УДК 517.9

О. М. Станжицький, О. О. Місяць (Київ. нац. у-т ім. Т. Шевченка)

АСИМПТОТИЧНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ

We present sufficient conditions of the asymptotic equivalence of a nonlinear pulse system to a nonlinear system without pulses. We consider the case of the asymptotic equivalence of a weakly nonlinear pulse system and a linear pulse system.

Приведены достаточные условия асимптотической эквивалентности нелинейной импульсной системы нелинейной системе без импульсов. Рассмотрен случай асимптотической эквивалентности слабонелинейной импульсной системы и линейной системы с импульсами.

1. Вступ. Системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією є зручними математичними моделями опису реальних процесів, які під час еволюції зазнають миттєвих впливів. Такі системи інтенсивно вивчаються багатьма математиками. У монографії [1] у певній мірі підсумовано дослідження в даній галузі.

Однак на практиці вивчати об'єкт, який задається нелінійною системою з імпульсною дією в нефіксовані моменти часу, досить важко. Стверджувати щось про якісну поведінку розв'язків у такому випадку, особливо на нескінченних інтервалах, є дуже непростою задачею.

В даній роботі наведено деякі умови на моменти та величини імпульсів, при яких розв'язки системи з імпульсною дією у нефіксовані моменти часу можна апроксимувати розв'язками деякої системи без імпульсів. Іншими словами, наведено умови асимптотичної еквівалентності імпульсної системи та системи звичайних диференціальних рівнянь.

Окремим питанням у роботі виділено асимптотичну еквівалентність лінійних систем. Однією з ключових теорем, в яких досліджується ця проблема, є теорема Левінсона [2, с. 159]. Вказана теорема визначає умови асимптотичної еквівалентності стійкої лінійної однорідної системи зі сталою матрицею A та лінійної однорідної системи з матрицею $A + B(t)$. Також в [2, с. 230] наведено (без доведення) наступне узагальнення цього результату, а саме, умови еквівалентності систем $\dot{x} = Ax$ та $\dot{y} = Ay + f(t, y)$. При цьому зроблено посилання на роботу [3]. Проте насправді в цій роботі доведено асимптотичну еквівалентність лише в один бік. Зокрема, встановлено, що кожному розв'язку $y(t)$ системи $\dot{y} = Ay + f(t, y)$ можна поставити у відповідність єдиним чином розв'язок $x(t)$ системи $\dot{x} = Ax$ такий, що $\|x(t) - y(t)\| \to 0,\ t \to \infty$. Щодо зворотного результату, то такого доведення немає; зазначено лише, що еквівалентність в інший бік довести складно.

В даній роботі цей результат доведено в обидва боки і отримано його узагальнення на імпульсні системи.

2. Постановка задачі. Розглянемо систему диференціальних рівнянь з імпульсною дією у нефіксовані моменти часу:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x), \qquad t \neq \tau_k(x), \\ \Delta x\Big|_{t=\tau_k(x)} &= h_k(x). \end{aligned} \tag{1}$$

Будемо вважати, що в ній немає биття і розв'язки необмежено продовжувані вправо. Зокрема, так буде при виконанні умов леми 3.1 з [1, с. 23].

Ставиться задача дослідження асимптотичної поведінки при $t \to \infty$ розв'язків системи (1). Це питання розглядається в контексті побудови системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\dot{y} = g(t, y), \tag{2}$$

яку назвемо граничною для (1) в наступному сенсі.

Означення 1. *Система* (2) *називається граничною* (*асимптотично еквівалентною*) *системі* (1), *якщо для довільного розв'язку* $x(t)$ *системи* (1) *існує розв'язок* $y(t)$ *системи* (2) *такий, що*

$$\lim_{t\to\infty}\|x(t)-y(t)\| = 0. \tag{3}$$

Очевидно, що необхідною умовою виконання (3) є прямування величин імпульсу до нуля при $k\to\infty$. Проте ця умова не є достатньою, що підтверджує наступний приклад.

***Приклад* 1.** Розглянемо систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x, \qquad t \neq \tau_k(x), \\ \Delta x\big|_{t=\tau_k(x)} &= h_k(x), \qquad x\in R^n. \end{aligned} \tag{4}$$

Досить просто показати, що для того, щоб система $\dot{y} = y$ була асимптотично еквівалентною (4), достатньо виконання умови

$$e^{\sup_{x\in R^n}\tau_{n+1}(x)}\sum_{k=n}^{\infty}\sup_{x\in R^n}\left\|h_k(x)e^{-\tau_k(x)}\right\|\to 0, \qquad n\to\infty.$$

Якщо ж $\tau_k(x)\equiv\tau_k$, $h_k(x)\equiv h_k$, то ця умова є і необхідною. Наступний приклад показує, що граничним рівнянням може необов'язково бути перше з рівнянь (1).

***Приклад* 2.** Розглянемо систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x, \qquad t \neq \tau_k, \\ \Delta x\big|_{t=\tau_k} &= h_k(x), \qquad x\in R. \end{aligned}$$

Якщо $\tau_k = \ln(\ln k)$, а $h_k = \ln k(\ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln k))$, то роль граничного рівняння відіграватиме $\dot{y} = \left(1+\frac{1}{t}\right)y$.

3. Основні результати. Наведені вище приклади — це приклади систем з імпульсною дією, перше рівняння яких є лінійним. При їх дослідженні суттєво використовувався явний вигляд розв'язку.

Перейдемо до розгляду загальної системи (1) із нелінійним першим рівнянням. Нехай функція $f(t,x)$ є визначеною і неперервною за сукупністю змінних в області $t\geq 0$, $x\in R^n$, $h_k(x)$ неперервні при $x\in R^n$. Має місце наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай в* (1) *немає биття, розв'язки необмежено продовжувані вправо і виконуються наступні умови*:

1) $f(t,x)$ *є ліпшицевою по* x *зі сталою* L;

2) *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{x\in R^n}\left(\|h_k(x)\|e^{L\tau_{k+1}(x)}\right)$ *є збіжним.*

Тоді система

$$\dot{y} = f(t,y) \tag{5}$$

буде асимптотично еквівалентною системі (1) *у сенсі наведеного вище означення.*

Доведення. Нехай $x(t)$ — довільний розв'язок системи (1). Позначимо через $\{\tau_k,\ k\geq 1\}$ моменти імпульсної дії для нього, $\{h_k,\ k\geq 1\}$ — їх величини. Набір (τ_k, h_k) однозначно визначається розв'язком $x(t)$ і є фіксованим для нього. За означенням розв'язку імпульсної системи $x(t)$ можна подати у вигляді

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(t) I_{(\tau_k, \tau_{k+1}]}(t),$$

де $x_k(t)$ — розв'язок системи (5). Також $x_{k+1}(\tau_{k+1}) - x_k(\tau_{k+1}) = h_k$. З умови (1) та леми Гронуолла – Беллмана маємо

$$\|x_{k+1}(0) - x_k(0)\| \le e^{L\tau_k} \|x_{k+1}(\tau_{k+1}) - x_k(\tau_{k+1})\| = e^{L\tau_{k+1}} \|h_k\|.$$

Послідовність $\{x_k(0),\ k \ge 1\}$ є фундаментальною в R^n. Дійсно, для довільних $n, m \ge 1$

$$\|x_n(0) - x_m(0)\| \le \|x_n(0) - x_{n+1}(0)\| + \|x_{n+1}(0) - x_{n+2}(0)\| + \ldots$$

$$\ldots + \|x_{m-1}(0) - x_m(0)\| \le \sup_{x \in R^n} \left(\|h_n(x)\| e^{L\tau_{n+1}(x)} \right) +$$

$$+ \sup_{x \in R^n} \left(\|h_{n+1}(x)\| e^{L\tau_{n+2}(x)} \right) + \ldots + \sup_{x \in R^n} \left(\|h_m(x)\| e^{L\tau_{m+1}(x)} \right) \le$$

$$\le \sum_{k=n}^{\infty} \sup_{x \in R^n} \left(\|h_k(x)\| e^{L\tau_{k+1}(x)} \right) \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

Позначимо через x_∞ її границю. Розглянемо розв'язок $y(t)$ системи

$$\dot{y} = f(t, y(t)),$$
$$y(0) = x_\infty.$$

Покажемо, що $\|x(t) - y(t)\| \to 0,\ t \to \infty$.

Зафіксуємо $t > 0$. Існує n таке, що $\tau_{n-1} \le t < \tau_n$.

Будемо вважати, що прямування t до нескінченності рівносильне прямуванню n до нескінченності. У протилежному випадку доведення є очевидним.

Маємо

$$x(t) = x_{n-1}(t), \quad t \in (\tau_{n-1}, \tau_n], \quad n \ge 2,$$

$$\|x(t) - y(t)\| \le e^{L(t-\tau_{n-1})} \|x(\tau_n) - y(\tau_n)\| \le e^{L(\tau_n - \tau_{n-1})} \|x_{n-1}(\tau_n) - y(\tau_n)\|,$$

$$\|x_{n-1}(\tau_n) - y(\tau_n)\| \le \sum_{k=n-1}^{\infty} \|x_{k+1}(\tau_n) - x_k(\tau_n)\| \le$$

$$\le \sum_{k=n-1}^{\infty} e^{L(\tau_{k+1} - \tau_k)} \|x_{k+1}(\tau_{k+1}) - x_k(\tau_{k+1})\| = \sum_{k=n-1}^{\infty} e^{L(\tau_{k+1} - \tau_k)} \|h_k\|.$$

Тоді

$$\|x(t) - y(t)\| \le e^{L(\tau_n - \tau_{n-1})} \sum_{k=n-1}^{\infty} e^{L(\tau_{k+1} - \tau_n)} \|h_k\| = e^{-L\tau_{n-1}} \sum_{k=n-1}^{\infty} e^{L\tau_{k+1}} \|h_k\| \le$$

$$\le \sum_{k=n-1}^{\infty} \sup_{x \in R^n} e^{L\tau_{k+1}} \|h_k\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Теорему доведено.

Проілюструємо отриману теорему прикладом.

***Приклад* 3.** Нехай $f(t, x)$ є ліпшицевою по x зі сталою L, $f(t, x) \ge 0$ при $t \ge 0$, $x \in R$. Гіперповерхні, при перетині яких відбувається стрибок, визначимо як

$$\tau_k = \{(t, x): x = \operatorname{ctg} t,\ t \in (\pi k, \pi(k+1))\},$$

величину стрибка — таким чином: $h_k(x) = \dfrac{1}{k^2(1+x^2)e^{L\pi(k+1)}}$, де L — стала Ліпшиця функції f.

У цій системі биття не буде, оскільки розв'язки є неспадними, а гіперповерхні стрибка — спадними по t.

Перевіримо виконання умови 2 теореми 1:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{x\in R}\left(|h_k(x)|e^{L\tau_{k+1}(x)}\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{x\in R}|h_k(x)| \sup_{x\in R} e^{L\tau_{k+1}(x)} \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 e^{L\pi(k+1)}} e^{L\pi k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

Таким чином, згідно з доведеною теоремою, системи

$$\dot{x} = f(t, x), \quad t \ne \tau_k(x),$$

$$\Delta x\big|_{t=\tau_k(x)} = h_k(x)$$

та $\dot{y} = f(t, y)$ є еквівалентними.

Перейдемо до розгляду асимптотичної еквівалентності лінійних та слабконелінійних систем. Наведена нижче теорема визначає достатні умови такої еквівалентності і є узагальненням теореми Левінсона.

Розглянемо дві системи з імпульсною дією у фіксовані моменти часу:

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad t \ne \tau_k,$$
$$\Delta x\big|_{t=\tau_k} = Bx, \tag{6}$$

де A, B — $(n \times n)$-матриці, τ_k — числова послідовність на R^1 така, що $\tau_k \to -\infty$ при $k \to -\infty$ і $\tau_k \to +\infty$ при $k \to \infty$ та

$$\frac{dy}{dt} = Ay + f(t, y), \quad t \ne \tau_k,$$
$$\Delta y\big|_{t=\tau_k} = By + J_k(y), \quad J_k: R^n \to R^n. \tag{7}$$

Теорема 2. *Нехай виконано наступні умови*:

1) *дійсні частини власних чисел матриці A недодатні, а власним числам з нульовою дійсною частиною відповідає одновимірна клітина Жордана*;

2) *A та B комутують*: $AB = BA$;

3) $\|E - B\| \le 1$;

4) *існує неперервна невід'ємна функція $K(\tau) \in L_1[0, \infty]$ така, що $\|f(t, y)\| \le K(t)\|y\|$ для довільних $t \ge 0$, $x \in R^n$*;

5) *існує $\{D_k,\ k \ge 1\}$ — невід'ємна послідовність чисел така, що $\|J_k(y)\| \le D_k\|y\|$ для довільного $y \in R^n$ і $\sum_{k=1}^{\infty} D_k < \infty$*;

6) *f є ліпшицевою по y та неперервною за сукупністю змінних при $t \ge 0$, $x \in R^n$.*

Тоді (6) *та* (7) *еквівалентні в наступному сенсі*: *кожному розв'язку $x(t)$ системи* (6) *можна поставити у відповідність розв'язок $y(t)$ системи* (7) *та-*

кий, що $\| x(t) - y(t) \| \to 0,\ t \to \infty,$ *а також кожному розв'язку* $y(t)$ *системи* (7) *єдиним чином можна поставити у відповідність розв'язок* $x(t)$ *системи* (6) *такий, що* $\| x(t) - y(t) \| \to 0,\ t \to \infty.$

Доведення розіб'ємо на кілька пунктів.

1. Перший пункт є аналогічним до того, що і в теоремі Левінсона, а саме: матрицю A ми подаємо у вигляді

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

де A_1 — матриця, дійсні частини власних чисел якої є від'ємними, A_2 — матриця, дійсні частини власних чисел якої є нульовими. Нехай $X(t, t_0)$ — матрицант системи (6). Із загальної теорії лінійних систем з імпульсною дією відомо, що при виконанні умови (2) $X(t, t_0)$ має вигляд

$$X(t, t_0) = e^{A(t - t_0)} (E + B)^{i(t, t_0)},$$

де $i(t, t_0)$ — кількість імпульсів на $[t_0, t]$. Враховуючи зображення матриці A і умову (3), матрицант можна записати у вигляді

$$X(t, t_0) = X_1(t, t_0) + X_2(t, t_0),$$

де

$$\| X_1(t, t_0) \| \le a e^{-\alpha(t - t_0)} \quad \text{при} \quad t \ge t_0, \qquad \| X_2(t, t_0) \| \le b, \qquad t \in R^1,$$

a і b — деякі сталі.

2. У цьому пункті отримаємо оцінку для розв'язку $y(t, t_0, y_0)$ системи (7) такого, що $y(t_0, t_0, y_0) = y_0$.

Зобразимо його в інтегральній формі:

$$y(t, t_0, y_0) = X(t, t_0) y_0 + \int_{t_0}^{t} X(t, \tau) f(\tau, y(\tau, t_0, y_0)) d\tau +$$

$$+ \sum_{t_0 < \tau_k < t} X(\tau_k, t_0) J_k \big(y(\tau_k, t_0, y_0) \big).$$

Маємо оцінку

$$\| y(t, t_0, y_0) \| \le c \| y_0 \| + \left\| \int_{t_0}^{t} X(t, \tau) f(\tau, y(\tau, t_0, y_0)) d\tau \right\| +$$

$$+ \left\| \sum_{t_0 < \tau_k < t} X(\tau_k, t_0) J_k \big(y(\tau_k, t_0, y_0) \big) \right\| \le$$

$$\le c \| y_0 \| + c \int_{t_0}^{t} K(\tau) \| y(\tau, t_0, y_0) d\tau \| + c \sum_{k : t_0 < \tau_k < t} D_k \| y(\tau_k, t_0, y_0) \|.$$

З узагальненої нерівності Гроноулла – Беллмана [1, с. 13] випливає

$$\| y(t, t_0, y_0) \| \le c \left(\prod_{t_0 < \tau_k < t} (1 + D_k) \right) e^{\int_{t_0}^{t} K(\tau) d\tau} \| y_0 \| \le$$

$$\le c \left(\prod_{k=1}^{\infty} (1 + D_k) \right) e^{\int_{t_0}^{\infty} K(\tau) d\tau} \| y_0 \|.$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} D_k$ збігається, тому має місце нерівність $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + D_k) < \infty$.

З останнього і збіжності $\int_0^\infty K(\tau)d\tau$ випливає оцінка $\| y(t, t_0, y_0) \| \le c_1 \| y_0 \|$ з не залежною від t_0 і y_0 сталою c.

3. У цьому пункті для даного розв'язку $y(t) = y(t, t_0, y_0)$ знайдемо такий розв'язок $x(t)$ системи (6), що $\| x(t) - y(t) \| \to 0,\ t \to \infty$.

З інтегрально-сумарного зображення розв'язку маємо

$$y(t) = X(t, t_0) y_0 + \int_{t_0}^{t} X_1(t, \tau) f(\tau, y(\tau)) d\tau + \int_{t_0}^{t} X_2(t, \tau) f(\tau, y(\tau)) d\tau + \\ + \sum_{t_0 < \tau_k < t} X_1(t, \tau_k) J_k(y(\tau_k)) + \sum_{t_0 < \tau_k < t} X_2(t, \tau_k) J_k(y(\tau_k)).$$

Враховуючи еволюційну властивість матриціанта, отримуємо

$$y(t) = X(t, t_0) \left[y_0 + \int_{t_0}^{\infty} X_2(t_0, \tau) f(\tau, y(\tau)) d\tau + \sum_{\tau_k > t_0} X_2(t_0, \tau_k) J_k(y(\tau_k)) \right] + \\ + \int_{t_0}^{t} X_1(t, \tau) f(\tau, y(\tau)) d\tau - \int_{t}^{\infty} X_2(t, \tau) f(\tau, y(\tau)) d\tau - \\ - \sum_{\tau_k \ge t} X_2(t, \tau_k) J_k(y(\tau_k)) + \sum_{t_0 < \tau_k < t} X_1(t, \tau_k) J_k(y(\tau_k)).$$

Покладемо

$$x_0 = y_0 + \int_{t_0}^{\infty} X_2(t_0, \tau) f(\tau, y(\tau)) d\tau + \sum_{\tau_k > t_0} X_2(t_0, \tau_k) J_k(y(\tau_k)). \tag{8}$$

На підставі викладеного вище інтеграл і ряд у (8) є збіжними.

Розв'язку $y(t)$ системи (7) поставимо у відповідність розв'язок $x(t)$ системи (6) з початковою умовою $x(t_0) = x_0$, де x_0 визначено формулою (8).

Оскільки розв'язки $x(t)$ і $y(t)$ однозначно визначаються своїми початковими даними, то формула (8) встановлює однозначну відповідність між множиною всіх розв'язків системи (7) і множиною всіх розв'язків (або її частини) системи (6). Тоді

$$x(t) = X(t, t_0) x_0.$$

Покажемо, що

$$\| x(t) - y(t) \| \to 0, \qquad t \to \infty.$$

Маємо

$$\| x(t) - y(t) \| = \int_{t_0}^{t} \| X_1(t, \tau) f(\tau, y(\tau)) \| d\tau + \sum_{t_0 < \tau_k < t} \| X_1(t, \tau_k) J_k(y(\tau_k)) \| + \\ + \int_{t}^{\infty} \| X_2(t, \tau_k) f(\tau, y(\tau)) \| d\tau + \sum_{\tau_k \ge t} \| X_2(t, \tau_k) J_k(y(\tau_k)) \| \le \\ \le \int_{t_0}^{t} \| X_1(t, \tau) \| K(\tau) \| y(\tau) \| d\tau + \sum_{t_0 < \tau_k < t} \| X_1(t, \tau_k) \| D_k \| y(\tau_k) \| +$$

$$+ \int_t^\infty \|X_2(t,\tau)\| K(\tau) \|y(\tau)\| d\tau + \sum_{\tau_k \ge t} \|X_2(t,\tau_k)\| D_k \|y(\tau_k)\| \le$$

$$\le \int_{t_0}^t a e^{-\alpha(t-\tau)} K(\tau) c_1 \|y_0\| d\tau + \sum_{t_0 < \tau_k < t} a e^{-\alpha(t-\tau_k)} D_k c_1 \|y_0\| +$$

$$+ b c_1 \|y_0\| \int_t^\infty K(\tau) d\tau + b c_1 \|y_0\| \sum_{\tau_k \ge t} D_k. \qquad (9)$$

Останні два доданки у формулі (9) прямують до нуля при t, що прямує до нескінченності, згідно з умовами 4 і 5 теореми 2.

Використовуючи оцінки

$$\int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-\tau)} K(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{t/2} e^{-\alpha(t-\tau)} K(\tau) d\tau + \int_{t/2}^t e^{-\alpha(t-\tau)} K(\tau) d\tau \le$$

$$\le e^{-\alpha t/2} \int_{t_0}^\infty K(\tau) d\tau + \int_{t/2}^t K(\tau) d\tau,$$

отримуємо збіжність до нуля першого доданка в (9) при $t \to \infty$.

Аналогічно

$$\sum_{t_0 < \tau_k < t} e^{-\alpha(t-\tau_k)} D_k \le \sum_{t_0 < \tau_k \le t/2} e^{-\alpha(t-\tau_k)} D_k + \sum_{t/2 < \tau_k < t} e^{-\alpha(t-\tau_k)} D_k \le$$

$$\le e^{-\alpha t/2} \sum_{t_0 < \tau_k} D_k + \sum_{t/2 < \tau_k < t} D_k.$$

Звідси випливає прямування до нуля другого доданка в (9) при $t \to \infty$.

4. Нарешті, покажемо, що кожному розв'язку $x(t)$ ми можемо поставити у відповідність розв'язок $y(t)$ системи (7) такий, що $\|x(t) - y(t)\| \to 0$, $t \to \infty$, що і завершить доведення теореми.

Нехай x — початкове значення розв'язку (6). Покажемо, що існує початкове значення розв'язку (7), яке задовольняє співвідношення (8). Позначимо праву частину цього співвідношення через $F(y_0)$, $x_0 = F(y_0)$. Нагадаємо, що в формулі (8) $y(\tau) = y(\tau, t_0, y_0)$.

Покажемо, що відображення $F: R^n \to R^n$ є неперервним. Спочатку доведемо неперервність відображення $F_1(y_0)$, визначеного формулою $F_1(y_0) = \int_{t_0}^\infty X_2(t_0,\tau) f(\tau, y(\tau, y_0)) d\tau$.

Нехай послідовність $\{y_n, n \ge 1\} \in R^n$ є такою, що $y_n \to y_0$ в R^n. Тоді існує куля $B_R(0)$ така, що $y_n \in B_R(0)$ для довільного n. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Існує $T > 0$ таке, що для довільного $n \ge 1$ виконується нерівність

$$\left\| \int_T^\infty X_2(t_0,\tau) f(\tau, y(\tau, y_n)) d\tau \right\| \le c \int_T^\infty K(\tau) \|y(\tau, y_n)\| d\tau \le c_1 \int_T^\infty K(\tau) \|y_n\| d\tau \le$$

$$\le c_2 R \int_T^\infty K(\tau) d\tau < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Подамо F_1 у вигляді

$$F_1(y_0) = \int_{t_0}^{T} X_2(t_0-\tau) f(\tau, y(\tau, y_0))d\tau + \int_{T}^{\infty} X_2(t_0-\tau) f(\tau, y(\tau, y(\tau)))d\tau.$$

Тоді

$$\| F_1(y_0) - F_1(y_n) \| \le \left\| \int_{t_0}^{T} X_2(t_0-\tau)[f(\tau, y(\tau, y_0)) - f(\tau, y(\tau, y(\tau, y_n)))]d\tau \right\| +$$

$$+ \left\| \int_{T}^{\infty} X_2(t_0-\tau) f(\tau, y(\tau, y_0))d\tau \right\| + \left\| \int_{T}^{\infty} X_2(t_0-\tau) f(\tau, y(\tau, y_n(\tau)))d\tau \right\| \le$$

$$\le c_4 \int_{t_0}^{T} \| y(\tau, y_0) - y(\tau, y_n) \| d\tau + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \le c_5 \int_{t_0}^{T} e^{L(T-t_0)} \| y_n - y_0 \| d\tau + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

для достатньо великих n.

З останнього випливає неперервність відображення F_1. Неперервність відображення $F_2(y) = \sum_{\tau_k > t_0} X_2(t_0, \tau_k) J_k(y(\tau_k, y_0))$ доводиться аналогічно.

Для подальшого доведення скористаємось наступним наслідком з теореми Брауера про нерухому точку, а саме, наступною теоремою [4, с. 26].

Теорема. *Якщо* $f\colon R^n \to R^n$ *є неперервним і*

$$\frac{|(f(y), y)|}{\| y \|} \to \infty, \qquad \| y \| \to \infty, \tag{10}$$

то рівняння $f(y) = x$ *має розв'язок для всіх* $x \in R^n$.

Маємо

$$\left| (F(y_0), y_0) \right| =$$

$$= \left| (y_0, y_0) + \left(\int_{t_0}^{\infty} X_2(t_0-\tau) f(\tau, y(\tau, y_0))d\tau, y_0 \right) + \left(\sum_{\tau_i > t_0} X_2(t_0, \tau_i) J_i(y(\tau_i, y_0), y_0) \right) \right| \ge$$

$$\ge |(y_0, y_0)| -$$

$$- \left| \left(\int_{t_0}^{\infty} X_2(t_0-\tau) f(\tau, y(\tau, y_0))d\tau, y_0 \right) + \left(\sum_{\tau_i > t_0} X_2(t_0, \tau_i) J_i(y(\tau_i, y_0), y_0) \right) \right| \ge$$

$$\ge \| y_0 \|^2 - c_1 \| y_0 \|^2 \int_{t_0}^{\infty} K(\tau)d\tau - c_2 \| y_0 \|^2 \sum_{t_k > t_0} D_k .$$

Виберемо t_0 достатньо великим так, щоб $c_1 \int_{t_0}^{\infty} K(\tau)d\tau + c_2 \sum_{k:\tau_k > t_0} D_k < 1$.

Остання нерівність забезпечує виконання умови (10), а отже, і розв'язність рівняння (8) відносно y_0.

Теорему доведено.

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 288 с.
2. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
3. *Brauer F.* Nonlinear differential equations with forcing terms // Proc. Amer. Math. Soc. – 1964. – **15**, № 5. – P. 758 – 765.
4. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. – М.: Мир, 1977. – 222 с.

Одержано 18.09.2006