^2(1-m^2) + 2\nu\omega_0 nm - \nu^2 n^2}, \tag{15}$$

а также выражения для функций из правых частей уравнений (6):

$$\begin{aligned} 2\left[A_1\omega_0 + C^2 kB_1\right] &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(\theta, a, \psi) \sin\psi\, d\theta\, d\psi, \\ 2\left[C_1\omega_0 + C^2 kD_1\right] &= \frac{1}{2\pi^2 a} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(\theta, a, \psi) \cos\psi\, d\theta\, d\psi. \end{aligned} \tag{16}$$

Отсюда с точностью до величины первого порядка малости, учитывая, что $\psi = kx - \omega_0 t + \varphi$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} + \omega_0' \frac{\partial a}{\partial x} &= \frac{\varepsilon}{4\pi^2\omega_0} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(\theta, a, \psi) \sin\psi\, d\theta\, d\psi, \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \omega_0' \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\varepsilon}{4\pi^2\omega_0 a} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(\theta, a, \psi) \cos\psi\, d\theta\, d\psi, \end{aligned} \tag{17}$$

где $\omega_0' = d\omega_0/dk$ — так называемая групповая скорость.

Переходя в правой части выражения (15) к тригонометрическим функциям, получаем

$$\begin{aligned} u_1(\theta, a, \psi) = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{n,m \\ (n\neq 0,\, m\neq \pm 1)}} \Bigg\{ &\frac{\cos(n\theta+m\psi)}{\lambda^2(1-m^2) + 2\nu\omega_0 nm - \nu^2 n^2} \times \\ &\times \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(\theta, a, \psi) \cos(n\theta+m\psi)\, d\theta\, d\psi + \\ &+ \frac{\sin(n\theta+m\psi)}{\lambda^2(1-m^2) + 2\nu\omega_0 nm - \nu^2 n^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(\theta, a, \psi) \sin(n\theta+m\psi)\, d\theta\, d\psi \Bigg\}, \end{aligned} \tag{18}$$

где $\psi = kx - \omega_0 t + \varphi$.

Если в уравнении (1) положить $u_x = u_{xx} = 0$, $\lambda^2 = \omega^2$, $\omega_0 = -\omega$, то выражения (15)–(18) полностью совпадают с формулами, приведенными в монографии [3] для нелинейного вибратора, находящегося под воздействием возмущения $\varepsilon f(\nu t, u, u_t)$, в нерезонансном случае.

Если правая часть уравнения (1) не зависит от νt, то вместо (17) и (18) получаем следующие выражения:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \omega_0' \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \sin\psi \, d\psi,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \omega_0' \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0 a} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \cos\psi \, d\psi, \tag{19}$$

$$u_1(a, \psi) = \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{m \\ (m \neq \pm 1)}} \frac{1}{\lambda^2(1-m^2)} \left\{ \cos m\psi \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi)_m \cos\psi \, d\psi \right. +$$
$$\left. + \sin m\psi \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi)_m \sin\psi \, d\psi \right\}, \tag{20}$$

совпадающие с формулами, приведенными в монографии [4].

Остановимся теперь на построении асимптотического решения для уравнения Клейна–Гордона [1] с помощью метода усреднения по Боголюбову.

Итак, рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - C^2 k u_{xx} + \lambda^2 u = \varepsilon f(u, u_t, u_x) \tag{21}$$

при прежних условиях, налагаемых на правую часть. При $\varepsilon = 0$ уравнение (21) имеет решение

$$u = a\cos\psi, \tag{22}$$

где $\psi = kx - \omega_0 t + \varphi$, a и φ — произвольные постоянные, и для ω_0 и k выполняется дисперсионное соотношение

$$\omega_0^2 = C^2 k^2 + \lambda^2, \tag{23}$$

а также

$$u_t = a\omega_0 \sin\psi, \quad u_x = -ak\sin\psi. \tag{24}$$

Введем в рассмотрение новые переменные $a(t, x)$ и $\varphi(t, x)$ с помощью соотношений

$$u = a(t, x)\cos\psi(t, x),$$
$$u_t = a(t, x)\,\omega_0 \sin\psi(t, x), \tag{25}$$

где $\psi(t, x) = kx - \omega_0 t + \varphi(t, x)$. Тогда требуя совместимости выражения (25), после элементарных выкладок находим

$$a_t\cos\psi - a\varphi_t \sin\psi = 0,$$
$$a_x\cos\psi - a\varphi_x \sin\psi = 0. \tag{26}$$

Умножая второе соотношение (26) на $\omega_0' = C^2 k/\omega_0$ и складывая их, получаем

$$(a_t + \omega_0' a_x)\cos\psi - (\varphi_t + \omega_0'\varphi_x)\, a\sin\psi = 0. \tag{27}$$

Далее имеем

$$u_{tt} = a_t\omega_0 \sin\psi - a\omega_0^2 \cos\psi + a\omega_0\varphi_t \cos\psi,$$
$$u_{xx} = -a_x k_0 \sin\psi - ak_0^2 \cos\psi - ak_0\varphi_x \cos\psi. \tag{28}$$

Подставляя эти значения в уравнение (21), имеем

$$(a_t + \omega_0' a_x)\,\omega_0 \cos\psi + (\varphi_t + \omega_0'\varphi_x)\,\omega_0 a \sin\psi =$$
$$= \varepsilon f(a\cos\psi, +a\omega_0 \sin\psi, -ak\sin\psi). \tag{29}$$

После этого из системы двух уравнений (27) и (29) находим

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \omega_0' \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{\omega_0} f(a\cos\psi, a\omega_0 \sin\psi, -ak\sin\psi)\sin\psi,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \omega_0' \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{a\omega_0} f(a\cos\psi, a\omega_0 \sin\psi, -ak\sin\psi)\cos\psi, \tag{30}$$

где $\psi = kx - \omega_0 t + \varphi$.

Учитывая, что $\omega_0' = C^2 k/\omega_0$, можем записать

$$\omega_0 \frac{\partial a}{\partial t} = \omega_0 \frac{\partial a}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\omega_0^2 \frac{\partial a}{\partial \psi},$$
$$C^2 k \frac{\partial a}{\partial x} = C^2 k \frac{\partial a}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} = C^2 k^2 \frac{\partial a}{\partial \psi},$$

и следовательно,

$$\omega_0 \left(\frac{\partial a}{\partial t} + \omega_0' \frac{\partial a}{\partial x} \right) = (C^2 k^2 - \omega_0^2) \frac{\partial a}{\partial \psi} = -\lambda^2 \frac{\partial a}{\partial \psi}.$$

Аналогично,

$$\omega_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \omega_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\omega_0^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \psi},$$
$$C^2 k \frac{\partial \varphi}{\partial x} = C^2 k \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} = C^2 k^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \psi},$$

а значит,

$$\omega_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \omega_0' \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = (C^2 k^2 - \omega_0^2) \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = -\lambda^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \psi}.$$

Таким образом, система уравнений (30) может быть записана в следующем виде:

$$\frac{\partial a}{\partial \psi} = -\frac{\varepsilon}{\lambda^2} f(a\cos\psi, a\omega_0 \sin\psi, -ak\sin\psi)\sin\psi,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = -\frac{\varepsilon}{a\lambda^2} f(a\cos\psi, a\omega_0 \sin\psi, -ak\sin\psi)\cos\psi. \tag{31}$$

Полученные уравнения (31) представляют собой уравнения в стандартной форме в смысле Боголюбова.

Правые части уравнений (31) мы можем представить в виде рядов Фурье

$$-\frac{\varepsilon}{\lambda^2} f(a\cos\psi, a\omega_0 \sin\psi, -ak\sin\psi)\sin\psi =$$

$$
\begin{gathered}
= \varepsilon f_1(a, \psi) = \varepsilon \sum_n f_{1n}(a) e^{in\psi}, \\
-\frac{\varepsilon}{a\lambda^2} f(a\cos\psi, a\omega_0 \sin\psi, -ak\sin\psi)\cos\psi = \\
= \varepsilon f_2(a, \psi) = \varepsilon \sum_n f_{2n}(a) e^{in\psi},
\end{gathered}
\tag{32}
$$

где

$$
f_{1n}(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(a, \psi) e^{-in\psi}\, d\psi,
$$

$$
f_{2n}(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_2(a, \psi) e^{-in\psi}\, d\psi.
$$

Обозначим теперь

$$
\tilde{f}_1(a, \psi) = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{in} f_{1n}(a) e^{in\psi},
$$

$$
\tilde{f}_2(a, \psi) = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{in} f_{2n}(a) e^{in\psi}.
$$

Тогда, совершая в системе (31) замену переменных согласно формулам

$$
a = a_1 + \varepsilon v_1(a_1, \psi_1), \quad \varphi = \varphi_1 + \varepsilon w_1(a_1, \psi_1), \tag{33}
$$

где $\psi_1 = kt - \omega_0 t + \varphi_1$, a_1 и φ_1 — новые переменные, а функции $v_1(a_1, \psi_1)$ и $w_1(a_1, \varphi_1)$ подбираются по формулам

$$
v_1(a_1, \psi_1) = \tilde{f}_1(a_1, \psi_1), \quad w_1(a_1, \psi_1) = \tilde{f}_2(a_1, \psi_1), \tag{34}
$$

вместо уравнений (31) для новых переменных a_1 и φ_1 получаем следующую систему уравнений:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial a_1}{\partial \psi} = \varepsilon f_{10}(a_1) + \varepsilon^2 [f'_{1a}(a_1, \psi_1) v_1(a_1, \psi_1) + \\
+ f'_{1\psi}(a_1, \psi_1) w_1(a_1, \psi_1)] + \varepsilon^3 \ldots, \\
\frac{\partial \varphi_1}{\partial \psi} = \varepsilon f_{20}(a_1) + \varepsilon^2 [f'_{2a}(a_1, \psi_1) v_1(a_1, \psi_1) + \\
+ f'_{2\psi}(a_1, \varphi_1) w_1(a_1, \varphi_1)] + \varepsilon^3 \ldots .
\end{gathered}
\tag{35}
$$

Пренебрегая в правых частях системы уравнений (35) слагаемыми второго порядка малости по ε, получаем усредненную систему первого приближения

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial a_1}{\partial \psi} = \varepsilon f_{10}(a_1), \\
\frac{\partial \varphi_1}{\partial \psi} = \varepsilon f_{20}(a_1)
\end{gathered}
\tag{36}
$$

или, учитывая предыдущие выкладки, систему

$$\frac{\partial a_1}{\partial t} + \omega_0' \frac{\partial a_1}{\partial x} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} f(a_1 \cos\psi_1, a_1\omega_0 \sin\psi_1, -a_1 k \sin\psi_1) \sin\psi_1 \, d\psi_1 ,$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \omega_0' \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \tag{37}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0 a_1} \int_0^{2\pi} f(a_1 \cos\psi_1, a_1\omega_0 \sin\psi_1, -a_1 k \sin\psi_1) \cos\psi_1 \, d\psi_1 .$$

Полученные нами уравнения первого приближения (37) можно было бы легко получить, усредняя по ψ непосредственно правые части системы уравнений (31) и учитывая при этом дисперсионное соотношение (4). Кроме того, как и следовало ожидать, уравнения (37) полностью совпадают с системой уравнений (19).

Заметим, что при помощи изложенного асимптотического метода нелинейной механики (метода КБМ) с успехом можно построить асимптотические приближенные решения и для более сложных нелинейных уравнений, близких при малых ε к уравнению Клейна–Гордона. Так, мы можем построить решения для нелинейного уравнения с медленно меняющимися параметрами вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C^2(\tau) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda^2(\tau) u = \varepsilon f\left(\theta, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{38}$$

где ε — малый положительный параметр, $\tau = \varepsilon t$ — медленное время, $d\theta / dt = \nu(\tau)$ как в резонансном случае, так и в нерезонансном. Полученные формулы как в первом, так и во втором приближении позволяют исследовать нестационарный режим в системе, описываемой уравнением вида (38).

Кроме того, безусловный интерес представляет рассмотрение воздействия на систему, описываемую нелинейным уравнением вида (1), белого шума $\dot{\xi}$ с интенсивностью 1. В этом случае рассматриваем уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda^2 u = \varepsilon f\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \sqrt{\varepsilon}\, g\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \dot{\xi}, \tag{39}$$

для которого задача сводится к получению системы стохастических дифференциальных уравнений для амплитуды и фазы и составлению и анализу уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова для плотности вероятностей амплитуды и фазы рассматриваемой системы.

Эти вопросы будут рассмотрены в одной из следующих работ.

1. *Whitham G. B.* Linear and Nonlinear Waves. – New York etc.: John Wiley Sons, 1974. – 436 p.
2. *Montgomery D., Tidman D.* Secular and nonsecular behavior for the cold plasma equations // Phys. Fluids. – 1964. – 7. – P. 242–249.
3. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
4. *Neyfeh, Hasan Ali.* Perturbation Methods. – New York etc.: John Wiley Sons, 1972. – 425 p.

Получено 28.02.95