УДК 517.5

В. Т. Клименко, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т пробл. материаловедения НАН Украины, Киев)

АППРОКСИМАЦИЯ ГАРМОНИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Two-dimensional splines are constructed. At estimate for the spline deviation from the approximated function is given in two forms. A comparison between approximations by a linear and harmonic splines is made. An appropriateness of introducing to mathematics of concept of harmonic spline is justified.

Побудовані двовимірні сплайни. Оцінка відхилення сплайну від апроксимованої функції дана у двох виглядах. Порівнюються апроксимації плоскою ламаною лінією і гармонійним сплайном. Обгрунтовується доцільність введення в математику поняття гармонійного сплайну.

Обозначим прямоугольную область, содержащуюся в двумерном евклидовом пространстве, через $\Omega = \{0<x<a,\ 0<y<b\}$. Границу этой области будем обозначать через $\dot{\Omega}$, а ее замыкание — через $\overline{\Omega}$. Аналогичными обозначениями будем пользоваться и для других прямоугольных областей.

Сеткой, образованной прямыми, параллельными координатным осям, разобьем область Ω на области $\Omega_{ij} = \{x_i<x<x_{i+1},\ y_j<y<y_{j+1}\}$, $i = 0, 1, \ldots$ $\ldots, m-1$; $j = 0, 1, \ldots, n-1$; $x_0 = 0$, $x_m = a$; $y_0 = 0$, $y_n = b$. Для обозначения множества точек сетки будем пользоваться символом $\dot{\Omega}^* = \bigcup \dot{\Omega}_{ij}$.

Предположим, что функция $u(x, y)$ $2p$-раз непрерывно дифференцируема по x и по y в областях Ω_{ij}, а на контурах $\dot{\Omega}_{ij}$ заданы значения ее производных $\partial^k u(x,y)/\partial \overline{n}^k$, $k = 0, 1, \ldots, p-1$, где $\overline{n}$ — направления внутренней нормали к контурам $\dot{\Omega}_{ij}$.

Определение. *Полигармоническим сплайном степени* p, *аппроксимирующим функцию* $u(x, y)$, *будем называть кусочно-полигармоническую функцию* $S_u(\Delta^p; x, y)$, *удовлетворяющую уравнению*

$$\Delta^p S_u(\Delta^p; x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega_{ij} \tag{1}$$

(Δ — *оператор Лапласа*), *и граничным условиям*

$$\left.\frac{\partial^k S_u(\Delta^p; x, y)}{\partial \overline{n}^k}\right|_{(x,y)\in\dot{\Omega}^*} = \left.\frac{\partial^k u(x, y)}{\partial \overline{n}^k}\right|_{(x,y)\in\dot{\Omega}^*}, \quad k = 0, 1, \ldots, p-1. \tag{2}$$

При $p = 1$ полигармонический сплайн $S_u(\Delta^1; x, y)$ будем называть гармоническим и обозначать его через $S_u(\Delta; x, y)$.

Гармонический сплайн представляется суммой

$$S_u(\Delta; x, y) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} u_{ij}(x, y), \tag{3}$$

где $u_{ij}(x, y)$ — функции, удовлетворяющие уравнению

$$\Delta u_{ij}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega_{ij}, \tag{4}$$

и граничным условиям Дирихле

$$\lim_{(x,y)\to\dot{\Omega}_{ij}} u_{ij}(x,y) = u(x,y)\big|_{(x,y)\in\dot{\Omega}_{ij}}, \tag{5}$$

при этом имеется в виду, что

$$u_{ij}(x,y)\big|_{(x,y)\,\overline{\in}\,\overline{\Omega}_{ij}} = 0. \tag{6}$$

Предельный переход в граничных условиях (5) осуществлен для того, чтобы из равенства (6) не последовало наложение значений двух функций $u_{ij}(x,y)$ на внутренних линиях сетки $\dot{\Omega}^*$.

Решение краевой задачи (4), (5) запишем через потенциал двойного слоя:

$$u_{ij}(x,y) = \int\limits_{\dot{\Omega}_{ij}} \frac{\partial G_{ij}(x,y;\xi,\eta)}{\partial \overline{n}} u(\xi,\eta)\, d\dot{\Omega}_{ij}, \tag{7}$$

где $G_{ij}(x,y;\xi,\eta)$ — функция Грина, удовлетворяющая уравнению

$$\Delta G_{ij}(x,y;\xi,\eta) = -\delta(x-\xi;y-\eta) \tag{8}$$

($\delta(x-\xi;y-\eta)$ — дельта-функция Дирака, сосредоточенная в точке (ξ,η) [1]) и граничным условиям

$$G_{ij}(x,y;\xi,\eta)\big|_{(x,y)\in\dot{\Omega}_{ij}} = 0. \tag{9}$$

В литературе известны различные записи функции Грина $G_{ij}(x,y;\xi,\eta)$. Мы будем пользоваться двумя из них [1]:

$$G_{1,i,j}(x,y;\xi,\eta) =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\,\mathrm{sh}\,(\alpha_{ki}h_j)}\,[J(y-\eta)\,\mathrm{sh}\,(\alpha_{ki}(y-y_{j+1}))\,\mathrm{sh}\,(\alpha_{ki}(\eta-y_j)) +$$

$$+ J(\eta-y)\,\mathrm{sh}\,(\alpha_{ki}(y-y_j)\,\mathrm{sh}\,(\alpha_{ki}(\eta-y_{j+1}))]\times$$

$$\times \sin(\alpha_{ki}(x-x_i))\sin(\alpha_{ki}(\xi-x_i)), \tag{10}$$

$$G_{2,i,j}(x,y;\xi,\eta) =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\,\mathrm{sh}\,(\beta_{kj}l_i)}\,[J(x-\xi)\,\mathrm{sh}\,(\beta_{kj}(x-x_{i+1}))\,\mathrm{sh}\,(\beta_{kj}(\xi-x_i)) +$$

$$+ J(\xi-x)\,\mathrm{sh}\,(\beta_{kj}(x-x_i))\,\mathrm{sh}(\beta_{kj}(\xi-x_{i+1}))]\times$$

$$\times \sin(\beta_{kj}(y-y_j))\sin(\beta_{kj}(\eta-y_j)), \tag{11}$$

где $l_i = x_{i+1}-x_i$, $h_j = y_{j+1}-y_j$, $\alpha_{ki} = k\pi/l_i$, $\beta_{kj} = k\pi/h_j$, $J(x-\xi)$ — функция Хевисайда, определяемая равенствами

$$J(x-\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \le x; \\ 0, & \xi > x. \end{cases}$$

Тождество $G_{1,i,j} \equiv G_{2,i,j}$ вытекает из единственности решения задачи (8) (9). Это тождество можно доказать и непосредственно: разлагая $G_{2,i,j}(x,y;$

$\xi, \eta)$ по переменной x в тригонометрический ряд Фурье по синусам, получаем функцию Грина в виде (10), и наоборот, разлагая $G_{1,i,j}(x, y; \xi, \eta)$ по переменной y в ряд Фурье по синусам, получаем функцию Грина в виде (11).

Как правило, в приложениях, в интеграле, стоящем в правой части равенства (7), удобно использовать функцию Грина в виде (10) при интегрировании по отрезкам, параллельным оси Ox, и в виде (11) — при интегрировании по отрезкам, параллельным оси Oy.

Оценим уклонение гармонического сплайна от аппроксимируемой им функции в пространстве непрерывных функций, т. е. оценим величину

$$|u(x, y) - S_u(\Delta; x, y)|_{(x,y)\in\Omega_{ij}} \equiv |u(x, y) - u_{ij}(x, y)|_{(x,y)\in\Omega_{ij}},$$

где $u_{ij}(x, y)$ — решение краевой задачи (4), (5).

Теорема. *Если функция $u(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема в области Ω_{ij}, то справедлива оценка*

$$|u(x, y) - u_{ij}(x, y)|_{(x,y)\in\Omega_{ij}} \le$$

$$\le \left[\frac{l_i^2}{8} - \frac{4l_i^2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3 \operatorname{ch}\left((2k+1)\pi h_j/2l_j\right)} \right] \max_{(x,y)\in\Omega_{ij}} |\Delta u(x, y)| \quad (12)$$

или

$$|u(x, y) - u_{ij}(x, y)|_{(x,y)\in\Omega_{ij}} \le$$

$$\le \left[\frac{h_j^2}{8} - \frac{4h_j^2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3 \operatorname{ch}\left((2k+1)\pi l_i/2h_i\right)} \right] \max_{(x,y)\in\Omega_{ij}} |\Delta u(x, y)|. \quad (13)$$

Доказательство. Из теории потенциалов известно [1], что дважды непрерывно дифференцируемая в Ω_{ij} функция $u(x, y)$ может быть записана в виде

$$u(x, y) = \int_{\Omega_{ij}} \frac{\partial G_{ij}(x, y; \xi, \eta)}{\partial \overline{n}_{\xi\eta}} u(\xi, \eta)\, d\dot{\Omega}_{ij\xi\eta} +$$

$$+ \int_{\Omega_{ij}} G_{ij}(x, y; \xi, \eta)\, \Delta u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \quad (x, y) \in \Omega_{ij}.$$

Это равенство с учетом (7) можно переписать в виде

$$u(x, y) = u_{ij}(x, y) + \int_{\Omega_{ij}} G_{ij}(x, y; \xi, \eta)\, \Delta u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \quad (x, y) \in \Omega_{ij}. \quad (14)$$

Из равенства (14) в силу положительности функции Грина G_{ij} получаем неравенство

$$|u(x, y) - u_{ij}(x, y)|_{(x,y)\in\Omega_{ij}} \le I_{ij}(x, y) \max_{(x,y)\in\Omega_{ij}} |\Delta u(x, y)|, \quad (15)$$

где

$$I_{ij}(x, y) = \int_{\Omega_{ij}} G_{ij}(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \quad (16)$$

Из граничных условий (9) и положительности функции Грина G_{ij} следуют соотношения

$$I_{ij}(x, y)\big|_{(x,y)\in\dot{\Omega}_{ij}} = 0, \tag{17}$$

$$I_{ij}(x, y)\big|_{(x,y)\in\Omega_{ij}} > 0. \tag{18}$$

В дальнейшем, если в равенстве (16) функцию Грина будем выбирать в виде (10) или (11), то символ I будем снабжать индексом взятой функции Грина, т. е. $I_{1ij}(x, y)$ или I_{2ij}.

Убедимся в том, что функция $I_{ij}(x, y)$, определяемая равенством (16), достигает максимума в точке $x = x_i + l_i/2$, $y = y_j + h_j/2$.

Для этого в равенстве (16) функцию Грина возьмем сначала в виде (10) и выполним интегрирование. Тогда после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} I_{1ij}(x, y) = {} & \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)\,\alpha_{2k+1,i}^2\,\mathrm{sh}\,(\alpha_{2k+1,i}h_j)} \times \\ & \times\,[\mathrm{sh}\,(\alpha_{2k+1,i}(y-y_{j+1})) + \mathrm{sh}\,(\alpha_{2k+1,i}h_j) - \\ & - \mathrm{sh}\,(\alpha_{2k+1,i}(y-y_j))]\,\sin\,(\alpha_{2k+1,i}(x-x_i)). \end{aligned} \tag{19}$$

Продифференцируем обе части равенства (19) по переменной x при произвольном фиксированном значении $y = y^*$ $(y_j < y^* < y_{j+1},\ y^* \neq y_j + h_j/2)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{1ij}(x, y^*)}{\partial x} = {} & \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)\,\alpha_{2k+1,i}\,\mathrm{sh}\,(\alpha_{2k+1,i}h_j)} \times \\ & \times\,[\mathrm{sh}\,(\alpha_{2k+1,i}(y^*-y_{j+1})) + \mathrm{sh}\,(\alpha_{2k+1,i}h_j) - \\ & - \mathrm{sh}\,(\alpha_{2k+1,i}(y^*-y_j))]\,\cos\,(\alpha_{2k+1,i}(x-x_i)). \end{aligned}$$

Очевидно, ряд Фурье, стоящий в правой части этого равенства, обращается в нуль только при $x = x_i + l_i/2$; т. е.

$$\left.\frac{\partial I_{1ij}(x, y)}{\partial x}\right|_{x = x_i + l_i/2} = 0, \quad y_j < y < y_{j+1}.$$

Аналогичным образом доказывается равенство

$$\left.\frac{\partial I_{2ij}(x, y)}{\partial y}\right|_{y = y_j + h_j/2} = 0, \quad x_i < x < x_{i+1}.$$

Из последних двух равенств и изложенного выше заключаем, что точка $x = x_i + l_i/2$, $y = y_j + h_j/2$ является единственной экстремальной точкой для функции $I_{ij}(x, y)$.

В силу соотношений (17), (18) функция $I_{ij}(x, y)$ в этой точке имеет максимум:

$$I_{ij}(x_i + l_i/2,\, y_j + h_j/2) = \max_{(x,y)\in\Omega_{ij}} I_{ij}(x, y). \tag{20}$$

Полагая в равенстве (19) $x = x_i + l_i/2$, $y = y_j + h_j/2$, получаем

$$I_{1\,ij}(x_i + l_i/2, y_j + h_j/2) =$$

$$= \frac{4l_i^2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}(\alpha_{2k+1,i} h_j/2)}\right). \tag{21}$$

Воспользовавшись формулой [2],

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32},$$

придадим равенству (21) вид

$$I_{1\,ij}(x_i + l_i/2, y_j + h_j/2) =$$

$$= \frac{l_i^2}{8} - \frac{4l_i^2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3 \operatorname{ch}\left((2k+1)\pi h_j/(2l_i)\right)}. \tag{22}$$

Подставив правую часть равенства (22) в правую часть неравенства (15) вместо $I_{ij}(x, y)$, получим с учетом (20) оценку в виде (12).

Положив в равенстве (16)

$$I_{ij}(x, y) = I_{2\,ij}(x, y) = \int\limits_{\Omega_{ij}} G_{2ij}(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

где $G_{2\,ij}(x, y; \xi, \eta)$ — функция Грина, определяемая формулой (11), мы тем же способом, каким получили равенство (22), получаем

$$I_{2\,ij}(x_i + l_i/2, y_j + h_j/2) =$$

$$= \frac{h_j^2}{8} - \frac{4h_j^2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \cdots \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3 \operatorname{ch}\left((2k+1)\pi l_i/(2h_j)\right)}. \tag{23}$$

Подставляя правую часть равенства (23) в правую часть неравенства (15) вместо $I_{ij}(x, y)$, получаем с учетом (20) оценку уклонения сплайна от аппроксимируемой функции в виде (13). Теорема доказана.

Очевидно, с точки зрения техники вычисления оценку в виде (12) удобно находить при $h_j > l_i$, а в виде (13) — при $l_i > h_j$.

Аппроксимации плоской ломаной линией функции одной переменной $u^*(x)$ и гармоническим сплайном функции двух переменных $u(x, t)$ $(0 < x < a,\ 0 < y < b)$ имеют ряд существенных общих свойств. Это дает основание в некотором смысле рассматривать двумерный гармонический сплайн как двумерный аналог ломаной линии. Укажем некоторые из этих свойств.

1. Как ломаная линия, так и двумерный гармонический сплайн во внутренних точках каждой из ячеек сетки удовлетворяют уравнениям

$$\Delta_1 P_i(x) = 0, \quad x_i < x < x_{i+1},$$

$$\Delta_2 u_{ij}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega_{ij},$$

где $\Delta_1 = d^2/dx^2$, $\Delta_2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, $P_i(x)$ — полином первой степени, удовлетворяющий граничным условиям

$$P_i(x_i) = u^*(x_i), \quad P_i(x_{i+1}) = u^*(x_{i+1}).$$

2. Ломаная линия и гармонический сплайн в каждой из ячеек сетки принимают минимум и максимум на границе ячейки.

3. Известно, что уклонение ломаной линии от аппроксимируемой функции в ячейке сетки описывается неравенством

$$|u^*(x)-P_i(x)|_{x_i<x<x_{i+1}} \le \frac{1}{8} l_i^2 \max_{x_i<x<x_{i+1}} |\Delta_1 u(x)|, \tag{24}$$

где $l_i = x_{i+1}-x_i$.

Предположим, что

$$\max_{x_i<x<x_{i+1}} |\Delta_1 u(x)| \le \max_{(x,y)\in\Omega_{ij}} |\Delta_2 u(x,y)|, \tag{25}$$

и обозначим правые части равенств (12) и (24) соответственно через $C_1(h_j)$ и C_2. Тогда будем иметь

$$C_2 - C_1(h_j) =$$

$$= \frac{4l_i^2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3 \operatorname{ch}\left((2k+1)\pi h_j/(2l_i)\right)} \max_{(x,y)\in\Omega_{ij}} |\Delta_2 u(x,y)|. \tag{26}$$

Положим в правой части равенства (26) $h_j = b$; это означает разбиение области Ω на полосы $\Omega_i = \{x_i < x < x_{i+1},\ 0 < y < b\}$. Легко видеть, что в этом случае при фиксированном l_i и $b \to \infty$ правая часть равенства (26) стремится к нулю, и следовательно,

$$\lim_{b\to\infty} (C_2 - C_1(b)) = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{b\to\infty} C_1(b) = c_2. \tag{27}$$

На основании (27) делаем вывод, что при аппроксимации функции одной переменной, заданной на отрезке $(0 < x < a)$ плоской ломаной линией и аппроксимации функции двух переменных, заданной в области $\Omega = (0 < x < a,\ 0 < y < < \infty)$, гармоническим сплайном на сетке, состоящей из полос $\Omega_i = (x_i < x < < x_{i+1},\ 0 < y < \infty)$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$, получаем равные оценки уклонения ломаной линии и гармонического сплайна от аппроксимируемых функций при выполнении (25).

4. Если значения ломаной линии во внутренних узлах определять из условия непрерывности первой производной в этих точках, то плоская ломаная линия вырождается в отрезок прямой.

Если значения гармонического сплайна определять из условия непрерывности нормальных производных к внутренним линиям сетки, то сплайн вырождается в гармоническую функцию в Ω.

В заключение кратко скажем о целесообразности введения в математику понятия гармонических сплайнов.

Существует широкий класс функций, которые хорошо аппроксимируются гармоническими сплайнами, но при тех же требованиях относительно порядка гладкости вовсе не аппроксимируются полиномиальными блендинг-сплайнами. Например, рассмотрим функцию

$$u(x,y) = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)\,\alpha_k^2 \operatorname{sh}(\alpha_k b)} \times$$

$$\times\left[\operatorname{sh}(\alpha_k(y-b)) + \operatorname{sh}(\alpha_k b) - \operatorname{sh}(\alpha_k y)\right]\sin(\alpha_k x), \tag{28}$$

$$0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le b, \quad \alpha_k = (2k+1)\pi/a.$$

Эта функция удовлетворяет уравнению

$$\Delta u(x, y) = -1, \quad (x, y) \in \Omega, \tag{29}$$

и следовательно, ее можно аппроксимировать гармоническим сплайном (3).

Но

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)\operatorname{sh}(\alpha_k b)}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{2}\left(e^{\alpha_k(y-b)} + e^{-\alpha_k(y+b)}\right) - \operatorname{ch}(\alpha_k y)\right]\cos(\alpha_k x) +$$

$$+\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}e^{-\alpha_k y}\cos(\alpha_k x) =$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)\operatorname{sh}(\alpha_k b)}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{2}\left(e^{\alpha_k(y-b)} + e^{-\alpha_k(y+b)}\right) - \operatorname{ch}(\alpha_k y)\right]\cos(\alpha_k x) +$$

$$+\frac{1}{\pi}\ln\frac{1 + 2e^{-\pi y/a}\cos(\pi x/a) + e^{-2\pi y/a}}{1 - 2e^{-\pi y/a}\cos(\pi x/a) + e^{-2\pi y/a}}. \tag{30}$$

Второе равенство из этой цепочки равенств получено с использованием формулы [2]:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p^{2k-1}\cos(2k-1)x}{2k-1} = \frac{1}{4}\ln\frac{1 + 2p\cos x + p^2}{1 - 2p\cos x + p^2},$$

$$0 < x < 2\pi, \quad p^2 \le 1.$$

Поскольку ряд, стоящий в правой части второго равенства из цепочки равенств (30), абсолютно сходится и ограничен в ячейке сетки $\overline{\Omega}_{00} = [0 \le x \le x_1,\ 0 \le y \le y_1]$, а слагаемое, содержащее натуральный логарифм, неограниченно возрастает при $x \to y$, $y \to 0$, то

$$\lim_{x \to 0,\ y \to 0}\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} = \infty. \tag{31}$$

Таким образом, при аппроксимации функции $u(x, y)$, определяемой равенством (28), билинейным блендинг-сплайном в силу (31) мы имеем оценку, содержащую неограниченную величину $\max\limits_{(x,y)\in\Omega_{00}}\left|\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y}\right|$.

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1967. – 436 с.
2. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1963. – 1100 с.

Получено 10.08.93