УДК 517.9

Б. Т. Билалов, Т. Р. Мурадов (Ин-т математики и механики НАН Азербайджана, Баку)

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ БАЗИСАХ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

We give some generalizations of the classical theorem of N. K. Bari on the Riesz basis property of close systems in Hilbert spaces to Banach spaces. Appropriate definitions are introduced, theorems on basis property of close systems in Banach spaces are formulated.

Наведено деякі узагальнення для банахових просторів класичної теореми Н. К. Барі щодо базисності Рісса близьких систем у гільбертових просторах. Введено відповідні означення, сформульовано теореми про базисність близьких систем у банахових просторах.

Хорошо известны классические теоремы Пэли – Винера и Н. К. Бари о базисности Рисса близких в некотором смысле систем в гильбертовом пространстве. Многими авторами приведены различные признаки базисности близких систем (см., например, [1, 2]). Некоторые обобщения названных теорем Пэли – Винера и Н. К. Бари в банаховых и гильбертовых пространствах получены в работе [3]. В указанных работах близость, в основном, задана в терминах самих систем. В силу двойственности с точки зрения базисности биортогональные системы в некотором смысле равнозначны. Поскольку геометрия банаховых пространств значительно отличается от геометрии гильбертовых, чтобы исследовать базисные свойства конкретных систем в определенном банаховом пространстве, необходимо учесть структуру сопряженного пространства.

Уместно привести следующее обобщение классической теоремы Крейна – Мильмана – Рутмана (КМР) о малых возмущениях базиса.

Теорема КМР [2] (теорема 10.2). *Если* $\{x_n\}_1^\infty$ *— базис банахова пространства* X, $\{x_n^*\}_1^\infty$ *— координатные функционалы этого базиса и биортогональная последовательность* $\{y_n, y_n^*\}_1^\infty \subset X \times X^*$ *близка к* $\{x_n\}_1^\infty$ *в следующем смысле:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| \|x_n^*\| < +\infty, \qquad \text{(КМР)}$$

то $\{y_n\}_1^\infty$ *также образует базис пространства* X, *эквивалентный исходному базису* $\{x_n\}_1^\infty$.

В настоящей работе устанавливается базисность систем с использованием близости сопряженных систем.

Первый основной результат посвящен доказательству аналога теоремы КМР с заменой условия (КМР) на двойственное условие. Отметим, что результат представляет научную ценность только в случае нерефлексивных пространств, так как в рефлексивном случае сопряженная к базису система является базисом, и для получения упомянутого результата достаточно поменять ролями X и X^*.

Прежде чем формулировать основной результат, введем следующие обозначения: N — множество натуральных чисел; B — некоторое банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$; B^* — сопряженное к B пространство.

Сначала докажем следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть* $\{\varphi_n\}_{n\in N}\subset B$ *— некоторый базис в* B *и минимальная в* B *система* $\{\psi_n\}_{n\in N}$ *близка к* $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ *в том смысле, что*

$$\sum_{n\geq 1}\left\|\psi_n^*-\varphi_n^*\right\|\|\varphi_n\| < +\infty,$$

где $\left\{\psi_n^*\right\}_{n\in N}$, $\left\{\varphi_n^*\right\}_{n\in N}\subset B^*$ *— соответствующие биортогональные к* $\{\psi_n\}_{n\in N}$, $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ *системы. Тогда выражение*

$$Tf \overset{\text{df}}{\equiv} \sum_{n\geq 1}\left(\psi_n^*-\varphi_n^*\right)(f)\varphi_n$$

определяет некоторый вполне непрерывный оператор $T: B\to B$.

Доказательство. Действительно,

$$\left\|\sum_{N}^{N+p}\left(\psi_n^*-\varphi_n^*\right)(f)\varphi_n\right\| \leq \left|\sum_{N}^{N+p}\left(\psi_n^*-\varphi_n^*\right)(f)\right|\|\varphi_n\| \leq$$

$$\leq \left(\sum_{N}^{N+p}\left\|\psi_n^*-\varphi_n^*\right\|\|\varphi_n\|\right)\|f\|.$$

Из этого неравенства следует, что ряд

$$Tf = \sum_{n\geq 1}\left(\psi_n^*-\varphi_n^*\right)(f)\varphi_n$$

сходится в B, причем ясно, что $\|T\|\leq\sum_{n\geq 1}\left\|\psi_n^*-\varphi_n^*\right\|\|\varphi_n\|$.

Пусть $T_n = \sum_{n=1}^{N}\left(\psi_n^*-\varphi_n^*\right)(\cdot)\varphi_n$. Очевидно, что $\|T-T_n\| \leq \leq \sum_{n\geq N+1}\left\|\psi_n^*-\varphi_n^*\right\|\|\varphi_n\| \mapsto 0$, $n\to\infty$. Из конечномерности и непрерывности в B операторов T_n следует вполне непрерывность $T: B\to B$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть выполнены все условия леммы* 1. *Тогда выражение*

$$Ff \overset{\text{df}}{\equiv} \sum_{n\geq 1}\psi_n^*(f)\varphi_n$$

определяет фредгольмовый оператор $F: B\to B$.

Доказательство. Легко убедиться, что

$$Ff = \sum_{n\geq 1}\psi_n^*(f)\varphi_n = \sum_{n\geq 1}\left(\psi_n^*-\varphi_n^*\right)(f)\varphi_n+\sum_{n\geq 1}\varphi_n^*(f)\varphi_n = (T+I)f,$$

где $I: B\mapsto B$ — единичный оператор. Фредгольмовость F очевидна.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $F : B \to B$ *— некоторый фредгольмовый оператор и* $F\psi_n = \varphi_n$ *для любого* $n \in N$, *где* $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ *полна в* B. *Тогда* F *обратим и* $\{\psi_n\}_{n\in N}$ *также полна в* B $\left(\text{изоморфна системе } \{\varphi_n\}_{n\in N}\right)$.

Действительно, из $x^* \in \operatorname{Ker} F^*$ имеем $0 = F^* x^*(\varphi_n) = x^*(F\psi_n) = x^*(\varphi_n)$. Из полноты $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ в B следует $x^* = 0$.

Определение 1. *Минимальные в* B *системы* $\{\psi_n\}_{n\in N}$, $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ *назовем* $*\varphi$*-близкими, если*

$$\sum_{n\geq 1} \left\| \psi_n^* - \varphi_n^* \right\| \|\varphi_n\| < +\infty,$$

и $*$*-близкими, если* $\sum_{n\geq 1} \left\| \psi_n^* - \varphi_n^* \right\| < +\infty$, *где* $\{\psi_n^*\}_{n\in N}$, $\{\varphi_n^*\}_{n\in N} \subset B^*$ *— соответствующие биортогональные системы.*

С помощью этих лемм легко доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть минимальная в* B *система* $\{\psi_n\}_{n\in N}$ $*\varphi$*-близка к некоторому базису* $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ *в* B. *Тогда* $\{\psi_n\}_{n\in N}$ *тоже образует базис в* B, *изоморфный к* $\{\varphi_n\}_{n\in N}$.

Действительно, рассматривая фредгольмовый $F\colon B \to B$ оператор

$$Ff = \sum_{n\geq 1} \psi_n^*(f)\varphi_n,$$

где $\{\psi_n^*\}_{n\in N} \subset B^*$ — сопряженная к $\{\psi_n\}_{n\in N}$ система, аналогично лемме 3 доказывается, что $\operatorname{Ker} F^* = 0$ и, следовательно, оператор F ограниченно обратим. Очевидно, что $F(\psi_n) = \varphi_n$, и, следовательно, $\{\psi_n\}$ тоже образует базис в B.

Из этой теоремы непосредственно получаем следующий аналог классической теоремы Н. К. Бари.

***Следствие* 1.** *Пусть минимальная в некотором гильбертовом пространстве* H *система* $\{\psi_n\}_{n\in N}$ $*$*-близка к некоторому базису Рисса* $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ *в* H. *Тогда* $\{\psi_n\}_{n\in N}$ *образует базис Рисса в* H.

В силу того, что базис Рисса удовлетворяет условию $0 < c^{-1} \leq \|\varphi_n\| \leq c < < +\infty$ при некоторой положительной постоянной $c > 0$, справедливость лемм 1, 2 относительно систем $\{\varphi_n\}_{n\in N}$, $\{\psi_n\}_{n\in N}$ очевидна.

Для формулировки теоремы 2 нам понадобятся следующие определения [2, 3].

Определение 2. *Минимальную в* B *систему* $\{x_n\}_{n\in N}$ *с сопряженной* $\{x_n^*\}_{n\in N} \subset B^*$ *назовем p-бесселевой, если для любого* $f \in B$ *имеем*

$$\left(\sum \left|x_n^*(f)\right|^p\right)^{1/p} \leq M\|f\|, \quad 1 \leq p < +\infty,$$

где $\|\cdot\|$ *— норма в* B.

Определение 3. *Системы* $\{x_n\}_{n\in N}$, $\{y_n\}_{n\in N} \subset B$ *назовем* p*-близкими, если*

$$\sum_{n\geq 1} \| x_n - y_n \|^p < +\infty \quad \textit{при} \quad 1 < p < +\infty$$

и

$$\max_n \| x_n - y_n \| < +\infty \quad \textit{при} \quad p = +\infty.$$

Теорема 2. *Пусть p-бесселева система $\{x_n\}_{n\in N} \subset B$ q-близка к базису $\{y_n\}_{n\in N}$ в B, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Тогда $\{x_n\}_{n\in N}$ образует базис в B, изоморфный к $\{y_n\}_{n\in N}$.*

Действительно, пусть $\{x_n^*\}_{n\in N} \subset B^*$ — сопряженная к $\{x_n\}_{n\in N}$ система. Тогда из неравенства

$$\left\| \sum x_n^*(f)(x_n - y_n) \right\| \leq \sum \left| x_n^*(f) \right| \| x_n - y_n \| \leq$$

$$\leq \left(\sum \left| x_n^*(f) \right|^p \right)^{1/p} \left(\sum \| x_n - y_n \|^q \right)^{1/q} \leq M \left(\sum \| x_n - y_n \|^q \right)^{1/q} \| f \|$$

следует, что $Tf = \sum x_n^*(f)(x_n - y_n)$ вполне непрерывный, а значит, $F = I - T$ — фредгольмовый оператор. Ясно, что $F x_n = y_n$.

Согласно лемме 3 F ограниченно обратим, в результате чего утверждение теоремы очевидно.

Замечание. Интересно сравнить эту теорему с результатами § 11 монографии [2]. В утверждениях теорем [2] бесселевость или p-бесселевость требуется от базиса.

1. *Мильман В. Д.* Геометрическая теория пространств Банаха // Успехи мат. наук. – 1970. – **25**, вып. 3. – С. 113 – 174.
2. *Zinger I.* Bases in Banach spaces. I. – Berlin: Springer, 1970. – 668 p.
3. *Билалов Б. Т.* Базисы из экспонент, косинусов и синусов, являющиеся собственными функциями дифференциальных операторов // Дифференц. уравнения. – 2003. – **39**, № 5. – С. 1 – 5.

Получено 16.05.2005,
после доработки — 29.06.2005