УДК 519.21

Г. М. Шевченко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО БАГАТОВИМІРНІ УЗАГАЛЬНЕНІ ДИФУЗІЙНІ ПРОЦЕСИ*

We construct a multidimensional generalized diffusion process with a drift coefficient that is a (generalized) derivative with respect to the volume of a vector-valued measure satisfying an analog of the Hölder condition. We prove the existence and continuity of the density of transition probability of this process. We obtain standard estimates for this density. We also prove that the trajectories of the process are solutions of a stochastic differential equation.

Побудовано багатовимірний узагальнений дифузійний процес з коефіцієнтом переносу, що є похідною (в узагальненому сенсі) по об'єму від векторної міри, яка задовольняє аналог умови Гельдера. Доведено існування і неперервність щільності ймовірності переходу цього процесу. Для цієї щільності отримано стандартні оцінки. Також доведено, що траєкторії процесу є розв'язками стохатичного диференціального рівняння.

Вступ. Поняття узагальненого дифузійного процесу введено М. І. Портенком. У таких процесів, на відміну від звичайних дифузійних, локальними характеристиками можуть бути необмежені, розривні і навіть узагальнені функції. Відомо, наприклад, що переносом d-вимірного однорідного дифузійного процесу може бути функція, що належить класу L^p_{loc}, $p > d$. У працях [1–3] побудовано узагальнені дифузійні процеси з переносом, що є зосередженою на гіперповерхні дельта-функцією. У статті [4] побудовано одновимірний однорідний узагальнений дифузійний процес з переносом, що є похідною від функції, варіація якої задовольняє умову Гельдера. Метою даної роботи є узагальнення цього результату на багатовимірний випадок. Узагальнений коефіцієнт переносу B у даному випадку є „похідною по об'єму" від $\mathbb{R}^d$-значної міри υ, тобто узагальненою ($\mathbb{R}^d$-значною) функцією, дія якої визначається таким чином: $\langle B, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\upsilon(dx)$, $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^d)$. Припускається, що міра υ задовольняє при певному $\alpha \in (1 - 1/d, 1]$ локальну умову Гельдера

$$\exists C > 0 \quad \exists R > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad \forall r < R : |\upsilon|(B(x, r)) < C(\mathrm{vol}(B(x, r)))^{\alpha}, \qquad (1)$$

де $|\upsilon|$ — варіація міри, $B(x, r)$ — куля, vol — об'єм (міра Лебега) в $\mathbb{R}^d$. Прикладами переносів, що породжуються подібними мірами, є функції з L^p_{loc}, $p > d$, або узагальнена похідна від „канторових сходів" в одновимірному випадку. Крім того, припускається, що матриця дифузії $b(x)$ є рівномірно невиродженою і обмеженою та задовольняє за змінною x умову Гельдера (це достатні умови; необхідні умови описано нижче).

Для побудови процесу використовуються отримані евристичними міркуваннями рівняння (пряме і обернене рівняння Колмогорова) для щільності ймовірності переходу:

$$g(t, x, y) = g_0(t, x, y) + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} g_0(t-\tau, x, z)(\nabla_z g(\tau, z, y), \upsilon(dz)), \quad t > 0, \quad x, y \in \mathbb{R}^d, \qquad (2а)$$

$$g(t, x, y) = g_0(t, x, y) + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}} g(t-\tau, x, z)(\nabla_z g_0(\tau, z, y), \upsilon(dz)), \quad t > 0, \quad x, y \in \mathbb{R}^d, \qquad (2б)$$

* Частково підтримано Міністерством освіти і науки України (проект № 01.07/103).

де g_0 — щільність ймовірності переходу дифузійного процесу без переносу і з матрицею дифузії $b(x)$.

1. Побудова процесу. Припустимо, що $\mathbb{R}^d$-значна міра υ задовольняє умову (1), а матриця дифузії b така, що щільність ймовірності переходу $g_0(t, x, y)$, $t > 0$, x, $y \in \mathbb{R}^d$, відповідного дифузійного процесу без переносу задовольняє умови:

1) функції g_0, $\nabla_x g_0$ є неперервними за сукупністю змінних;

2) $\forall T > 0 \quad \exists L > 0 \quad \exists \mu > 0 \quad \forall t \in (0, T), \quad x, \ y \in \mathbb{R}^d$:

$$g_0(t, x, y) < \frac{L}{t^{d/2}} \exp\left\{-\mu \frac{|x-y|^2}{t}\right\},$$

$$\left|\nabla_x g_0(t, x, y)\right| \leq \frac{L}{t^{(d+1)/2}} \exp\left\{-\mu \frac{|x-y|^2}{t}\right\}.$$

Ці умови виконуються, наприклад, для рівномірно невиродженої і обмеженої матриці дифузії $b(x)$, що задовольняє за змінною x умову Гельдера (див., наприклад, [5]).

За описаних умов рівняння (2б) вдається розв'язати методом послідовних наближень.

Твердження 1. *Рівняння* (2б) *має розв'язок* g, *причому функція* g *задовольняє умови* 1, 2 *і є розв'язком рівняння* (2а).

***Зауваження* 1.** Константи, з якими функція g задовольняє умови 1, 2, залежать лише від C, T, L, α, μ.

Доведення цього твердження аналогічне доведенням тверджень 1, 2 з [4]. Основним фактом, що використовується у цьому і подальших доведеннях, є така лема.

Лема 1. *Для всіх* $c > 0$, $b \in \mathbb{R}^d$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left\{-p|x-b|^2\right\} \upsilon(dx) \right| \leq K(p, d, R) C p^{-d\alpha/2},$$

де $K(p, d, R)$ *не зростає по* p *і не залежить від* υ, b, C, α.

Доведення. Зауважимо, що з умови (1) випливає умова

$$\forall r > 0 \quad \exists M(d, R, r) > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d \colon |\upsilon|\left(B(x, r) \leq M(d, R, r) C \operatorname{vol}\left(B(x, r)\right)\right)^{\alpha},$$

де $M(d, R, r)$ не спадає по r і не залежить від υ, C, α (це найменша кількість куль радіуса R, якими можна покрити кулю радіуса r). Тоді в інтегралі, що оцінюється, область інтегрування розбивається на куби зі стороною $1/\sqrt{p}$. Кожен такий куб можна покрити $N(d)$ кулями радіуса $1/\sqrt{p}$, тому маємо

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left\{-p|x-b|^2\right\} \upsilon(dx) \right| \leq$$

$$\leq CN(d) M\left(d, R, \frac{1}{\sqrt{p}}\right) \sum_{k_1, \ldots, k_d = 0}^{\infty} \exp\left\{-\sum_{i=1}^{d} k_i^2\right\} p^{-d\alpha/2} = K(p, d, R) C p^{-d\alpha/2}. \qquad (3)$$

Лему доведено.

Для того щоб довести, що побудований розв'язок є щільністю ймовірності переходу певного процесу Маркова, нам знадобиться гранична теорема. Припустимо, що ми маємо послідовність $\mathbb{R}^d$-значних мір $\{\upsilon^k, k \geq 1\}$. Для них можна записати рівняння, аналогічні до (2б):

$$g^{(k)}(t, x, y) = g_0(t, x, y) +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}} g^{(k)}(t-\tau, x, z)(\nabla_z g_0(\tau, z, y), \upsilon^k(dz)), \quad t > 0, \quad x, y \in \mathbb{R}^d. \tag{4}$$

Позначимо символом $\xrightarrow{C_0'}$ збіжність у класі функціоналів на $C_0(\mathbb{R}^d)$.

Твердження 2. *Нехай міри υ^k задовольняють умову* (1) *з одними і тими самими константами* α, C, R *і* $\upsilon^k \xrightarrow{C_0'} \upsilon$. *Тоді відповідні розв'язки* $g^{(k)}$ *рівнянь* (4) *збігаються при* $k \to \infty$ *до* g.

Доведення аналогічне доведенню твердження 3 з [4] з заміною $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^d$.

Візьмемо тепер невід'ємну нескінченно диференційовну функцію ψ, рівну нулю поза одиничною кулею і таку, що $\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)dx = 1$. Покладемо $B_k(x) = \int_{\mathbb{R}^d} k\psi(k(x-y))\upsilon(dy)$, $k \leq 1$, $\upsilon^k(dx) = B_k(x)dx$. Зауважимо, що розв'язки (4) будуть у цьому випадку щільностями ймовірності переходу для звичайних дифузійних процесів. Міри υ^k збігаються до υ:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\upsilon^k(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \int_{\mathbb{R}^d} k\psi(k(x-y))\upsilon(dy)dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)k\psi(k(x-y))dx\upsilon(dy) \to \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\upsilon(dx), \quad \varphi \in C_0(\mathbb{R}^d).$$

Також очевидним є виконання умови (1) для мір υ^k:

$$|\upsilon^k|(B(a,r)) =$$

$$= \int_{B(a,r)} \left| \int_{\mathbb{R}^d} k\psi(k(x-y))\upsilon(dy) \right| dx \leq \{D = B(a,r) \setminus B(a, r-1/k)\}$$

$$\left(\int_{B(a,r-1/k)} + \int_D \right) \int_{\mathbb{R}^d} k\psi(k(x-y))|\upsilon|(dy)dx \leq$$

$$\leq \int_{B(a,r-1/k)} \int_{|x-y|<1/k} k\psi(k(x-y))|\upsilon|(dy)dx + \int_D \int_{|x-y|<1/k} k\|\psi\||\upsilon|(dy)dx \leq$$

$$\leq \int_{B(a,r)} |\upsilon|(dy) \int_{B(a,r)} \mathbb{1}_{|x-y|<1/k} k\psi(k(x-y))dx + \text{const} \int_D k(1/k)^\alpha dx \leq$$

$$\leq \int_{B(a,r)} |\upsilon|(dy) + \text{const}\, r^{d-1}(1/k)^\alpha \leq \{\alpha > 1 - 1/d\},$$

$$\text{const}\, r^{d\alpha} = \text{const vol}\,(B(a,r))^\alpha$$

(const — певні не залежні від k константи). Це дає можливість застосувати попереднє твердження і довести поточкову збіжність $g^{(k)} \to g$. Але, як зазначено раніше, $g^{(k)}$ є щільностями ймовірності переходу, а із зауваження 1 випливає їх рівномірна інтегровність. Тому є правильним таке твердження.

Твердження 3. *Побудований у твердженні 1 розв'язок рівняння* (2б) *є щільністю ймовірності переходу певного процесу Маркова* $\xi(t)$.

Зауваження 2. Завдяки оцінкам для щільності ймовірності переходу можна вважати, що процес $\xi(t)$ має майже напевно неперервні траєкторії. Позначимо через T_t, $t > 0$, напівгрупу, що відповідає цьому процесові, а через $\mathbb{E}_x$, $x \in \mathbb{R}^d$, математичне сподівання за умови, що процес $\xi(t)$ стартує з точки x.

Зауважимо, що з умов 1, 2 випливає слабка компактність мір, що відповідають процесам, побудованим за рівняннями (4), а з поточкової збіжності щільностей і їх рівномірної інтегровності — збіжність скінченновимірних розподілів. Це означає, що має місце слабка збіжність мір, що відповідають процесам. Можна стверджувати навіть дещо більше.

Твердження 4. *Нехай міри* v^k *задовольняють умову* (1) *з одними і тими самими константами* α, C, R *і* $v^k \xrightarrow{C_0'} v$, *а* $\xi_n(t)$ — *узагальнені дифузійні процеси з переносом* dv_n/dx *і матрицею дифузії* b. *Тоді має місце слабка збіжність* $\xi_n(t) \xrightarrow{w} \xi(t)$.

Для того щоб це твердження було повністю справедливим, потрібно довести, що процес $\xi(t)$ є узагальненим дифузійним процесом з переносом dv/dx та матрицею дифузії b. Наступне твердження обґрунтовується аналогічно до [4].

Твердження 5. *Для будь-якої функції* $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^d)$

$$\forall \delta > 0 \qquad \lim_{t\to 0+} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}} g(t,x,y)|x-y|^{2+\delta}\,dy = 0,$$

$$\lim_{t\to 0+} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\left[\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^d} g(t,x,y)(y-x)\,dy\right]dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)V(dx),$$

$$\lim_{t\to 0+} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\left[\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^d} g(t,x,y)(y-x,\theta)^2\,dy\right]dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(z)\,(\,b(z)\theta,\theta)\,dz,$$

де $\theta \in \mathbb{R}^d$ — *довільний вектор.*

2. Стохастичне диференціальне рівняння. У цьому пункті ми доведемо, що траєкторії процесу $\xi(t)$ є розв'язками стохастичного диференціального рівняння

$$d\xi(t) = \frac{dv}{dx}(\xi(t))\,dt + b^{1/2}(\xi(t))\,dw(t). \tag{5}$$

Для цього скористаємося технікою W-функціоналів Динкіна (див. [5]).

Позначимо через v_i i-ту координату міри v, $v_i = v_i^+ - v_i^-$ — її розклад Гана. Покладемо

$$f_i^\sigma(t,x) = \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} g(s,x,y)v_i^\sigma(dy), \qquad i = 1,\dots,d, \quad \sigma \in \{+,-\}.$$

Як і в [4], з використанням леми 1 і напівгрупової властивості можна довести такі властивості функцій $f_i^\pm(t,x)$:

1) $f_i^\pm(t,x)$ невід'ємні та неперервні при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$;

2) $f_i^\pm(t,x) \le K_T t^{d\alpha/2 - d/2 + 1}$, $\quad t \in [0,T]$, $\quad x \in \mathbb{R}^d$;

3) $T_s f_i^{\pm}(t,\cdot) = f_i^{\pm}(t+s,\cdot) - f_i^{\pm}(s,\cdot)$.

Звідси випливає, що функції $f_i^{\pm}(t,x)$ є W-функціями (в сенсі Динкіна) і тому існують неперервні монотонні адитивні однорідні функціонали $\eta_i^{\pm}(t)$ такі, що

$$E_x \eta_i^{\pm}(t) = f_i^{\pm}(t,x) \quad \text{та} \quad \eta_i^{\pm}(t) = \underset{h\to 0+}{\mathrm{l.i.m}} \frac{1}{h}\int_0^t f_i^{\pm}(h,\xi(s))\,ds. \tag{6}$$

Це означає, що процес

$$\eta(t) = \sum_{i=1}^{d} \eta_i^{+}(t) - \eta_i^{-}(t)$$

має неперервні траєкторії обмеженої варіації. Формула (6) дозволяє записати

$$\eta(t) = \int_0^t \frac{dv}{dx}(\xi(s))\,ds.$$

Звідси видно, що процес $\xi(t)$ буде розв'язком (5) тоді, коли процес $\zeta(t) = \xi(t) - \xi(0) - \eta(t)$ буде мартингалом з характеристикою $\int_0^t b(\xi(s))\,ds$. Але процес $\xi(t)$ є однорідним процесом Маркова, тому достатньо довести таке твердження.

Твердження 6. *Для всіх* $t > 0$, $x, \theta \in \mathbb{R}^d$

$$\mathbb{E}_x \zeta(t) = \mathbb{E}_x(\zeta(t),\theta)^2 - \int_0^t (b(\xi(s))\theta,\theta)\,ds = 0.$$

Доведення. Стосовно першої частини твердження

$$\mathbb{E}_x(\xi(t)-\xi(0)) = \int_{\mathbb{R}} (y-x) g(t,x,y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} (y-x) g_0(t,x,y)\,dy +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} g(\tau,x,z)(\nabla_z g_0(t-\tau,z,y), v(dz))(y-x)\,dy =$$

$$= \sum_{i=1}^{d} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} g(\tau,x,z) v_i(dz) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial g_0(t-\tau,z,y)}{\partial z_i}(y-x)\,dy =$$

$$= \sum_{i=1}^{d} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} g(\tau,x,z) v_i(dz) = \mathbb{E}_x \eta(t).$$

Перейдемо до другої частини твердження. Запишемо

$$\mathbb{E}_x(\zeta(t),\theta)^2 = \mathbb{E}_x(\xi(t)-\xi(0),\theta)^2 + \mathbb{E}_x(\eta(t),\theta)^2 - 2\mathbb{E}_x(\xi(t)-\xi(0),\theta)(\eta(t),\theta).$$

Щільність g_0 відповідає дифузійному процесу з хорошими коефіцієнтами, тому

$$\int_{\mathbb{R}^d} g_0(t,z,y)(y-x,\theta)^2\,dy = (z-x,\theta)^2 + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} g_0(s,z,y)(b(y)\theta,\theta)\,dy,$$

і цю рівність можна диференціювати по z завдяки оцінкам для g_0. Тоді, використовуючи рівняння (2б), отримуємо

$$\mathbb{E}_x(\xi(t)-\xi(0),\theta)^2 =$$

$$= \mathbb{E}_x\int_0^t (b(\xi(s))\theta,\theta)\,ds + 2\int_0^t ds\int_{\mathbb{R}^d} g(s,x,y)(y-x,\theta)(\theta,\upsilon(dy)).$$

Далі, розкладаючи

$$\mathbb{E}_x(\xi(t)-\xi(0),\theta)(\eta(t),\theta) =$$

$$= \mathbb{E}_x\int_0^t (\xi(t)-\xi(s),\theta)(\theta,d\eta(s)) + \mathbb{E}_x\int_0^t (\xi(s)-\xi(0),\theta)(\theta,d\eta(s)),$$

аналогічно тому, як це зроблено в [4], доводимо, що

$$\mathbb{E}_x\int_0^t (\xi(t)-\xi(s),\theta)(\theta,d\eta(s)) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_x(\eta(t),\theta)^2,$$

$$\mathbb{E}_x\int_0^t (\xi(s)-\xi(0),\theta)(\theta,d\eta(s)) = \int_0^t ds\int_{\mathbb{R}^d} g(s,x,y)(y-x,\theta)(\theta,\upsilon(dy)).$$

Додаючи отримані результати, маємо

$$\mathbb{E}_x(\zeta(t),\theta)^2 = \int_0^t (b(\xi(s))\theta,\theta)\,ds,$$

що і потрібно було довести.

1. *Портенко Н. И.* Обобщенные диффузионные процессы. – Киев: Наук. думка, 1982. – 208 с.
2. *Портенко М. І.* Дифузія в середовищах з напівпрозорими мембранами. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1994. – 136 с.
3. *Портенко М. І.* Процеси дифузії в середовищах з мембранами. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1995. – 200 с.
4. *Shevchenko G. M.* On a generalized diffusion process with a drift that is the generalized derivative of a singular function // Probab. Theory and Math. Statist.: Proc. Ukr. Math. Congr. – 2001. – Kyiv: Inst. Math. NAS Ukraine, 2002. – P. 139 – 148.
5. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы. – М.: Физматлит., 1963. – 860 с.

Одержано 19.08.2002