УДК 517.9

С. В. Позур (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

СИНГУЛЯРНА НЕЛІНІЙНА ЗАДАЧА НА ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

A problem on eigenvalues for a singular nonlinear second order differential equation is considered on a semiaxis. For this problem, we establish sufficient conditions for the existence of solution which contains a given number of zeros and monotonically decreases to zero at infinity.

Для задачі на власні значення для сингулярного нелінійного диференціального рівняння другого порядку, яка розглядається на півосі, встановлено достатні умови існування розв'язку з заданою кількістю нулів, що монотонно спадає до нуля на нескінченності.

Мета даної роботи полягає у встановленні достатніх умов існування розв'язку крайової задачі вигляду

$$y'' + a(x)y' + b(x)f(y) = \lambda y, \tag{1}$$

$$y(+0) = y_0 \neq 0, \quad y(+\infty) = 0, \tag{2}$$

де $a(x) \in C^1((0,\infty) \to (0,\infty))$, $b(x) \in C^1((0,\infty) \to (0,\infty))$, $f(y) \in C^2(\mathbf{R} \to \mathbf{R})$, $f(0) = 0$, а $\lambda > 0$ — „спектральний" параметр. Ми маємо намір дати відповідь на питання: чи існує значення параметра λ, для якого задача (1), (2) має розв'язок з наперед заданою кількістю нулів?

Зазначимо, що проблеми такого типу природно виникають при вивченні глобальних сферично симетричних розв'язків багатовимірних нелінійних еволюційних рівнянь теорії поля [1].

Нелінійним сингулярним крайовим задачам (без параметра) на півосі присвячено чимало робіт (див., наприклад, [2 – 5]). У роботі [6] розглядався випадок, коли ліва частина рівняння (1) є оператором Емдена – Фаулера. У статті [7], спираючись на результати [2, 6], запропоновано метод дослідження задачі досить загального вигляду

$$y'' + p(x, y, y')y' + q(x, y) = \lambda y, \tag{3}$$

$$y^{(k)}(+0) < \infty, \quad k = 0, 1, 2, \tag{4}$$

$$y(+\infty) = 0. \tag{5}$$

Однак перевірка наведених у [7] достатніх умов існування розв'язку з наперед заданою кількістю нулів, саме через їх загальність, потребує значних зусиль. До того ж серед цих умов фігурує одна „некоефіцієнтна": апріорі вимагається, щоб при $\lambda = 0$ існував розв'язок рівняння (3), який би задовольняв (4) і мав наперед задану кількість нулів.

У даній статті шляхом певного удосконалення техніки, розвинутої в [7], одержано нові, більш тонкі умови розв'язності задачі (1), (2). Усі вони, включно з умовами коливності розв'язків рівняння (1) при $\lambda = 0$, мають суто коефіцієнтний характер і є досить зручними для перевірки.

Наведемо формулювання зазначених умов:

Π_1. Існують додатні границі $\lim\limits_{x \to +0} xa(x) = a_0 > 0$, $\lim\limits_{x \to +0} xb(x) = b_0 > 0$.

Π_2. Для всіх $x > 0$ виконується нерівність $b'(x) \leq 0$ і існують границі

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln b(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x \to \infty} a(x) < \infty.$$

Π_3. Існує таке $\theta > 1$, що для всіх $y \neq 0$ виконується нерівність $f'(y) \geq \geq \theta \dfrac{f(y)}{y} > 0$.

Π_{4_1}. Існує таке $\gamma > 1$, що $\liminf\limits_{|y| \to 0} \dfrac{|f(y)|}{|y|^\gamma} > 0$, і

$$\int_{x_0}^{\infty} \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\right\} dx < \infty,$$

$$\int_{x_0}^{\infty} \exp\left\{\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\right\} b(x) \left(\int_{x}^{\infty} \exp\left\{-\int_{x_0}^{s} a(u)\,du\right\} ds\right)^{\gamma} dx = \infty$$

для кожного $x_0 > 0$.

Π_{4_2}. Існує границя $\lim\limits_{x \to \infty} b(x) = 0$ і

$$\int_{x_0}^{\infty} a(x)\,dx < \infty,$$

$$\int_{x_0}^{\infty} \exp\left\{\int_{x_0}^{x} a(u)\,du\right\} b(x) \left(\int_{x_0}^{x} \exp\left\{-\int_{x_0}^{s} a(u)\,du\right\} ds\right) dx = \infty$$

для кожного $x_0 > 0$.

Π_5. Існують нульові границі $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln a(x)}{x} = 0$ або $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln |b'(x)|}{x} = 0$.

Зробимо кілька зауважень стосовно наведених умов.

Позначимо

$$V[y] := \frac{y'^2}{2} - \frac{\lambda y^2}{2} + b(x) \int_0^y f(s)\,ds.$$

При виконанні умов Π_2, Π_3 похідна функції $V[y]$ на підставі рівняння (1) недодатна:

$$\frac{d}{dx}(V[y]) := -a(x) y'^2 + b'(x) \int_0^y f(s)\,ds \leq 0.$$

З умови Π_3 випливає, що для довільного $y_0 \neq 0$ виконуються нерівності $f(y)/f(y_0) \geq (y/y_0)^\theta$, якщо $y/y_0 \geq 1$, і $f(y)/f(y_0) \leq (y/y_0)^\theta$, якщо $0 < y/y_0 \leq \leq 1$. До того ж функція $g(y) := \dfrac{f(y)}{y}$ монотонно зростає при $y > 0$ і монотонно спадає при $y < 0$. Справді,

$$g'(y) \operatorname{sign} y = \frac{yf'(y) - f(y)}{y^2} \operatorname{sign} y \geq \frac{(\theta - 1) f(y)}{y^2} \operatorname{sign} y > 0.$$

Тому рівняння $\lambda y = b(x) f(y)$ відносно y має два корені. Позначимо через $\eta_+(x, \lambda)$ та $\eta_-(x, \lambda)$ відповідно додатний і від'ємний корені цього рівняння.

Як показано в роботі [8], при виконанні одного з припущень Π_{4_i}, $i = 1, 2$, всі розв'язки рівняння (1) при $\lambda = 0$ будуть коливними. Зауважимо також, що при виконанні першої умови в Π_{4_2} має місце

$$\int_{x_0}^{\infty} \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\right\} dx = \infty, \qquad x_0 > 0.$$

Нехай L_l — множина таких чисел $\Lambda > 0$, що розв'язок рівняння (1) $y(x, \lambda)$ при $x > 0$ і при всіх $\lambda \in (0, \Lambda)$ має хоча б $l + 1$ нуль. Кожна така множина непорожня і обмежена [7]. Позначимо $\lambda_l = \sup L_l$.

Тепер сформулюємо основний результат.

Теорема. *Нехай виконуються припущення* $\Pi_1 - \Pi_3$, Π_5 *і одне з припущень* Π_{4_i}, $i = 1, 2$. *Тоді*:

1. *Для кожного* $l = 0, 1, 2, \ldots$ *пара* $(\lambda_l, y_l(x))$, *де* $y_l(x) := y(x, \lambda_l)$, *є розв'язком задачі* (1), (2), *причому* $y_l(x)\,y_l'(x) < 0$ *для всіх досить великих значень* x, *і знайдеться* $\gamma_l > 0$ *таке, що*

$$|y_l(x)| + |y_l'(x)| = O(e^{-\gamma_l x}), \qquad x \to \infty.$$

2. *Для кожного* $l = 0, 1, 2, \ldots$ *виконується нерівність* $\lambda_{l+1} < \lambda_l$, *а функція* $y_l(x)$ *має рівно* l *нулів* $(|y(x, \lambda_0)| > 0)$ *на півосі* $(0, \infty)$.

Для доведення теореми нам буде потрібний допоміжний результат.

Твердження. *Нехай виконуються припущення* Π_2, Π_3 *і одне з припущень* Π_{4_i}, $i = 1, 2$. *Якщо при деякому фіксованому* $\lambda > 0$ *рівняння* (1) *має розв'язок* $y(x)$ *зі скінченною кількістю нулів, який задовольняє умову* $V[y(x)] > 0 \quad \forall x > 0$, *то* $y(x)y'(x) < 0$ *для всіх достатньо великих значень* x *і* $|y_l(x)| + |y_l'(x)| \to 0$, $x \to \infty$.

Доведення. Без порушення загальності будемо вважати, що x_0 — останній нуль функції $y(x)$: $y(x_0) = 0$ і $y'(x_0) > 0$. Покажемо, що існує $x_1 > x_0$ таке, що $y'(x_1) = 0$. Нехай, навпаки, це не так. Позначимо $\upsilon := \inf\limits_{x > x_0} y'(x)$ і розглянемо два випадки: $\upsilon > 0$ і $\upsilon = 0$.

Випадок $\upsilon > 0$. Нехай виконується умова Π_{4_1}. Неважко показати, що при виконанні умови

$$\int_{x_0}^{\infty} \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\right\} dx < \infty,$$

яка фігурує в Π_{4_1}, має місце $\int\limits_{x_0}^{\infty} a(x)\,dx = \infty$. Тому з урахуванням рівності

$$V[y(x)] = V[y(x_0)] + \int_{x_0}^{x} V'[y(s)]\,ds =$$

$$= V[y(x_0)] - \int_{x_0}^{x} a(s)y'^2(s)\,ds + \int_{x_0}^{x} \left(b'(s)\int_{0}^{y(s)} f(u)\,du\right) ds \tag{6}$$

отримаємо суперечність з припущенням твердження про додатність $V[y(x)]$:

$$V[y(x)] \le V[y(x_0)] - \upsilon^2 \int_{x_0}^{x} a(s)\,ds \to -\infty, \quad x \to \infty.$$

Нехай тепер виконується умова Π_{4_2}. Доведемо спочатку, що існує таке значення x_*, для якого $y'(x_*) = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\, y(x_*)$. Якщо це не так, тобто $y'(x) > \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\, y(x)$ для всіх $x \ge x_0$, то $y(x) \ge y(\bar{x}) \exp\left\{\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\,(x - \bar{x})\right\}$ для $x \ge \bar{x} > x_0$. На підставі рівняння (1) для всіх значень x, більших $\bar{x}$, має місце оцінка $y''(x) \le \le -b(x) f(y(x)) + \lambda y(x) \le -b(x) f(y(\bar{x}))(y(x)/y(\bar{x}))^\theta + \lambda y(x)$, а тому $y''(x)$ прямує до мінус нескінченності, коли x прямує до нескінченності, оскільки функція $b(x)$ задовольняє умову Π_2. Отримали суперечність з тим, що $y'(x)$ не змінює свій знак.

Отже, існує таке значення x_*, при якому $y'(x_*) = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\, y(x_*)$. Далі, на підставі рівняння (1) для всіх x, більших за x_0, виконується нерівність

$$y'(x) y''(x) = -a(x) y'^2(x) - y'(x) b(x) f(y(x)) + \lambda y(x) y'(x) \le \lambda y(x) y'(x).$$

Інтегруючи її від x_* до x, отримуємо

$$\frac{y'^2(x)}{2} - \frac{y'^2(x_*)}{2} \le \frac{\lambda y^2(x)}{2} - \frac{\lambda y^2(x_*)}{2},$$

а тому

$$\frac{\lambda y^2(x)}{2} - \frac{y'^2(x)}{2} \ge \frac{\lambda y^2(x_*)}{2} - \frac{y'^2(x_*)}{2} = \frac{y'^2(x_*)}{2} \ge \frac{\upsilon^2}{2}.$$

З того, що $V[y(x)] > 0$ для всіх x, більших за нуль, і з (6) випливає

$$V[y(x)] \le V[y(x_*)] + \int_{x_*}^{x} \left(b'(s) \int_0^{y(s)} f(u)\,du \right) ds <$$

$$< V[y(x_*)] + \int_{x_*}^{x} \frac{b'(s)}{b(s)} \left(\frac{\lambda y^2(s)}{2} - \frac{y'^2(s)}{2} \right) ds \le$$

$$\le V[y(x_*)] + \frac{\upsilon^2}{2} (\ln b(x) - \ln b(x_*)) \to -\infty, \quad x \to \infty,$$

оскільки $b(x)$ прямує до нуля, коли x прямує до нескінченності, якщо виконується умова Π_{4_2}. Таким чином, випадок, коли $\upsilon > 0$, неможливий.

У випадку $\upsilon = 0$, міркуючи, як і в [7], доводимо існування такого $\bar{x} > x_0$, що

$$y(x) > \eta_+(x, \lambda), \quad b(x) f(y(x)) - \lambda y(x) > 0, \quad x \ge \bar{x} > x_0, \tag{7}$$

звідки випливає нерівність $y''(x) \le -b(x) f(y(x)) + \lambda y(x) < 0$. Отже, функція $y'(x)$ монотонно спадає до нуля, коли x прямує до нескінченності.

Нехай виконується умова Π_{4_1}. Тоді з (7) випливає нерівність $y''(x) + + a(x) y'(x) < 0$ для $x \ge \bar{x} > x_0$. Проінтегрувавши її двічі, отримаємо

$$y(x) \le y'(\tilde{x})\int_{\tilde{x}}^{x} \exp\left\{-\int_{\tilde{x}}^{s} a(u)du\right\} ds + y(\tilde{x}). \tag{8}$$

Отже, функція $y(x)$ обмежена на півосі для всіх x, більших за $\tilde{x}$. А тому $\lim_{x\to\infty} y(x) = y^* < \infty$ і з урахуванням (1) маємо

$$\lim_{x\to\infty} y''(x) = \lim_{x\to\infty} \left(-a(x)y'(x) - b(x)f(y(x)) + \lambda y(x)\right) = -b_\infty f(y^*) + \lambda y^*,$$

де $b_\infty = \lim_{x\to\infty} b(x)$. Якщо б $\lim_{x\to\infty} y''(x) \ne 0$, то $y'(x) \to \pm\infty$, $x \to \infty$, і ми б отримали суперечність. Тому $\lim_{x\to\infty} y''(x) = 0$, а отже, функції $y(x, \lambda)$ та $\eta_+(x, \lambda)$ мають одну і ту саму границю y^* при $x \to \infty$. Але тоді маємо нерівність

$$V[y(x)] := \frac{y'^2(x)}{2} + \int_0^{y(x)} (b(x)f(s) - \lambda s) ds \to$$

$$\to \int_0^{y^*} (b_\infty f(s) - \lambda s) ds = \int_0^{\eta_+(\infty,\lambda)} (b_\infty f(s) - \lambda s) ds < 0, \tag{9}$$

яка суперечить припущенню про те, що функція $V[y(x)]$ не змінює свій знак.

Нехай тепер виконується умова Π_{4_2}. Тоді, міркуючи, як і у випадку $\upsilon > 0$, знову переконуємось у тому, що $V[y(x)] \to -\infty$, $x \to \infty$.

Таким чином, ми довели існування точки $x_1 > x_0$, в якій $y'(x_1) = 0$. Крім того, не може існувати точки $x_2 > x_1$. такої, що $y'(x_2) = 0$, оскільки в цьому випадку $y''(x_2) \ge 0$, $b(x_2)f(y(x_2)) - \lambda y(x_2) \le 0$, і тому $V[y(x_2)] \le 0$. Отже, $y'(x) < 0 \quad \forall x > x_1$, а тому існує $\lim_{x\to\infty} y(x) = y^* \ge 0$. Оскільки

$$\frac{d}{dx}\left(b(x)\int_0^{y(x)} f(s)ds\right) = y'(x)b(x)f(y(x)) + b'(x)\int_0^{y(x)} f(s)ds \le 0$$

і функція $V[y(x)]$ має невід'ємну границю, то має границю і функція $y'(x)$, тому $\lim_{x\to\infty} y'(x) = 0$. Якщо $y^* \ne 0$, то знову переконуємось, що функції $y(x, \lambda)$ та $\eta_+(x, \lambda)$ мають одну і ту саму границю y^*, коли x прямує до нескінченності, і з урахуванням (9) отримуємо суперечність, яка і доводить твердження.

Доведення основної теореми. На підставі доведеного твердження перший пункт теореми є частинним випадком теореми 1 [7]. Зупинимось детальніше на доведенні другої частини. Нехай m — довільне невід'ємне ціле число. Відомо, що $l+1$ нуль $x_{l+1}(\lambda)$ функції $y(x, \lambda)$ прямує до нескінченності, коли $\lambda \to \lambda_l - 0$ [7]. Тому існує таке ціле число $k \in [1, l+1]$, що $\limsup_{\lambda\to\lambda_l-0} x_k(\lambda) = \infty$ і, якщо $k > 1$, $\limsup_{\lambda\to\lambda_l-0} x_{k-1}(\lambda) < \infty$. Покажемо, що можна вибрати таке $\lambda < \lambda_l$, що функція $y(x, \lambda)$ має тільки k нулів. Зрозуміло, що це можливо лише при $k = l+1$ і, таким чином, $\lambda_{l+1} < \lambda_l$.

Нехай $\{\lambda^{(i)}\}$, $i = 1, 2, \ldots$, — така послідовність, що $\lambda^{(i)} \to \lambda_m - 0$ і $x_k(\lambda^{(i)}) \to \infty$ при $i \to \infty$. Припустимо, міркуючи від супротивного, що для кожного натурального i функція $y(x, \lambda^{(i)})$ має нуль $x_{k+1}(\lambda^{(i)}) > x_k(\lambda^{(i)})$. Не порушуючи загальності, вважаємо, що

$$y(x, \lambda^{(i)}) > 0 \quad \forall x \in (x_k(\lambda^{(i)}), x_{k+1}(\lambda^{(i)})).$$

При цих припущеннях покажемо, що для досить великих значень i функція $V[y(x, \lambda^{(i)})]$ на інтервалі $(x_k(\lambda^{(i)}), x_{k+1}(\lambda^{(i)}))$ набуває від'ємних значень, що й приведе нас до суперечності: адже на підставі припущень Π_2, Π_3 $V[y(x, \lambda^{(i)})]$ не зростає, а в точках $x_k(\lambda^{(i)})$, де $y(x, \lambda^{(i)})$ дорівнює нулю, ця функція додатна:

$$V[y(x_k(\lambda^{(i)}))] = \frac{y'^2(x_k(\lambda^{(i)}))}{2} > 0.$$

Повторюючи схему міркувань роботи [7], вибираємо числа $R > 0$, $\delta > 0$ так, щоб $\delta < |\eta_\pm(R, \lambda_l)|$ і $b(R)\int\limits_0^y f(s)\,ds < \frac{\lambda_l y^2}{4}$ при всіх $y \in (-\delta, \delta)$, і встановлюємо оцінку

$$|y'(x_k(\lambda^{(i)}), \lambda^{(i)})| \le K_\delta \exp\{-\gamma_l x_k(\lambda^{(i)})\}, \tag{10}$$

в якій K_δ, γ_l — додатні сталі. З огляду на (10) для всіх досить великих значень i виконується оцінка $0 < y'(x_k(\lambda^{(i)})) < \frac{\eta_+(R, \lambda^{(i)})}{2}$.

Надалі, для спрощення позначень, там, де це не викликатиме непорозумінь, будемо писати λ замість $\lambda^{(i)}$.

На інтервалі $(x_k(\lambda), x_{k+1}(\lambda))$ буде існувати найближче до $x_k(\lambda)$ значення $x = x^*(\lambda) \in (x_k(\lambda), x_{k+1}(\lambda))$, для якого $y(x, \lambda) = \eta_+(x, \lambda)\big|_{x = x^*(\lambda)}$. Позначимо через $x_*(\lambda)$ таке значення $x > x_k(\lambda)$, що $y(x, \lambda) = \frac{\eta_+(x, \lambda)}{2}\Big|_{x = x_*(\lambda)}$ і $y(x, \lambda) > \frac{\eta_+(x_*(\lambda), \lambda)}{2}$ $\forall x \in (x_*(\lambda), x^*(\lambda))$. Знайдемо оцінки для $x^*(\lambda)$ та $x_*(\lambda)$. Скориставшись монотонністю функції $V[y(x, \lambda)]$, одержимо

$$V[y(x, \lambda)] = \frac{y'^2(x, \lambda)}{2} - \frac{\lambda y^2(x, \lambda)}{2} + b(x)\int\limits_0^{y(x,\lambda)} f(s)\,ds \le$$

$$\le V[y(x_k(\lambda), \lambda)] < \frac{\eta_+^2(R, \lambda)}{2} \quad \forall x > x_k(\lambda).$$

Тоді

$$\frac{y'^2(x, \lambda)}{2} < \frac{\eta_+(R, \lambda)}{4} + \frac{\lambda y^2(x, \lambda)}{2} < \left(\frac{1 + 2\lambda}{2}\right)\frac{y^2(x, \lambda)}{2},$$

і тому $y'(x, \lambda) < \sqrt{\frac{1 + 2\lambda}{2}}\,\eta_+(x, \lambda)$ $\forall x \in (x_k(\lambda), x^*(\lambda))$. Звідси, оскільки функція $\eta_+(x, \lambda)$ неспадна щодо x, маємо

$$\frac{\eta_+(x^*(\lambda), \lambda)}{2} \le y(x^*(\lambda), \lambda) - y(x_*(\lambda), \lambda) \le$$

$$\le \sqrt{\frac{2\lambda + 1}{2}}\, \eta_+(x^*(\lambda), \lambda)(x^*(\lambda) - x_*(\lambda)),$$

а отже,

$$x^*(\lambda) - x_*(\lambda) \ge \frac{1}{\sqrt{2 + 4\lambda}}. \tag{11}$$

Відмітимо, що будь-якого $x \in [x_*(\lambda), x^*(\lambda)]$ внаслідок того, що при фіксованих x і λ функція $\sqrt{\frac{\lambda y^2}{2} - b(x)\int_0^y f(s)ds}$ опукла вгору і виконується припущення Π_3, мають місце нерівності

$$y'(x, \lambda) > \sqrt{\lambda y^2(x, \lambda) - 2b(x)\int_0^{y(x,\lambda)} f(s)ds} \ge$$

$$\ge \frac{\sqrt{\lambda \eta_+^2(x, \lambda) - 2b(x)\int_0^{\eta_+(x,\lambda)} f(s)ds}}{\eta_+(x, \lambda)}\, y(x, \lambda) \ge$$

$$\ge \frac{\sqrt{\lambda \eta_+^2(x, \lambda) - \frac{2b(x)}{\theta}\int_0^{\eta_+(x,\lambda)} f'(s)ds}}{\eta_+(x, \lambda)}\, y(x, \lambda) = \sqrt{\frac{\lambda(\theta - 1)}{\theta}}\, y(x, \lambda). \tag{12}$$

Тепер, як і при доведенні твердження 8 [7], одержуємо оцінку

$$x^*(\lambda) \le x_k(\lambda) + \exp\left\{\sqrt{\frac{\lambda(\theta - 1)}{\theta}} \sup_{x \ge R} a(x)\right\} +$$

$$+ \sqrt{\frac{\lambda(\theta - 1)}{\theta}}\left[\ln \eta_+(x^*(\lambda), \lambda) - \ln y'(x_k(\lambda), \lambda)\right]. \tag{13}$$

Оскільки $\eta_+(x, \lambda) = O([\lambda / b(x)]^{1/(\theta - 1)})$, а функція $b(x)$ задовольняє умову Π_2, то $|\ln \eta_+(x, \lambda)| = o(x^*(\lambda))$ при $\lambda = \lambda^{(i)}$, $i \to \infty$. Тому наслідком (13) є співвідношення

$$x^*(\lambda) = O(x_k(\lambda) - \ln y'(x_k(\lambda), \lambda)). \tag{14}$$

Тепер, враховуючи (6), (11), (12), маємо

$$V[y(x^*(\lambda), \lambda)] \le V[y(x_*(\lambda), \lambda)] - \int_{x_*(\lambda)}^{x^*(\lambda)} a(s) y'^2(s, \lambda) ds \le$$

$$\le \frac{y'^2(x_k(\lambda), \lambda)}{2} - \frac{\lambda(\theta - 1)}{\theta}\frac{\eta_+^2(R, \lambda)}{4} \inf_{x_k(\lambda) < x < x^*(\lambda)} a(x) \frac{1}{\sqrt{2 + 4\lambda}}. \tag{15}$$

Якщо $a(x)$ задовольняє першу умову Π_5, то для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться стала $c_\varepsilon > 0$ така, що $a(x) \ge c_\varepsilon e^{-2\varepsilon x}$, а тому, вибравши ε досить малим та врахувавши (14), дістанемо

$$a(x) \geq c_\varepsilon [y'(x_k(\lambda), \lambda)]^\varepsilon e^{-\varepsilon x_k(\lambda)} \qquad \forall x \in [x_k(\lambda), x^*(\lambda)].$$

Тепер очевидно, що при $\varepsilon < \min(1, \gamma_l)$ з (15) випливає нерівність $V[y(x^*(\lambda), \lambda)] < 0$ при $\lambda = \lambda^{(i)}$ і досить великому i.

Випадок, коли виконується друга умова Π_5, з урахуванням оцінки

$$V[y(x^*(\lambda^{(i)}), \lambda^{(i)})] \leq V[y(x_*(\lambda^{(i)}), \lambda^{(i)})] + \int\limits_{x_*(\lambda^{(i)})}^{x^*(\lambda^{(i)})} b'(s) \int\limits_0^{y(s,\lambda^{(i)})} f(u)\,du\,ds \leq$$

$$\leq \frac{y'^2(x_k(\lambda^{(i)}), \lambda^{(i)})}{2} + \int\limits_0^{\eta_+(R,\lambda^{(i)})/2} f(u)\,du \left\{ \sup_{x_k(\lambda^{(i)}) < x < x^*(\lambda^{(i)})} b'(x) \right\} (x^*(\lambda^{(i)} - x_*(\lambda^{(i)}))$$

розглядається аналогічно.

Теорему доведено.

1. *Fushchich W. I., Serov N. I.* On some exact solutions of three-dimensional nonlinear Schrödinger equation // J. Phys. A.: Math. En. – 1987. – № 20. – P. 929 – 933.
2. *Кигурадзе И. Т., Шехтер Б. Л.* Сингулярные краевые задачи для ОДУ второго порядка // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения / ВИНИТИ. – 1987. – **30**. – С. 105 – 201.
3. *Zhidkov P. E., Sakbaev V. Zh.* On a nonlinear ordinary differential equation // Math. Notes. – 1994. – **55**, № 4. – P. 351 – 357.
4. *Cheng Sh., Zhang Y.* Singular boundary value problems on a half-line // J. Math. Anal. and Appl. – 1995. – **195**, № 2. – P. 449 – 468.
5. *O'Regan D.* Singular nonlinear differential equations on the half line // Topol. Methods Nonlinear Anal. – 1996. – № 1. – P. 137 – 159.
6. *Позур С. В., Процак Л. В.* Сингулярна крайова задача на власні значення для рівняння Емдена – Фаулера. Існування розв'язку з заданою кількістю нулів // Вісн. Київ. ун-ту. Математика, механіка. – 2000. – № 5. – С. 34 – 39.
7. *Parasyuk I. O., Pozur S. V.* Singular nonlinear eigenvalue problem for second order differential equation with energy dissipation // Nonlinear Oscillation. – 2002. – **5**, № 3. – P. 346 – 368.
8. *Cecchi M., Marini M., Villari G.* Comparison results for oscillation of nonlinear differential equations // Nonlinear Different. Equat. and Appl. – 1999. – № 6. – P. 173 – 190.

Одержано 23.01.2003