К О Р О Т К І П О В І Д О М Л Е Н Н Я

УДК 519.21

С. В. Боднарчук (Нац. техн. ун-т України „КПІ")

КЕРУВАННЯ ЛІНІЙНИМИ ДИНАМІЧНИМИ СИСТЕМАМИ ПЕРЕТВОРЕННЯМИ ЧАСУ

Necessary and sufficient conditions for the controllability of solutions of linear inhomogeneous integral equations are obtained.

Получены необходимые и достаточные условия управляемости решений линейных неоднородных интегральных уравнений.

Вступ. У даній роботі ми розглядаємо одну задачу керування для лінійних динамічних систем, що мають вигляд інтегральних рівнянь

$$x(t) = x + \int_0^t Ax(s)ds + B\gamma(t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

де $x(0) = x \in \mathbb{R}^m$, A, B — матриці розмірів $m \times m$, $m \times d$ відповідно, $\gamma\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$ — деяка вимірна обмежена функція, $x(\cdot)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m$ — невідома функція, яка відображає положення динамічної системи в момент часу $t > 0$.

В залежності від поставленої задачі можна розглядати різні методи керування динамічними системами. В класичній теорії задача керування формулюється таким чином (див., наприклад, [1]): чи існує для заданого початкового положення x така функція γ, що $x(t) = 0$ для деякого $t > 0$? Іншими словами, у класичній постановці роль керування відіграють самі функції неоднорідності γ. В даній статті пропонується інший підхід до поняття керування. А саме, задача керування тепер формулюється так: чи існують такі функція неоднорідності γ та окіл U точки $0 \in \mathbb{R}^m$, що для довільного $x \in U$ існує таке перетворення часу $\lambda\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, що розв'язок рівняння (1) з неоднорідністю $\gamma(\lambda(t))$ при деякому $T > 0$ збігається з розв'язком цього ж рівняння з $x = 0$ та неоднорідністю $\gamma(t)$?

Одна з причин, яка приводить до необхідності дослідження такого методу керування розв'язками інтегральних рівнянь, полягає в тому, що, як відомо, теорія керування — в даному контексті стохастичного керування — є потужним засобом дослідження ергодичних властивостей процесів Маркова. Так, для доведення ергодичності марковських процесів, що задаються як розв'язки стохастичних диференціальних рівнянь дифузійного типу, часто використовують „каплінговий" метод (див., наприклад, [2]), суть якого полягає в тому, що для близьких початкових положень x та y будують таку пару розв'язків (каплінг) $x(t)$ та $y(t)$, що з великою ймовірністю $x(t) = y(t)$ починаючи з деякого моменту часу T. Такий каплінг будується за допомогою збурення одного з розв'язків шляхом заміни випадкового шуму іншим, причому така заміна з необхідністю повинна задавати допустиме перетворення розподілу шуму. В дифузійному випадку цей шум задається процесом Вінера, а перетворення шуму мають вигляд

$$d\tilde{W}(t) = dW(t) + v(t)dt, \tag{2}$$

де керування $v(t)$ будується таким чином, щоб забезпечити „склеювання" траєкторій розв'язків. При цьому v, як правило, є випадковим (тобто залежить від W), а допустимість перетворення вигляду (2) забезпечується за допомогою теореми Гірсанова.

Наша загальна мета полягає в тому, щоб узагальнити цей метод на клас процесів Маркова, заданих як розв'язки стохастичних диференціальних рівнянь з шумом Леві. При цьому таке узагальнення вимагає ґрунтовних змін у структурі методу, тому що, як відомо, зсуви процесу Леві без дифузійної компоненти призводять до сингулярних мір. У цьому випадку допустимими будуть перетворення точкової міри, що породжує шум (див., наприклад, [3], гл. 9). Зауважимо, що такі перетворення можна реалізувати за допомогою перетворень зміни часу (див., наприклад, [4]). Дана стаття містить перший крок на шляху до реалізації описаної вище програми: в найпростішому випадку лінійного інтегрального рівняння ми встановлюємо необхідну й достатню умову керованості за допомогою детермінованих перетворень часу.

Також відмітимо, що існує нетривіальний зв'язок між теорією керування для лінійних рівнянь вигляду (1) та питанням про гіпоеліптичність (тобто існування гладкої щільності розподілу розв'язку) для рівнянь вигляду

$$X(t) = X(0) + \int\limits_0^t AX(s)ds + BW(t), \quad t \geq 0, \tag{3}$$

де $X(0) \in \mathbb{R}^m$, A, B — матриці розмірів $m \times m$, $m \times d$ відповідно, W — вінерів процес у $\mathbb{R}^d$. Так, відома умова керованості Калмана для класичної задачі керування рівнянням (1) має вигляд (див. [1])

$$\mathrm{Rank}\,[B, AB, \ldots, A^{m-1}B] = m, \tag{4}$$

де $[B, AB, \ldots, A^{m-1}B]$ — матриця, що складається з матриць $B, AB, \ldots, A^{m-1}B$ як з блоків. З іншого боку, ця умова є необхідною та достатньою для того, щоб розв'язок рівняння (3) мав гладку щільність розподілу (див., наприклад, [5] та наведену там бібліографію). Зазначимо, що в останньому рівнянні роль шуму відіграє саме вінерів процес. Питання про існування та гладкість щільності розподілу розв'язку стохастичного диференціального рівняння з шумом Леві було розглянуто у статтях [6, 7] (див. також [5, 8]). У цих роботах було наведено умову

$$\mathrm{Rank}[AB, AB^2, \ldots, A^mB] = m, \tag{5}$$

яка при виконанні умови Ямазато (див. [9]) є необхідною та достатньою для існування щільності розподілу розв'язку стохастичного диференціального рівняння з шумом Леві без дифузійної компоненти. Виявляється, що умова (5) буде необхідною та достатньою для керованості рівняння (1) перетвореннями часу.

Постановка задачі та основна теорема. Сформулюємо основні означення, які ми будемо використовувати при дослідженні рівняння (1). Оскільки для нас є важливим зв'язок між теорією керування та стохастичними диференціальними рівняннями, то розв'язок рівняння (1) будемо розглядати як *траєкторію* деякого випадкового процесу, а функцію γ будемо називати *конфігурацією.*

Означення 1. *Перетворенням часу на проміжку* $[0,T]$ *будемо називати таку неперервну строго зростаючу функцію* $\lambda\colon [0,T]\to[0,T]$, *що* $\lambda(0)=0$, $\lambda(T)=T$.

Далі позначаємо через Λ_T множину всіх перетворень часу на проміжку $[0,T]$.

Означення 2. *Результатом керуванням* (*або коротко керуванням*) *розв'язком рівняння* (1) *за допомогою перетворення часу* λ *будемо називати розв'язок інтегрального рівняння вигляду*

$$x(t)=x+\int\limits_0^t Ax(s)ds+B\gamma(\lambda(t)),\quad t\ge 0. \tag{6}$$

Розв'язок рівняння (1) далі будемо позначати через $x(t,x,\gamma)$, а розв'язок рівняння (6) — через $x_\lambda(t,x,\gamma)$. При цьому очевидно, що $x_\lambda(t,x,\gamma)=x(t,x,\gamma\circ\lambda)$, де $(\gamma\circ\lambda)(t)=\gamma(\lambda(t))$, $t\ge 0$.

Означення 3. *Рівняння* (1) *з заданою конфігурацією* γ *будемо називати* Λ_T*-керованим в нулі на проміжку* $[0,T]$*, якщо існує такий окіл* U *точки* $0\in\mathbb{R}^m$, *що для довільного* $x\in U$ *існує* $\lambda\in\Lambda_T$, *для якої виконується*

$$x_\lambda(T,x,\gamma)=x(T,0,\gamma).$$

У цьому випадку будемо також казати, що конфігурація γ *допускає* Λ_T*-керування розв'язком рівняння* (1).

Нехай Σ_m^d – множина кусково-сталих функцій з $\mathbb{R}_+$ в $\mathbb{R}^d$ з m стрибками. Справджується наступна теорема.

Теорема. *Наступні умови еквівалентні*:

1. Rank $[AB,\ldots,A^mB]=m$.

2. *Існують* $T>0$ *та обмежена вимірна конфігурація* γ, *яка допускає* Λ_T*-керування розв'язком рівняння* (1).

3. *Для кожного* $T>0$ *існує конфігурація* $\gamma\in\Sigma_m^d$, *яка допускає* Λ_T*-керування розв'язком рівняння* (1).

Доведення теореми. Доведення імплікації 1) $\Rightarrow$ 3) будемо проводити конструктивним чином. А саме, побудуємо конфігурацію $\gamma\in\Sigma_m^d$, яка допускає Λ_T-керування. Почнемо з доведення наступної допоміжної леми.

Лема. *Нехай виконано умову* 1 *теореми. Тоді для кожного* $T>0$ *існують такі вектори* $u_1,\ldots,u_m\in\mathbb{R}^d$ *та моменти часу* $\tau_1^*,\ldots,\tau_m^*\in[0,T]$, *що*

$$\det\left(\frac{\partial}{\partial\tau_k}\left(\sum_{j=1}^m e^{\tau_jA}Bu_j\right)_l\Bigg|_{\overline{\tau}=(\tau_1^*,\ldots,\tau_m^*)}\right)_{k,l=1}^m\ne 0. \tag{7}$$

Доведення. Нехай (7) не виконується, тобто

$$\det\left(\frac{\partial}{\partial\tau_k}\left(\sum_{j=1}^m e^{\tau_jA}Bu_j\right)_l\right)_{k,l=1}^m=0$$

для всіх $u_1,\ldots,u_m\in\mathbb{R}^d$, $\tau_1,\ldots,\tau_m\in[0,T]$. Звідси випливає, що для всіх $u_1,\ldots,u_m\in\mathbb{R}^d$, $\tau_1,\ldots,\ \tau_m\in[0,T]$ вектори $\{e^{\tau_jA}ABu_j, j=1,\ldots,m\}$ є лінійно залежними. Покажемо, що існують такі $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^d$, $\rho_1, \ldots, \rho_r \in [0, T]$, $r < m$, що вектори $\{e^{\rho_j A} ABv_j, j = 1, \ldots, r\}$ є лінійно незалежними та для всіх $u \in \mathbb{R}^d$, $\tau \in [0, T]$ вектор $e^{\tau A} ABu$ можна подати у вигляді лінійної комбінації векторів $\{e^{\rho_j A} ABv_j, j = 1, \ldots, r\}$.

Припустимо, що це не так, тобто існують такі $v_{r+1} \in \mathbb{R}^d$, $\rho_{r+1} \in [0, T]$, що вектор $e^{\rho_{r+1} A} ABv_{r+1}$ не виражається лінійно через вектори $\{e^{\rho_j A} ABv_j, j = 1, \ldots, r\}$. Додамо цей вектор до початкової системи лінійно незалежних векторів. Отримаємо систему лінійно незалежних векторів $\{e^{\rho_j A} ABv_j, j = 1, \ldots, r+1\}$. Виконавши операцію додавання лінійно незалежного вектора достатню кількість разів, отримаємо систему векторів, яка задовольняє початкове припущення (кількість таких операцій є скінченною, оскільки розмірність простору скінченна).

Нехай L — підпростір в $\mathbb{R}^m$, який породжений векторами $\{e^{\rho_j A} ABv_j, j = 1, \ldots, r\}$. Тоді для всіх $u \in \mathbb{R}^d, \tau \in [0, T]\colon e^{\tau A} ABu \in L$. Оскільки L — замкнена множина, то всі похідні по τ від функції $e^{\tau A} ABu$ належать множині L, тобто $\forall n\colon A^n Bu \in L$. Розмірність простору L менша ніж m, тому існує такий вектор $c \in \mathbb{R}^m$, що $c \perp L$. Тоді $\forall u \in \mathbb{R}^d : c^T ABu = \ldots = c^T A^m Bu = 0$, а це еквівалентно рівності $c^T AB = \ldots = c^T A^m B = 0$ (це легко перевірити). Тобто умова 1 не виконується, що і доводить лему.

Перейдемо до доведення теореми.

1) $\Rightarrow$ 3). Розглянемо $\gamma(t) = \sum_{k=1}^{m} u_k \chi_{\{t > \tau_k^*\}}$, де $\{u_k, \tau_k^*\}$, $k = 1, \ldots, m$, вибрано так, як у лемі. Тоді розв'язок (1) з $x = 0$ в точці $t = T$ буде мати вигляд

$$x(T, 0, \gamma) = \sum_{k=1}^{m} e^{(T - \tau_k^*)A} Bu_k.$$

Розглянемо функцію $F(x, \tau) = \sum_{k=1}^{m} e^{-\tau_k A} Bu_k + x - e^{-TA} x(T, 0, \gamma)$, $x \in \mathbb{R}^m$, $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_m)^T$. Функція F задовольняє умови теореми про існування та властивості неявної функції (див. [10, с. 382, 383]):

1) $F(0, \tau^*) = 0$;

2) $F \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}^{m+m}, \mathbb{R}^m)$;

3) $\dfrac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(\tau_1, \ldots, \tau_m)}(0, \tau^*) \neq 0$ (за лемою).

Тому існують такі окіл U точки $0 \in \mathbb{R}^m$ та функція $\tau(x)\colon U \to \mathbb{R}^m$, $\tau(x) = (\tau_1(x), \ldots, \tau_m(x))^T$, що $\tau(0) = \tau^*$ та для довільного $x \in U$ $F(x, \tau(x)) = 0$. Перепишемо останню рівність в явному вигляді

$$\sum_{k=1}^{m} e^{-\tau_k(x)A} Bu_k + x - e^{-TA} x(T, 0, \gamma) = 0. \tag{8}$$

Перетворення часу λ будуємо у вигляді ламаної з вершинами у точках $(0, 0)$, $(\tau_1^*, \tau_1(x)), \ldots$ $\ldots, (\tau_m^*, \tau_m(x))$, (T, T). Також її можна зробити зростаючою, оскільки функція τ є неперервною. Рівність (8) запишемо таким чином:

$$x(T, 0, \gamma) = e^{TA}(x + \sum_{k=1}^{m} e^{-\tau_k(x)A} Bu_k). \tag{9}$$

Легко бачити, що величина у правій частині (9) є розв'язком рівняння (6), а отже, виконується рівність $x(T, x, \gamma \circ \lambda) = x(T, 0, \gamma)$.

Імплікація $3) \Rightarrow 2)$ є очевидною.

$2) \Rightarrow 1)$. Імплікація справедлива, по суті, з тих же самих причин, що й відповідна імплікація у критерії Калмана (див. теорему 2.3 в [1]). А саме, нехай $\gamma^*(t) = \gamma(\lambda(t))$, $t \in [0, T]$. Тоді розв'язок (6) можна записати у вигляді

$$x(t) = B\gamma^*(t) - e^{tA}B\gamma^*(0) + e^{tA}x + \int\limits_0^t e^{(t-s)A}AB\gamma^*(s)ds.$$

За умовою теореми маємо

$$B\gamma^*(T) - e^{TA}B\gamma^*(0) + e^{TA}x + \int\limits_0^T e^{(T-s)A}AB\gamma^*(s)ds =$$

$$= B\gamma(T) - e^{TA}B\gamma(0) + \int\limits_0^T e^{(T-s)A}AB\gamma(s)ds.$$

Оскільки $\gamma^*(0) = \gamma(0)$, $\gamma^*(T) = \gamma(T)$, то буде виконуватись рівність

$$x + \int\limits_0^T e^{-sA}AB(\gamma^*(s) - \gamma(s))ds = 0.$$

Припустимо тепер, що умова 1 не виконується. Тоді існує такий ненульовий вектор $b \in \mathbb{R}^m$, що

$$b^TAB = \ldots = b^TA^mB = 0. \tag{10}$$

Нехай $p(\mu) = \det(A - \mu E) = \mu^m + \alpha_{m-1}\mu^{m-1} + \ldots + \alpha_1\mu + \alpha_0$ — характеристичний многочлен матриці A. Тоді за теоремою Гамільтона – Келі (див. [11])

$$p(A) = A^m + \alpha_{m-1}A^{m-1} + \ldots + \alpha_1A + \alpha_0 = 0,$$

тобто

$$A^m = -\alpha_{m-1}A^{m-1} - \ldots - \alpha_1A - \alpha_0.$$

Помноживши останню рівність зліва на b^TA, а справа на B, отримаємо

$$b^TA^{m+1}B = -\alpha_{m-1}b^TA^mB - \ldots - \alpha_1b^TA^2B - \alpha_0b^TAB.$$

Використавши припущення (10), одержимо $b^TA^{m+1}B = 0$. Тому, за індукцією, $\forall k \geq 1$: $b^TA^kB = 0$. Розглянемо

$$b^Te^{-sA}AB = b^T\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-s)^k}{k!}A^{k+1}B = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-s)^k}{k!}b^TA^{k+1}B = 0,$$

тобто $\int_0^T b^Te^{-sA}AB(\gamma^*(s) - \gamma(s))ds = 0$. Звідси випливає, що $b^Tx = 0$, а це суперечить умові 2.

Теорему доведено.

Наступний приклад показує, що Λ_T-керування, взагалі кажучи, залежить від поведінки конфігурації на всьому часовому проміжку $[0,T]$.

Приклад. Розглянемо систему інтегральних рівнянь

$$x_1(t) = \int\limits_0^t x_2(s)ds + \gamma(t),$$
$$x_2(t) = \int\limits_0^t x_1(s)ds. \tag{11}$$

Вона має вигляд (1) з $m = 2$, $d = 1$, матрицями

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Умова 1 теореми виконується, оскільки

$$\text{Rank}\,[AB, A^2B] = \text{Rank}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Розглянемо Λ_T-керування в нулі для конфігурації $\gamma(t) = u\chi_{\{t>\tau_1^*\}} + v\chi_{\{t>\tau_2^*\}}$, $u, v \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\tau_1^*, \tau_2^* \in [0,T]$, $\tau_1^* \neq \tau_2^*$, χ_A — характеристична функція множини A. Можна записати керування явно, але його вигляд буде досить громіздким. Краще розглянути розклад Тейлора в нулі функції $\tau(x) = (\tau_1(x), \tau_2(x))^T$, $x = (x_1, x_2)^T$:

$$\tau(x) = \tau^* + \tau'(0)x + o(x), x \to 0,$$

де $\tau'(x) = -(F'_\tau(x,\tau))^{-1}F'_x(x,\tau)$. Оскільки

$$e^{-\tau A} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\tau & -\operatorname{sh}\tau \\ -\operatorname{sh}\tau & \operatorname{ch}\tau \end{pmatrix},$$

то $F(x,\tau)$ має вигляд

$$F(x,\tau) = \begin{pmatrix} u\operatorname{ch}\tau_1 + v\operatorname{ch}\tau_2 + x_1 - \operatorname{ch}T x_1(T) + \operatorname{sh}T x_2(T) \\ -u\operatorname{sh}\tau_1 - v\operatorname{sh}\tau_2 + x_2 + \operatorname{sh}T x_1(T) - \operatorname{ch}T x_2(T) \end{pmatrix}.$$

Тому

$$F'_x(x,\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F'_\tau(x,\tau) = \begin{pmatrix} u\operatorname{sh}\tau_1 & v\operatorname{sh}\tau_2 \\ -u\operatorname{ch}\tau_1 & -v\operatorname{ch}\tau_2 \end{pmatrix}.$$

Знаходячи $(F'_\tau(x,\tau))^{-1}$, отримуємо наступне:

$$\tau'(0) = \frac{1}{\operatorname{sh}(\tau_2^* - \tau_1^*)} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{u}\operatorname{ch}\tau_2^* & \dfrac{1}{u}\operatorname{sh}\tau_2^* \\ -\dfrac{1}{v}\operatorname{ch}\tau_1^* & -\dfrac{1}{v}\operatorname{sh}\tau_2^* \end{pmatrix},$$

тобто

$$\begin{pmatrix} \tau_1(x) \\ \tau_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1^* + \dfrac{\operatorname{ch}\tau_2^*}{u\operatorname{sh}(\tau_2^* - \tau_1^*)}x_1 + \dfrac{\operatorname{sh}\tau_2^*}{u\operatorname{sh}(\tau_2^* - \tau_1^*)}x_2 \\ \tau_2^* - \dfrac{\operatorname{ch}\tau_1^*}{v\operatorname{sh}(\tau_2^* - \tau_1^*)}x_1 - \dfrac{\operatorname{sh}\tau_1^*}{v\operatorname{sh}(\tau_2^* - \tau_1^*)}x_2 \end{pmatrix} + o(x), \quad x \to 0.$$

Висновки. В статті розглянуто один підхід до керування розв'язками лінійних неоднорідних інтегральних рівнянь. Запропонований метод керування є корисним для доведення ергодичності марковських процесів, що задаються як розв'язки стохастичних диференціальних рівнянь з шумом Леві. Наведений приклад показує, що керування перетвореннями часу, взагалі кажучи, залежать від поведінки неоднорідності на всьому часовому проміжку. З точки зору теорії стохастичного керування це означає, що в даному контексті не можна очікувати, що процес керування буде узгодженим з фільтрацією, породженою процесом Леві, що входить до стохастичних диференціальних рівнянь як шум.

1. *Evans L. C.* An introduction to mathematical optimal control theory // http://math.berkeley.edu/evans/control.course.pdf.
2. *Hairer M., Pillai N. S.* Ergodicity of hypoelliptic SDEs driven by fractional Brownian motion // Ann. Inst. H. Poincaré, Probab. Statist . – 2011. – **47**, № 2. – P. 601 – 628.
3. *Скороход А. В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. – М.: Наука, 1964. – 280 с.
4. *Kulik A. M.* Absolute continuity and convergence in variation for distributions of functionals of Poisson point measure // J. Theor. Probab. – 2011. – **24**, № 1. – P. 1 – 38.
5. *Priola E., Zabczyk J.* Densities for Ornstein – Uhlenbeck processes with jumps // Bull. London Math. Soc. – 2009. – **41**. – P. 41 – 50.
6. *Bodnarchuk S. V., Kulik A. M.* Conditions for the existence and smothness of the distribution density of the Ornstein – Uhlenbeck process with Lévy noise // Theor. Probab. and Math. Statist. – 2009. – **79**. – P. 23 – 38.
7. *Боднарчук С. В., Кулик А. М.* Условия гладкости плотности распределения решения многомерного линейного стохастического дифференциального уравнения с шумом Леви // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 4. – С. 435 – 447.
8. *Simon T.* On the absolute continuity of multidimensional Ornstein – Uhlenbeck processes // Probab. Theory Relat. Fields. DOI 10.1007/s00440-010-0296-5; arXiv:0908.3736v1.
9. *Yamazato M.* Absolute continuity of transition probabilities of multidimensional processes with stationary independent increments // Theory Probab. and Appl. – 1994. – **39**, № 2. – P. 347 – 354.
10. *Дороговцев А. Я.* Математический анализ. – Киев: Факт, 2004. – 560 с.
11. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 560 с.

Одержано 05.08.11