УДК 517.9

И. П. Мельниченко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

АЛГЕБРЫ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЙ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

In commutative associative third rank algebras with the principal identity over the complex field, we distinguish bases such that hypercomplex monogenic functions constructed in these bases have components satisfying the three-dimensional Laplace equation. The concept of monogeneity of these functions is similar to the concept of monogeneity in the complex plane.

У комутативних, асоціативних третього рангу алгебрах із головною одиницею над комплексним полем виділено такі базиси, що гіперкомплексні моногенні функції, побудовані в цих базисах, мають компоненти, що задовольняють тривимірне рівняння Лапласа. Поняття моногенності для цих функцій аналогічне поняттю моногенності в комплексній площині.

Понятие функционально-инвариантных решений линейных уравнений математической физики было введено В. И. Смирновым и С. Л. Соболевым при общей постановке вопроса о возможности распространения на многомерные случаи средств и способов, используемых при решении двумерных задач. Эффективность построения решений волнового уравнения

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

и двумерного уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

основывается, в частности, на том обстоятельстве, что любая дважды дифференцируемая функция от решений-характеристик $t + ax$ и $t - x$ уравнения (1), а в случае уравнения (2) — любая аналитическая функция от $x + iy$ также удовлетворяют этим уравнениям. Строящиеся таким путем решения для конкретных задач математической физики были названы функционально-инвариантными и применены в теоретической сейсмологии при изучении дифракции волн, описываемых уравнением [1, с. 122 – 129]

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Сходная постановка вопроса о возможности построения для решения пространственных задач методов, которые по сути являлись бы аналогичными методам теории аналитических функций, была высказана М. А. Лаврентьевым в связи с задачей о кумулятивном заряде и распространена затем на другие задачи, связанные с описанием пространственных потенциальных гидродинамических течений [2, с. 210]. А в целом, вне зависимости от чисто прикладных вопросов, многообразие, унифицированность и продуктивность методов теории аналитических функций комплексного переменного уже давно наталкивают на поиск аналогичных методов. В этом направлении исследовались разные пути. Ниже рассматривается метод построения функционально-инвариантных решений в смысле Смирнова – Соболева для трехмерного уравнения Лапласа.

1. Гармонические алгебры третьего ранга. Пусть $\mathbf{A}$ — ассоциативная, коммутативная, с главной единицей банахова алгебра третьего ранга с базисом $\{e_1, e_2, e_3\}$, заданная над комплексным полем $\mathbb{C}$. Выделим в $\mathbf{A}$ действительное подпространство $\mathbf{A}_{\mathbb{R}}$, натянутое на e_1, e_2, e_3. Для точек $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

определим гиперкомплексную переменную ζ с помощью соответствия $\mathbb{R}^3 \to \to \mathbf{A}_{\mathbb{R}}$ так, что точке (x, y, z) соответствует точка $\zeta := xe_1 + ye_2 + ze_3$.

Пусть D — область в $\mathbf{A}_{\mathbb{R}}$. Рассмотрим функции $f\colon D \to \mathbf{A}$, задаваемые разложением

$$f(\zeta) = \sum_{k=1}^{3} f_k(x, y, z)e_k, \quad f_k \in \mathbb{C}, \tag{3}$$

и определим в точке $\zeta \in D$ производную $f'(\zeta)$ функции $f(\zeta)$ по переменной ζ следующим образом. Функция $f(\zeta)$, определенная в некоторой окрестности точки ζ, имеет производную $f'(\zeta)$ в этой точке, если для произвольного $h = \sum_{k=1}^{3} h_k e_k$, где $h_k \in \mathbb{R}$, выполняется равенство

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} [f(\zeta + \varepsilon h) - f(\zeta)]\varepsilon^{-1} = hf'(\zeta). \tag{4}$$

Отметим, что определение производной $f'(\zeta)$ с помощью предельного перехода (4), если h не является делителем нуля, ничем не отличается от обычного определения производной для моногенных функций

$$\lim_{(\varepsilon h) \to 0} [f(\zeta + \varepsilon h) - f(\zeta)](\varepsilon h)^{-1} = f'(\zeta). \tag{5}$$

Значения $f'(\zeta)$, вычисленные по формулам (4) и (5), при этом совпадают. Однако формула (4), в отличие от формулы (5), имеет также смысл и когда h — необратимый элемент.

Полагая $h = e_1 = 1$, из (4), как и в комплексной плоскости, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'(\zeta), \tag{6}$$

а при $h = e_2$ и $h = e_3$ — соответственно

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e_2 f'(\zeta), \quad \frac{\partial f}{\partial z} = e_3 f'(\zeta). \tag{7}$$

При этом $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ и $\partial f/\partial z$ — обычные частные производные, взятые от функции $f(\zeta(x, y, z))$ как от функции трех вещественных переменных.

Рассмотрим теперь вопрос о нахождении таких алгебр, моногенные функции на которых, представимые разложением (3) и имеющие производную, вычисляемую по формулам (6) и (7), являются функционально-инвариантными решениями трехмерного уравнения Лапласа. Для дважды дифференцируемой гиперкомплексной функции под оператором Лапласа будем понимать выражение

$$\Delta f(\zeta) := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Пусть $f''(\zeta) \neq 0$. Последовательно выбирая в качестве вектора h базисные элементы e_1, e_2, e_3, получаем

$$\Delta f(\zeta) = f''(\zeta)(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2).$$

Следовательно, если найдется по меньшей мере одна дважды дифференцируемая функция $f(\zeta)$, которая хотя бы в одной точке ζ_0 удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta f(\zeta_0) \equiv f''(\zeta_0)(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = 0,$$

то при условии $f''(\zeta_0) \neq 0$ необходимо, чтобы базис алгебры удовлетворял условию

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 0. \tag{8}$$

Алгебру $\mathbf{A}$ назовем гармонической, если в ней можно выделить хотя бы один базис, который удовлетворяет уравнению (8) при условии, что среди элементов базиса нет нильпотентных. Последнее условие исключает из рассмотрения случай расширения поля комплексных чисел до алгебры третьего ранга над комплексным полем. Примером такой алгебры может быть алгебра, задаваемая таблицей умножения:

$$e_1 = 1, \quad e_2^2 = -1, \quad e_2 e_3 = e_3 e_2 = i, \quad e_3^2 = 0.$$

Базис гармонической алгебры, удовлетворяющей уравнению (8), также назовем гармоническим.

2. Выделение гармонических базисов. Существуют всего четыре (обозначим их $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4$) ассоциативные, коммутативные с главной единицей алгебры третьего ранга. Если в качестве образующих выбрать нильпотентные и идемпотентные элементы, порождающие идеалы алгебры, то таблицы умножения рассматриваемых алгебр будут иметь наиболее простой вид. Приведем их.

Полупростая алгебра $\mathbf{A}_1$ с базисом $\{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3\}$ и таблицей умножения:

$$\mathcal{I}_1^2 = \mathcal{I}_1, \qquad \mathcal{I}_2^2 = \mathcal{I}_2, \qquad \mathcal{I}_3^2 = \mathcal{I}_3, \qquad \mathcal{I}_1\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_1\mathcal{I}_3 = \mathcal{I}_2\mathcal{I}_3 = 0,$$

при этом имеет место разложение главной единицы: $1 = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3$.

Алгебры $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$ содержат радикалы.

$\mathbf{A}_2$ с базисом $\{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \rho\}$ имеет таблицу умножения:

$$\mathcal{I}_1^2 = \mathcal{I}_1, \quad \mathcal{I}_2^2 = \mathcal{I}_2, \quad \mathcal{I}_1\mathcal{I}_2 = 0, \quad \rho^2 = 0, \quad \mathcal{I}_1\rho = 0, \quad \mathcal{I}_2\rho = \rho, \tag{9}$$

при этом главная единица $1 = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$.

$\mathbf{A}_3$ и $\mathbf{A}_4$ не имеют идеалов, порождаемых идемпотентами, и определяются такими таблицами умножения:

$\mathbf{A}_3$ с базисом $\{1, \rho_1, \rho_2\}$:

$$\rho_1^2 = \rho_2, \qquad \rho_2^2 = 0, \qquad \rho_1\rho_2 = 0; \tag{10}$$

$\mathbf{A}_4$ с базисом $\{1, \rho_1, \rho_2\}$:

$$\rho_1^2 = \rho_2^2 = \rho_1\rho_2 = 0. \tag{11}$$

Теорема 1. *Алгебры $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ — гармонические. Алгебра $\mathbf{A}_4$ не является гармонической.*

Доказательство. Пусть в $\mathbf{A}_4$ имеется базис $\{e_1, e_2, e_3\}$, удовлетворяющий уравнению (8). Поскольку, согласно принятому определению, элементы гармонического базиса не могут принадлежать к нильпотентам, то в $\mathbf{A}_4$ гармонический базис должен состоять из обратимых элементов, так как в $\mathbf{A}_4$ любой ненильпотентный элемент обратим. Поэтому гармонический базис в $\mathbf{A}_4$ можно всегда преобразовать в базис, содержащий главную единицу и являющийся также гармоническим. Для этого достаточно уравнение (8) разделить на e_k^2, $k = 1, 2, 3$. Не нарушая общности, положим $e_1 = 1$. Тогда, если в $\mathbf{A}_4$ имеется гармонический базис $\{1, e_2, e_3\}$, его можно представить в виде разложения по базису $\{1, \rho_1, \rho_2\}$, для которого имеет место таблица умножения (11):

$$\begin{aligned} e_1 &= 1, \\ e_2 &= n_1 + n_2\rho_1 + n_3\rho_2, \\ e_3 &= m_1 + m_2\rho_1 + m_3\rho_2, \end{aligned} \tag{12}$$

где n_k и m_k, $k = 1, 2, 3,$ — комплексные числа. При этом система (12) должна быть разрешима относительно $1,\ \rho_1,\ \rho_2$, т. е. матрица

$$[\cdot] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{bmatrix}$$

неособая. Отсюда для коэффициентов системы (12) получаем условие

$$\det[\cdot] = n_2m_3 - n_3m_2 \neq 0. \tag{13}$$

Подставляя $e_2^2 = n_1^2 + 2n_1n_2\rho_1 + 2n_1n_3\rho_2$ и $e_3^2 = m_1^2 + 2m_1m_2\rho_1 + 2m_1m_3\rho_2$ в уравнение $1 + e_2^2 + e_3^2 = 0$ и собирая коэффициенты при $1,\ \rho_1,\ \rho_2$, приходим к следующим необходимым условиям существования гармонического базиса $\{1, e_2, e_3\}$:

$$\begin{aligned} 1 + n_1^2 + m_1^2 &= 0, \\ n_1n_2 + m_1m_2 &= 0, \\ n_1n_3 + m_1m_3 &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Умножая третье уравнение системы (14) на n_2, а второе — на n_3 и вычитая одно из другого, получаем

$$m_1(n_2m_3 - n_3m_2) = 0. \tag{15}$$

А умножая второе уравнение на m_3 и третье — на m_2, после вычитания приходим к уравнению

$$n_1(n_2m_3 - n_3m_2) = 0. \tag{16}$$

С учетом условия (13) из уравнений (15) и (16) следует, что коэффициенты m_1 и n_1 равны нулю, что, согласно первому уравнению системы (14), невозможно.

Покажем теперь, что алгебра $\mathbf{A}_3$, в которой нет, как и в $\mathbf{A}_4$, идемпотентов, содержит гармонический базис $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Пусть

$$\begin{aligned} e_1 &= 1, \\ e_2 &= x_0 + x_1\rho_1 + x_2\rho_2, \\ e_3 &= y_0 + y_1\rho_1 + y_2\rho_2, \end{aligned} \tag{17}$$

где x_k и y_k, $k = 1, 2, 3,$ — комплексные числа и $1,\ \rho_1,\ \rho_2$ — элементы базиса алгебры $\mathbf{A}_3$, имеющей таблицу умножения (10).

Условие гармоничности для разложений (17) приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} 1 + x_0^2 + y_0^2 &= 0, \\ x_0x_1 + y_0y_1 &= 0, \\ x_1^2 + y_1^2 + 2(x_0x_2 + y_0y_2) &= 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Полагая в первом уравнении системы (18) $x_0 = i\sin\omega$, $y_0 = i\cos\omega$, где $\omega \in \mathbf{C}$, из второго и третьего уравнений получаем $x_1 = \cos\omega$, $x_2 = i\cos(\pi/6-\omega)$, $y_1 = -\sin\omega$, $y_2 = i\sin(\pi/6-\omega)$.

После определения неизвестных в разложении (17) его матрица имеет вид

$$[\,\cdot\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ i\sin\omega & \cos\omega & i\cos\left(\frac{\pi}{6}-\omega\right) \\ i\cos\omega & -\sin\omega & i\sin\left(\frac{\pi}{6}-\omega\right) \end{bmatrix}, \qquad (19)$$

а ее определитель

$$\det[\,\cdot\,] = i\left[\cos\omega\sin\left(\frac{\pi}{6}-\omega\right)+\sin\omega\cos\left(\frac{\pi}{6}-\omega\right)\right] = i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{i}{2},$$

т. е. при любых значениях произвольного параметра ω, определяющего элементы матрицы $[\,\cdot\,]$, ее определитель отличен от нуля. Обратив матрицу (19)

$$[\,\cdot\,]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ i\sqrt{3} & 2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\omega\right) & -2\cos\left(\frac{\pi}{6}-\omega\right) \\ -2 & -2i\sin\omega & -2i\cos\omega \end{bmatrix},$$

построим разложение базиса $\{1, \rho_1, \rho_2\}$ по элементам базиса $\{1, e_2, e_3\}$:

$$1 = 1,$$

$$\rho_1 = i\sqrt{3} + 2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\omega\right)e_2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{6}-\omega\right)e_3,$$

$$\rho_2 = -2 - 2i\sin\omega e_2 - 2i\cos\omega.$$

Производя непосредственное умножение в разложениях (17) и подставляя в них ρ_1 и ρ_2, из последнего разложения находим таблицу умножения однопараметрического семейства гармонических базисов, содержащихся в алгебре $\mathbf{A}_3$:

$$e_2^2 = -2 + 3\sin^2\omega + 2i(\sin^3\omega e_2 - \cos^3\omega e_3),$$

$$e_3^2 = -2 + 3\cos^2\omega - 2i(\sin^3\omega e_2 - \cos^3\omega e_3),$$

$$e_2e_3 = -\frac{\sin 2\omega}{2} + i\cos 2\omega(\cos\omega e_2 + i\sin\omega e_3).$$

Аналогично выделяются гармонические базисы в $\mathbf{A}_2$. Условия разрешимости системы

$$1 = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2,$$

$$e_2 = n_1\mathcal{T}_1 + n_2\mathcal{T}_2 + n_3\rho, \qquad (20)$$

$$e_3 = m_1\mathcal{T}_1 + m_2\mathcal{T}_2 + m_3\rho,$$

где $\{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \rho\}$ — базис с таблицей умножения (9), приводят к неравенству

$$m_3(n_2-n_1) + n_3(m_1-m_2) \neq 0. \qquad (21)$$

А условие гармоничности базиса $\{1, e_2, e_3\}$ сводится к системе уравнений

$$1 + n_1^2 + m_1^2 = 0,$$
$$1 + n_2^2 + m_2^2 = 0,$$
$$n_2 n_3 + m_2 m_3 = 0,$$

решая которую, с учетом неравенства (21) получаем

$$n_1 = i\sin\omega, \quad n_2 = i\cos\omega, \quad n_3 = -\sin\omega,$$
$$m_1 = i\cos\omega, \quad m_2 = -i\sin\omega, \quad m_3 = -\cos\omega.$$

Обращая матрицу системы (20), имеем

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i\sin\omega & i\cos\omega & -\sin\omega \\ i\cos\omega & -i\sin\omega & -\cos\omega \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & i\cos\omega & -i\sin\omega \\ 0 & -i\cos\omega & i\sin\omega \\ i & -(\cos\omega+\sin\omega) & (\sin\omega-\cos\omega) \end{bmatrix},$$

т. е. разложение базиса $\{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \rho\}$ по элементам гармонического базиса $\{1, e_2, e_3\}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 &= 1 + i\cos\omega e_2 - i\sin\omega e_3, \\ \mathcal{T}_2 &= 0 - i\cos\omega e_2 + i\sin\omega e_3, \\ \rho &= i - (\cos\omega + \sin\omega)e_2 + (\sin\omega - \cos\omega)e_3. \end{aligned} \tag{22}$$

Производя теперь непосредственно умножение в разложении (20) и подставляя выражения для $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, ρ из разложения (22), получаем

$$e_2^2 = (\sin 2\omega - \sin^2\omega) + i\cos\omega(1 + \sin 2\omega)e_2 + i\sin\omega(1 - \sin 2\omega)e_3,$$
$$e_3^2 = (-\sin 2\omega - \cos^2\omega) - i\cos\omega(1 + \sin 2\omega)e_2 - i\sin\omega(1 - \sin 2\omega)e_3,$$
$$e_2e_3 = \left(\cos 2\omega - \frac{1}{2}\sin 2\omega\right) + i(\cos 2\omega\cos\omega - \sin\omega)e_2 + (\cos\omega - \cos 2\omega\sin\omega)e_3.$$

В работе [3] при использовании матричного представления алгебр было построено однопараметрическое семейство гармонических базисов, задаваемых таблицей умножения

$$e_2^2 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sin\omega e_2 + \frac{i}{2}\cos\omega e_3,$$
$$e_3^2 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sin\omega e_2 - \frac{i}{2}\cos\omega e_3,$$
$$e_2e_3 = \frac{i}{2}\cos\omega e_2 + \frac{i}{2}\sin\omega e_3.$$

Легко установить, что последнее семейство базисов лежит в полупростой алгебре $\mathbf{A}_1$. Действительно, подсчитывая дискриминант алгебры в последнем случае, получаем

$$\operatorname{dis}\mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} \mathrm{Sp}(e_1e_1) & \mathrm{Sp}(e_1e_2) & \mathrm{Sp}(e_1e_3) \\ \mathrm{Sp}(e_2e_1) & \mathrm{Sp}(e_2e_2) & \mathrm{Sp}(e_2e_3) \\ \mathrm{Sp}(e_3e_1) & \mathrm{Sp}(e_3e_2) & \mathrm{Sp}(e_3e_3) \end{vmatrix} = \frac{27}{4}.$$

А любая ассоциативная и коммутативная алгебра с главной единицей полупроста тогда и только тогда, когда ее дискриминант отличен от нуля. Теорема доказана.

Моногенные функции

$$f(\zeta) = \sum_{k=1}^{3} f_k(x, y, z) e_k,$$

где $\{e_1 = 1, e_2, e_3\}$ — гармонический базис,

$$f_k(x, y, z) = u_k(x, y, z) + i v_k(x, y, z),$$

u_k и v_k — вещественнозначные функции и $\zeta = x + y e_2 + z e_3$, являющиеся функционально-инвариантными решениями трехмерного уравнения Лапласа в смысле Смирнова – Соболева, можно строить как главные продолжения аналитических функций комплексной переменной [4, с. 182 – 183], а именно: для голоморфной в круге $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < r, \ \lambda_0 \in \mathbb{C}\}$ комплексной плоскости функции $f(\lambda)$ под ее главным продолжением в коммутативную банахову алгебру понимают функцию

$$f(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\lambda_0)}{n!} (\zeta - \lambda_0 e_1)^n,$$

являющуюся моногенной в шаре $\|\zeta - \lambda_0\| < r$. При этом, если $f(\lambda)$ голоморфна в некоторой области G комплексной плоскости, а D_G — объединение всех шаров $\|\zeta - \lambda_0\| < r$ таких, что соответствующие круги $|\lambda - \lambda_0| < r$ заключены в G, существует единственное главное продолжение функции $f(\lambda)$, аналитическое в D_G, задаваемое интегралом

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\zeta} f(\lambda) R(\lambda, \zeta) d\lambda, \tag{23}$$

где Γ_ζ — контур, лежащий в области G и охватывающий множество комплексных чисел, при которых резольвента $R(\lambda, \zeta) = (\lambda - \zeta)^{-1}$ сингулярна, т. е. элемент $(\lambda - \zeta)$ необратим.

Поскольку для гармонических базисов таблицы умножения известны и известны разложения $1, e_2, e_3$ по элементам, порождающим идеалы в гармонических алгебрах, резольвента в равенстве (23) легко вычисляется.

1. *Смирнов В. И.* Некоторые ленинградские работы в области анализа и его приложений // Тр. Второго всесоюз. мат. съезда. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1935. – **1**. – 371 с.
2. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. – М.: Наука, 1973. – 416 с.
3. *Мельниченко И. П.* О представлении моногенными функциями гармонических отображений // Укр. мат. журн. – 1975. – **27**, № 5. – С. 606–613.
4. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 829 с.

Получено 23.12.2002