УДК 519.21

Я. Ф. Виннишин (Ін-т математики НАН України, Київ)

РОЗПОДІЛ ВИПАДКОВОГО ЛАНЦЮГОВОГО ДРОБУ З МАРКОВСЬКИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

We study the structure of distribution of a random variable for which the elements of its continued fraction representation form a Markov chain of order m. We prove that an absolutely continuous component is absent in the distributions of this sort.

Вивчається структура розподілу випадкової величини, елементи ланцюгового зображення якої утворюють марковський ланцюг порядку m. Доводиться відсутність абсолютно неперервної компоненти у таких розподілів.

Нехай

$$\eta = [0; \xi_1, \xi_2, \ldots] = \cfrac{1}{\xi_1 + \cfrac{1}{\xi_2 + \cfrac{\ddots}{\qquad + \cfrac{1}{\xi_n + \cfrac{}{\ddots}}}}} \tag{1}$$

— випадковий ланцюговий дріб, ξ_n — додатні випадкові величини такі, що

$$P\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n = \infty\right\} = 1 \tag{2}$$

(при цьому випадкова величина η коректно визначена).

Згідно з класичною теоремою Лебега функцію розподілу F_η випадкової величини η можна подати у вигляді

$$F_\eta = aF_d + bF_s + cF_{ac}, \tag{3}$$

де F_d — дискретна функція розподілу, F_s — сингулярна функція розподілу, F_{ac} — абсолютно неперервна функція розподілу, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, $a + b + c = 1$. Якщо один з коефіцієнтів a, b, c дорівнює 1, а два інших — 0, то функцію розподілу F_η називають чистою (чисто дискретною при $a = 1$, чисто сингулярною при $b = 1$ і чисто абсолютно неперервною при $c = 1$).

Як показано в [1], у випадку, коли ξ_k — незалежні випадкові величини, що набувають значень у множині натуральних чисел, розподіл випадкової величини η не може бути абсолютно неперервним. Чистота розподілу η у випадку незалежних компонент доводиться в [2, 3], отже, припущення незалежності ξ_k і набуття лише натуральних значень гарантує, що випадкова величина η має або чисто сингулярний розподіл, або чисто дискретний.

Твердження про відсутність абсолютно неперервної компоненти у розподілі випадкової величини η узагальнено в [2] на послідовності випадкових величин ξ_k, що утворюють ланцюг Маркова на множині натуральних чисел.

У даній статті доводиться, що аналогічне твердження справедливе і для випадкових величин ξ_k, що утворюють марковську послідовність порядку m на множині натуральних чисел.

Теорема 1. *Нехай випадкові величини* ξ_n, $n \in N$, *набувають натуральних значень і послідовність* ξ_n *є марковською порядку* m_1, *тобто* $\forall\, n > m$

$P\{\xi_n \mid \xi_{n-1}, \ldots, \xi_1\} = P\{\xi_n \mid \xi_{n-1}, \ldots, \xi_{n-m}\}$. *Тоді розподіл випадкової величини* η, *що задається формулою* (1), *не містить абсолютно неперервної компоненти.*

Доведення. Розглянемо розбиття відрізка $[0; 1]$ на відрізки $\Delta^{(n)}_{a_1, a_2, \ldots, a_n}$, $n \in N$, $a_i \in N$, $i = \overline{1, n}$, рангу n, де $\Delta^{(n)}_{a_1, a_2, \ldots, a_n}$ — замикання множини тих чисел відрізка $[0; 1]$, в заданні яких звичайним ланцюговим дробом перші n компонент дорівнюють відповідно $a_1, a_2, \ldots, a_n$ [4]. Відрізки рангу n не мають спільних внутрішніх точок,

$$\bigcup_{a_1 \in N, \ldots, a_n \in N} \Delta^{(n)}_{a_1, a_2, \ldots, a_n} = [0; 1], \qquad \bigcup_{a_{n+1} \in N} \Delta^{(n+1)}_{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}} = \Delta^{(n)}_{a_1, \ldots, a_n}. \tag{4}$$

Позначимо через $\left|\Delta^{(n)}_{a_1, \ldots, a_n}\right|$ довжину відрізка $\Delta^{(n)}_{a_1, \ldots, a_n}$. Нехай m — фіксоване натуральне число. Покажемо, що існують набір натуральних чисел a, b, $c_1, c_2, \ldots, c_{m+1}$ і додатне число γ такі, що для будь-яких $n \in N$ і $a_i \in N$, $i = \overline{1, n}$, виконуються нерівності

$$\left| \frac{\left|\Delta^{(n+m+2)}_{a_1, a_2, \ldots, a_n, a, c_1, c_2, \ldots, c_{m+1}}\right|}{\left|\Delta^{(n+m+1)}_{a_1, a_2, \ldots, a_n, a, c_1, \ldots, c_m}\right|} - \frac{\left|\Delta^{(n+m+2)}_{a_1, a_2, \ldots, a_n, b, c_1, \ldots, c_{m+1}}\right|}{\left|\Delta^{(n+m+1)}_{a_1, a_2, \ldots, a_n, b, c_1, \ldots, c_m}\right|} \right| > \gamma, \tag{5_1}$$

$$\frac{\left|\Delta^{(n+m+2)}_{a_1, a_2, \ldots, a_n, a, c_1, \ldots, c_{m+1}}\right|}{\left|\Delta^{(n)}_{a_1, a_2, \ldots, a_n}\right|} > \gamma, \tag{5_2}$$

$$\frac{\left|\Delta^{(n+m+2)}_{a_1, a_2, \ldots, a_n, b, c_1, \ldots, c_{m+1}}\right|}{\left|\Delta^{(n)}_{a_1, a_2, \ldots, a_n}\right|} > \gamma. \tag{5_3}$$

Як відомо з теорії звичайних ланцюгових дробів [4],

$$\left|\Delta^{(k)}_{l_1, l_2, \ldots, l_k}\right| = \frac{1}{q_k(q_k + q_{k-1})}, \tag{6}$$

де q_s — знаменник підхідного ланцюгового дробу p_s / q_s. Послідовність таких знаменників для ланцюгового дробу $[0; a_1, a_2, \ldots, a_n, a, c_1, c_2, \ldots, c_{m+1}]$ будемо позначати через $q_s^{(a)}$, а для $[0; a_1, a_2, \ldots, a_n, b, c_1, \ldots, c_{m+1}]$ — через $q_s^{(b)}$, $s = \overline{0, n+m+2}$. Тоді

$$\frac{\left|\Delta^{(n+m+2)}_{a_1, a_2, \ldots, a_n, a, c_1, \ldots, c_{m+1}}\right|}{\left|\Delta^{(n+m+1)}_{a_1, a_2, \ldots, a_n, a, c_1, \ldots, c_m}\right|} = \frac{\left(q^{(a)}_{n+m+2}\left(q^{(a)}_{n+m+2} + q^{(a)}_{n+m+1}\right)\right)^{-1}}{\left(q^{(a)}_{n+m+1}\left(q^{(a)}_{n+m+1} + q^{(a)}_{n+m}\right)\right)^{-1}} =$$

$$= \frac{q^{(a)}_{n+m+1}\left(q^{(a)}_{n+m+1} + q^{(a)}_{n+m}\right)}{\left(c_{m+1} q^{(a)}_{n+m+1} + q^{(a)}_{n+m}\right)\left((c_{m+1}+1) q^{(a)}_{n+m+1} + q^{(a)}_{n+m}\right)} =$$

$$= \frac{1 + q^{(a)}_{n+m} / q^{(a)}_{n+m+1}}{\left(c_{m+1} + q^{(a)}_{n+m} / q^{(a)}_{n+m+1}\right)\left(c_{m+1} + 1 + q^{(a)}_{n+m} / q^{(a)}_{n+m+1}\right)} \tag{7}$$

(ми використали співвідношення $q_{k+1} = l_{k+1} q_k + q_{k-1}$ для знаменників підхідних дробів звичайного ланцюгового дробу $[0; l_1, l_2, \ldots, l_k, l_{k+1}, \ldots]$ (див. [4])).

Права частина (6) має найпростіший вигляд при $c_{m+1} = 1$, тому надалі будемо вважати, що $c_{m+1} = 1$ і

$$\frac{\left|\Delta^{(n+m+2)}_{a_1, a_2, \ldots, a_n, a, c_1, \ldots, c_{m+1}}\right|}{\left|\Delta^{(n+m+1)}_{a_1, a_2, \ldots, a_n, a, c_1, \ldots, c_m}\right|} = \frac{1}{2 + q^{(a)}_{n+m} / q^{(a)}_{n+m+1}}. \tag{8}$$

Нехай також $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 1$. Тоді

$$\frac{\left|\Delta^{(n+m+2)}_{a_1, a_2, \ldots, a_n, a, c_1, \ldots, c_{m+1}}\right|}{\left|\Delta^{(n)}_{a_1, a_2, \ldots, a_n}\right|} = \frac{\left|\Delta^{(n+m+2)}_{a_1, a_2, \ldots, a_n, a, c_1, \ldots, c_{m+1}}\right|}{\left|\Delta^{(n+m+1)}_{a_1, a_2, \ldots, a_n, a, c_1, \ldots, c_m}\right|} \frac{\left|\Delta^{(n+m+1)}_{a_1, a_2, \ldots, a_n, a, c_1, \ldots, c_m}\right|}{\left|\Delta^{(n+m)}_{a_1, a_2, \ldots, a_n, a, c_1, \ldots, c_{m-1}}\right|} \ldots$$

$$\ldots \frac{\left|\Delta^{(n+2)}_{a_1, a_2, \ldots, a_n, a, c_1}\right|}{\left|\Delta^{(n+1)}_{a_1, a_2, \ldots, a_n, a}\right|} \frac{\left|\Delta^{(n+1)}_{a_1, \ldots, a_n, a}\right|}{\left|\Delta^{(n)}_{a_1, \ldots, a_n}\right|} =$$

$$= \frac{1}{2 + q^{(a)}_{n+m} / q^{(a)}_{n+m+1}} \frac{1}{2 + q^{(a)}_{n+m-1} / q^{(a)}_{n+m}} \ldots$$

$$\ldots \frac{1}{2 + q^{(a)}_{n} / q^{(a)}_{n+1}} \frac{1 + q^{(a)}_{n-1} / q^{(a)}_{n}}{\left(a + q^{(a)}_{n-1} / q^{(a)}_{n}\right)\left(a + 1 + q^{(a)}_{n-1} / q^{(a)}_{n}\right)} \geq \frac{1}{3^{m+1}(a+1)(a+2)}, \tag{9}$$

оскільки для знаменників підхідних дробів звичайного ланцюгового дробу з натуральними компонентами виконується нерівність $q_{k+1} > q_k$ (див. [4]). Далі

$$\left| \frac{\left|\Delta^{(n+m+2)}_{a_1, a_2, \ldots, a_n, a, c_1, \ldots, c_{m+1}}\right|}{\left|\Delta^{(n+m+1)}_{a_1, a_2, \ldots, a_n, a, c_1, \ldots, c_m}\right|} - \frac{\left|\Delta^{(n+m+2)}_{a_1, a_2, \ldots, a_n, b, c_1, \ldots, c_{m+1}}\right|}{\left|\Delta^{(n+m+1)}_{a_1, a_2, \ldots, a_n, b, c_1, \ldots, c_m}\right|} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2 + q^{(a)}_{n+m} / q^{(a)}_{n+m+1}} - \frac{1}{2 + q^{(b)}_{n+m} / q^{(b)}_{n+m+1}} \right| =$$

$$= \frac{\left| q^{(a)}_{n+m} / q^{(a)}_{n+m+1} - q^{(b)}_{n+m} / q^{(b)}_{n+m+1} \right|}{\left(2 + q^{(a)}_{n+m} / q^{(a)}_{n+m+1}\right)\left(2 + q^{(b)}_{n+m} / q^{(b)}_{n+m+1}\right)} \geq$$

$$\geq \frac{1}{9} \left| \frac{q^{(a)}_{n+m}}{q^{(a)}_{n+m+1}} - \frac{q^{(b)}_{n+m}}{q^{(b)}_{n+m+1}} \right| = \frac{1}{9} \left| \frac{1}{1 + q^{(a)}_{n+m-1} / q^{(a)}_{n+m}} - \frac{1}{1 + q^{(b)}_{n+m-1} / q^{(b)}_{n+m}} \right| \geq$$

$$\geq \frac{1}{9 \cdot 4} \left| \frac{q^{(a)}_{n+m-1}}{q^{(a)}_{n+m}} - \frac{q^{(b)}_{n+m-1}}{q^{(b)}_{n+m}} \right| = \frac{1}{9 \cdot 4} \left| \frac{1}{1 + q^{(a)}_{n+m-2} / q^{(a)}_{n+m-1}} - \frac{1}{1 + q^{(b)}_{n+m-2} / q^{(b)}_{n+m-1}} \right| \geq$$

$$\geq \frac{1}{9 \cdot 4^2} \left| \frac{1}{1 + q^{(a)}_{n+m-3} / q^{(a)}_{n+m-2}} - \frac{1}{1 + q^{(b)}_{n+m-3} / q^{(b)}_{n+m-2}} \right| \geq \ldots$$

$$\ldots \geq \frac{1}{9 \cdot 4^{m-1}} \left| \frac{1}{1 + q^{(a)}_{n} / q^{(a)}_{n+1}} - \frac{1}{1 + q^{(b)}_{n} / q^{(b)}_{n+1}} \right| \geq$$

$$\geq \frac{1}{9 \cdot 4^m} \left| \frac{1}{a + q^{(a)}_{n-1} / q^{(a)}_{n}} - \frac{1}{b + q^{(b)}_{n-1} / q^{(b)}_{n}} \right| \geq \frac{|a-b|}{9 \cdot 4^m (a+1)(b+1)}, \tag{10}$$

оскільки $q^{(a)}_{n-1} = q^{(b)}_{n-1}$, $q^{(a)}_{n} = q^{(b)}_{n}$.

Таким чином, для $a = 1$, $b = 2$, $c_i = 1$, $i = \overline{1, m+1}$, маємо

$$\left| \frac{\left|\Delta^{(n+m+2)}_{a_1,a_2,\ldots,a_n,a,c_1,\ldots,c_{m+1}}\right|}{\left|\Delta^{(n+m+1)}_{a_1,a_2,\ldots,a_n,a,c_1,\ldots,c_m}\right|} - \frac{\left|\Delta^{(n+m+2)}_{a_1,a_2,\ldots,a_n,b,c_1,\ldots,c_{m+1}}\right|}{\left|\Delta^{(n+m+1)}_{a_1,a_2,\ldots,a_n,b,c_1,\ldots,c_m}\right|} \right| \geq \frac{1}{27\cdot 2^{2m+1}},$$

$$\frac{\left|\Delta^{(n+m+2)}_{a_1,a_2,\ldots,a_n,a,c_1,\ldots,c_{m+1}}\right|}{\left|\Delta^{(n)}_{a_1,a_2,\ldots,a_n}\right|} \geq \frac{1}{2\cdot 3^{m+2}},$$

$$\frac{\left|\Delta^{(n+m+2)}_{a_1,a_2,\ldots,a_n,b,c_1,\ldots,c_{m+1}}\right|}{\left|\Delta^{(n)}_{a_1,a_2,\ldots,a_n}\right|} \geq \frac{1}{4\cdot 3^{m+2}}.$$

Найменшим серед чисел $1/(27\cdot 2^{2m+1})$, $1/(2\cdot 3^{m+2})$, $1/(4\cdot 3^{m+2})$, $m\in N$, є число $1/(27\cdot 2^{2m+1})$, тому покладемо $\gamma = 1/(27\cdot 2^{2m+1})$, і, отже, нерівності $(5_1)-(5_3)$ виконуються.

Нехай тепер ξ_n — марковська послідовність порядку m (взагалі кажучи, неоднорідна), задана на множині натуральних чисел. З кожним відрізком $\Delta^{(n)}_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ пов'яжемо числову характеристику

$$\lambda^{(n)}_{a_1,a_2,\ldots,a_n} = \frac{\mathrm{P}\left\{\eta\in\Delta^{(n)}_{a_1,a_2,\ldots,a_n}\right\}}{\left|\Delta^{(n)}_{a_1,a_2,\ldots,a_n}\right|} = \frac{\mathrm{P}\{\xi_1=a_1,\ldots,\xi_n=a_n\}}{\left|\Delta^{(n)}_{a_1,a_2,\ldots,a_n}\right|}, \tag{11}$$

а також визначимо послідовність функцій $f_k(x)$, заданих на відрізку $[0, 1]$, таким чином:

$$f_k(x) = \sum_{a_1,a_2,\ldots,a_k\in N} \lambda^{(k)}_{a_1,a_2,\ldots,a_k}\, \mathbb{1}_{\Delta^{(k)}_{a_1,a_2,\ldots,a_k}}. \tag{12}$$

Оскільки

$$\sum_{a_{k+1}\in N} \mathrm{P}\{\xi_1=a_1,\xi_2=a_2,\ldots,\xi_k=a_k,\xi_{k+1}=a_{k+1}\} = \mathrm{P}\{\xi_1=a_1,\ldots,\xi_k=a_k\},$$

то

$$\int\limits_{\Delta^{(k)}_{a_1,a_2,\ldots,a_k}} f_{k+1}(x)\,dx = \int\limits_{\Delta^{(k)}_{a_1,a_2,\ldots,a_k}} f_k(x)\,dx. \tag{13}$$

З (13) і тієї обставини, що сукупності відрізків $\{\Delta^{(k)}_{a_1,a_2,\ldots,a_k},\ a_i\in N,\ i=\overline{1,k}\}$ утворюють подрібнюючі (по k) покриття відрізка $[0; 1]$ (спільними точками можна вважати лише кінці відрізків), для будь-якого $s\in N$ отримуємо

$$\int\limits_{\Delta^{(k)}_{a_1,a_2,\ldots,a_k}} f_{k+s}(x)\,dx = \int\limits_{\Delta^{(k)}_{a_1,a_2,\ldots,a_k}} f_k(x)\,dx. \tag{14}$$

Нехай $0<\varepsilon<1$, $\varepsilon<\lambda^{(k)}_{a_1,a_2,\ldots,a_k}<1/\varepsilon$. Покажемо, що існує $\varepsilon_1>0$, вибір якого залежить лише від ε і не залежить від $k, a_1, a_2, \ldots, a_k$, таке, що виконується умова A:

існує скінченна сукупність B різних наборів $a^{(i)}_{k+1}, a^{(i)}_{k+2}, \ldots, a^{(i)}_{k+s}$, $s\leq m+1$, $i\in B$, така, що для будь-якого $i\in B$

$$\lambda^{(k+s)}_{a_1,a_2,\ldots,a_k,a^{(i)}_{k+1},\ldots,a^{(i)}_{k+s}} \leq \lambda^{(k)}_{a_1,a_2,\ldots,a_k} - \varepsilon_1$$

і

$$\sum_{i\in B}\frac{\left|\Delta^{(k+s)}_{a_1,a_2,\ldots,a_k,a^{(j)}_{k+1},\ldots,a^{(j)}_{k+s}}\right|}{\left|\Delta^{(k)}_{a_1,a_2,\ldots,a_k}\right|} > \varepsilon_1 .$$

Іншими словами, якщо на відрізку $\Delta^{(k)}_{a_1,a_2,\ldots,a_k}$ функція $f_k(x)$ набуває значень $\lambda^{(k)}_{a_1,\ldots,a_k}$ з $(\varepsilon;\,1/\varepsilon)$, де $\varepsilon>0$, то існують $\varepsilon_1>0$ і множина B, що складається з скінченного об'єднання відрізків $\Delta^{(k+s)}_{a_1,a_2,\ldots,a_k,a_{k+1},\ldots,a_{k+s}}\subset\Delta^{(k)}_{a_1,a_2,\ldots,a_k}$, $s\le m+1$, такі, що значення функції $f_{k+s}(x)$ на проміжках з B не перевищує $\lambda^{(k)}_{a_1,a_2,\ldots,a_k}-\varepsilon_1$. При цьому ε_1 залежить лише від ε.

Нехай ε, $0<\varepsilon<1$, та $a_1,a_2,\ldots,a_k\in N$ задані і $\varepsilon<\lambda^{(k)}_{a_1,a_2,\ldots,a_k}<1/\varepsilon$. Покладемо (як і раніше) $a=1$, $b=2$, $c_j=1$, $j=\overline{1,m+1}$, і розглянемо четвірку чисел

$$\begin{array}{ll}\lambda^{(k+m+1)}_{a_1,a_2,\ldots,a_k,a,c_1,c_2,\ldots,c_m}, & \lambda^{(k+m+1)}_{a_1,a_2,\ldots,a_k,b,c_1,c_2,\ldots,c_m},\\ \lambda^{(k+m+2)}_{a_1,a_2,\ldots,a_k,c,c_1,c_2,\ldots,c_{m+1}}, & \lambda^{(k+m+2)}_{a_1,a_2,\ldots,a_k,b,c_1,c_2,\ldots,c_{m+1}}.\end{array} \tag{15}$$

Ці числа підпорядковуються співвідношенню

$$\frac{\lambda^{(k+m+2)}_{a_1,a_2,\ldots,a_k,a,c_1,c_2,\ldots,c_{m+1}}}{\lambda^{(k+m+2)}_{a_1,a_2,\ldots,a_k,b,c_1,c_2,\ldots,c_{m+1}}}=$$

$$=\frac{\mathrm{P}\{\xi_1=a_1,\ldots,\xi_k=a_k,\xi_{k+1}=a,\xi_{k+2}=c_1,\ldots,\xi_{k+m+1}=c_m\}}{\left|\Delta^{(k+m+2)}_{a_1,a_2,\ldots,a_k,a,c_1,\ldots,c_m}\right|}\times$$

$$\times\,\mathrm{P}\{\xi_{k+m+2}=c_{m+1}/\xi_{k+m+1}=c_m,\ldots,\xi_{k+2}=c_1\}\Big/$$

$$\Big/\left(\frac{\mathrm{P}\{\xi_1=a_1,\ldots,\xi_k=a_k,\xi_{k+1}=b,\xi_{k+2}=c_1,\ldots,\xi_{k+m+1}=c_m\}}{\left|\Delta^{(k+m+2)}_{a_1,a_2,\ldots,a_k,b,c_1,\ldots,c_m}\right|}\times\right.$$

$$\left.\times\,\mathrm{P}\{\xi_{k+m+2}=c_{m+1}/\xi_{k+m+1}=c_m,\ldots,\xi_{k+2}=c_1\}\right)=$$

$$=\frac{\lambda^{(k+m+1)}_{a_1,\ldots,a_k,a,c_1,\ldots,c_m}}{\lambda^{(k+m+1)}_{a_1,\ldots,a_k,b,c_1,\ldots,c_m}}\,\frac{\left|\Delta^{(k+m+2)}_{a_1,\ldots,a_k,b,c_1,\ldots,c_{m+1}}\right|\Big/\left|\Delta^{(k+m+1)}_{a_1,\ldots,a_k,b,c_1,\ldots,c_m}\right|}{\left|\Delta^{(k+m+2)}_{a_1,\ldots,a_k,a,c_1,\ldots,c_{m+1}}\right|\Big/\left|\Delta^{(k+m+1)}_{a_1,\ldots,a_k,a,c_1,\ldots,c_m}\right|}. \tag{16}$$

Тому

$$\frac{\lambda^{(k+m+2)}_{a_1,\ldots,a_k,a,c_1,\ldots,c_{m+1}}\,\lambda^{(k+m+1)}_{a_1,\ldots,a_k,b,c_1,\ldots,c_m}}{\lambda^{(k+m+2)}_{a_1,\ldots,a_k,b,c_1,\ldots,c_{m+1}}\,\lambda^{(k+m+1)}_{a_1,\ldots,a_k,a,c_1,\ldots,c_m}}-1=$$

$$=\frac{\left|\Delta^{(k+m+2)}_{a_1,\ldots,a_k,b,c_1,\ldots,c_{m+1}}\right|\Big/\left|\Delta^{(k+m+1)}_{a_1,\ldots,a_k,b,c_1,\ldots,c_m}\right|-\left|\Delta^{(k+m+2)}_{a_1,\ldots,a_k,a,c_1,\ldots,c_{m+1}}\right|\Big/\left|\Delta^{(k+m+1)}_{a_1,\ldots,a_k,a,c_1,\ldots,c_m}\right|}{\left|\Delta^{(k+m+2)}_{a_1,\ldots,a_k,a,c_1,\ldots,c_{m+1}}\right|\Big/\left|\Delta^{(k+m+n)}_{a_1,\ldots,a_k,a,c_1,\ldots,c_m}\right|}. \tag{17}$$

Отже, як випливає з (5_1) і (17),

$$\left| \frac{\lambda^{(k+m+2)}_{a_1,\ldots,a_k,a,c_1,\ldots,c_{m+1}} \lambda^{(k+m+1)}_{a_1,\ldots,a_k,b,c_1,\ldots,c_m}}{\lambda^{(k+m+2)}_{a_1,\ldots,a_k,b,c_1,\ldots,c_{m+1}} \lambda^{(k+m+1)}_{a_1,\ldots,a_k,a,c_1,\ldots,c_m}} - 1 \right| > \gamma. \tag{18}$$

Нехай кожне з чотирьох чисел набору (15) при деякому $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon/2$ належить проміжку $\left[\lambda^{(k)}_{a_1,\ldots,a_k} - \varepsilon_2; \lambda^{(k)}_{a_1,\ldots,a_k} + \varepsilon_2\right]$. Тоді справедливими є оцінки

$$\frac{\lambda^{(k+m+2)}_{a_1,\ldots,a_k,a,c_1,\ldots,c_{m+1}} \lambda^{(k+m+1)}_{a_1,\ldots,a_k,b,c_1,\ldots,c_m}}{\lambda^{(k+m+2)}_{a_1,\ldots,a_k,b,c_1,\ldots,c_{m+1}} \lambda^{(k+m+1)}_{a_1,\ldots,a_k,a,c_1,\ldots,c_m}} - 1 \geq \frac{\left(\lambda^{(k)}_{a_1,\ldots,a_k} - \varepsilon_2\right)^2}{\left(\lambda^{(k)}_{a_1,\ldots,a_k} + \varepsilon_2\right)^2} - 1 =$$

$$= \frac{-4\varepsilon_2 / \lambda^{(k)}_{a_1,\ldots,a_k}}{\left(1 + \varepsilon_2 / \lambda^{(k)}_{a_1,\ldots,a_k}\right)^2} \geq -\frac{4\varepsilon_2}{\lambda^{(k)}_{a_1,\ldots,a_k}} \geq -\frac{4\varepsilon_2}{\varepsilon},$$

$$\frac{\lambda^{(k+m+2)}_{a_1,\ldots,a_k,a,c_1,\ldots,c_{m+1}} \lambda^{(k+m+1)}_{a_1,\ldots,a_k,b,c_1,\ldots,c_m}}{\lambda^{(k+m+2)}_{a_1,\ldots,a_k,b,c_1,\ldots,c_{m+1}} \lambda^{(k+m+1)}_{a_1,\ldots,a_k,a,c_1,\ldots,c_m}} - 1 \leq \frac{\left(\lambda^{(k)}_{a_1,\ldots,a_k} + \varepsilon_2\right)^2}{\left(\lambda^{(k)}_{a_1,\ldots,a_k} - \varepsilon_2\right)^2} \leq$$

$$\leq \frac{4\varepsilon_2 / \lambda^{(k)}_{a_1,\ldots,a_k}}{(1 - \varepsilon_2/\varepsilon)^2} \leq \frac{16\varepsilon_2}{\lambda^{(k)}_{a_1,\ldots,a_k}} \leq \frac{16\varepsilon_2}{\varepsilon}.$$

Таким чином, з припущення, що всі числа набору (15) належать множині $\left[\lambda^{(k)}_{a_1,\ldots,a_k} - \varepsilon_2; \lambda^{(k)}_{a_1,\ldots,a_k} + \varepsilon_2\right]$ при деякому додатному $\varepsilon_2 \leq \varepsilon/2$, отримуємо

$$\left| \frac{\lambda^{(k+m+2)}_{a_1,\ldots,a_k,b,c_1,\ldots,c_{m+1}} \lambda^{(k+m+1)}_{a_1,\ldots,a_k,a,c_1,\ldots,c_m}}{\lambda^{(k+m+2)}_{a_1,\ldots,a_k,a,c_1,\ldots,c_{m+1}} \lambda^{(k+m+1)}_{a_1,\ldots,a_k,b,c_1,\ldots,c_m}} - 1 \right| \leq \frac{16\varepsilon_2}{\varepsilon}. \tag{19}$$

Нерівності (18) та (19) несумісні при $16\varepsilon_2/\varepsilon \leq \gamma$, тому вибравши

$$\varepsilon_2 = \min\left(\frac{\varepsilon}{2}; \frac{\gamma\varepsilon}{16}\right), \tag{20}$$

приходимо до висновку, що принаймні одне з чисел набору (15) (позначимо його $\lambda^{(k+s)}_{a_1,\ldots,a_k,a_{k+1},\ldots,a_{k+s}}$, $s \leq m+2$) не належить проміжку $\left[\lambda^{(k)}_{a_1,\ldots,a_k} - \varepsilon_2;\right.$ $\left.\lambda^{(k)}_{a_1,\ldots,a_k} + \varepsilon_2\right]$. Надалі ε_2 задається саме за допомогою (20).

Якщо $\lambda^{(k+s)}_{a_1,\ldots,a_k,a_{k+1},\ldots,a_{k+s}} \leq \lambda^{(k)}_{a_1,\ldots,a_k} - \varepsilon_2$, то покладемо $\varepsilon_1^{(1)} = \min(\varepsilon_2; \gamma)$ і отримаємо умову А, як це випливає з (18) та (20).

Нехай

$$\lambda^{(k+s)}_{a_1,\ldots,a_k,a_{k+1},\ldots,a_{k+s}} \geq \lambda^{(k)}_{a_1,\ldots,a_k} + \varepsilon_2.$$

Доведемо, що тоді при певному виборі ε_1 також виконується умова А. Нехай $\varepsilon_3 < \varepsilon$. Оцінимо сумарну лебегівську міру об'єднання

$$\bigcup_{i \in B_1} \Delta^{(k+s)}_{a_1,\ldots,a_k,a^{(j)}_{k+1},\ldots,a^{(j)}_{k+s}}$$

тих відрізків $\Delta^{(k+s)}_{a_1,\ldots,a_k,l_1,\ldots,l_s}$, на яких $f_{k+s}(x) < \lambda^{(k)}_{a_1,\ldots,a_n} - \varepsilon_3$. Маємо

$$\lambda^{(k)}_{a_1,\ldots,a_k}\left|\Delta^{(k)}_{a_1,\ldots,a_k}\right| = \int\limits_{\Delta^{(k)}_{a_1,\ldots,a_k}} f_{k+s}(x)dx \ \geq$$

$$\geq \int\limits_{\Delta^{(k+s)}_{a_1,\ldots,a_k,a_{k+1},\ldots,a_{k+s}}} f_{k+s}(x)dx \ +$$

$$+ \int\limits_{\Delta^{(k)}_{a_1,\ldots,a_k}\setminus\left(\left(\bigcup_{i\in B}\Delta^{(k+s)}_{a_1,\ldots,a_k,a^{(i)}_{k+1},\ldots,a^{(i)}_{k+s}}\right)\cup\Delta^{(k+s)}_{a_1,\ldots,a_k,a_{k+1},\ldots,a_{k+s}}\right)} f_{k+s}(x)dx \ \geq$$

$$\geq \left(\lambda^{(k)}_{a_1,\ldots,a_k}+\varepsilon_2\right)\left|\Delta^{(k+s)}_{a_1,\ldots,a_k,a_{k+1},\ldots,a_{k+s}}\right| +$$

$$+ \left(\lambda^{(k)}_{a_1,\ldots,a_k}-\varepsilon_3\right)\left(\left|\Delta^{(k)}_{a_1,\ldots,a_k}\right| - \left|\Delta^{(k+s)}_{a_1,\ldots,a_k,a_{k+1},\ldots,a_{k+s}}\right| - \sum_{i\in B_1}\left|\Delta^{(k+s)}_{a_1,\ldots,a_k,a^{(i)}_{k+1},\ldots,a^{(i)}_{k+s}}\right|\right). \tag{21}$$

Звідси

$$\sum_{i\in B_1}\left|\Delta^{(k+s)}_{a_1,\ldots,a_k,a^{(i)}_{k+1},\ldots,a^{(i)}_{k+s}}\right| \geq$$

$$\geq \frac{1}{\lambda^{(k)}_{a_1,\ldots,a_k}-\varepsilon_3}\left[(\varepsilon_2+\varepsilon_3)\left|\Delta^{(k+s)}_{a_1,\ldots,a_k,a_{k+1},\ldots,a_{k+s}}\right| - \varepsilon_3\left|\Delta^{(k)}_{a_1,\ldots,a_k}\right|\right] \geq$$

$$\geq \frac{1}{\lambda^{(k)}_{a_1,\ldots,a_k}-\varepsilon_3}\left[(\varepsilon_2+\varepsilon_3)\frac{\left|\Delta^{(k+s)}_{a_1,\ldots,a_k,a_{k+1},\ldots,a_{k+s}}\right|}{\Delta^{(k)}_{a_1,\ldots,a_k}} - \varepsilon_3\right]\left|\Delta^{(k)}_{a_1,\ldots,a_k}\right| \geq$$

$$\geq \frac{1}{\lambda^{(k)}_{a_1,\ldots,a_k}-\varepsilon_3}\left[\gamma\varepsilon_2-\varepsilon_3\right]\left|\Delta^{(k)}_{a_1,\ldots,a_k}\right|. \tag{22}$$

Якщо ε_3 вибрати рівним $\varepsilon_3 = \min(\varepsilon/2, \gamma\varepsilon_2/2)$, то

$$\sum_{i\in B_1}\left|\Delta^{(k+s)}_{a_1,\ldots,a_k,a^{(i)}_{k+1},\ldots,a^{(i)}_{k+s}}\right| \geq \frac{\varepsilon\gamma\varepsilon_2}{2}\left|\Delta^{(k)}_{a_1,\ldots,a_k}\right|.$$

Вибравши скінченну підмножину B множини B_1 так, щоб

$$\sum_{i\in B}\left|\Delta^{(k+s)}_{a_1,\ldots,a_k,a^{(i)}_{k+1},\ldots,a^{(i)}_{k+s}}\right| \geq \frac{1}{2}\sum_{i\in B_1}\left|\Delta^{(k+s)}_{a_1,\ldots,a_k,a^{(i)}_{k+1},\ldots,a^{(i)}_{k+s}}\right|,$$

і поклавши $\varepsilon_1^{(2)} = \min(\varepsilon_3/2, \varepsilon\gamma\varepsilon_2/4)$, отримаємо умову A. Таким чином, для $\varepsilon_1 = \min\left(\varepsilon_1^{(1)}, \varepsilon_1^{(2)}\right)$ виконується умова A.

Нехай $0<\varepsilon<1$, $\varepsilon < \lambda^{(k)}_{a_1,a_2,\ldots,a_k} < 1/\varepsilon$.

Використовуючи умову A не більше, ніж p разів, де $p = [1/\varepsilon^2]+1$, отримуємо умову B:

існують $\varepsilon_0>0$ та скінченна сукупність A різних наборів $a^{(i)}_{k+1}, a^{(i)}_{k+2}, \ldots$ $\ldots, a^{(i)}_{k+s}$, $i\in A$, такі, що для будь-якого $i\in A$

$$\lambda^{(k+s)}_{a_1,a_2,\ldots,a_k,a^{(i)}_{k+1},\ldots,a^{(i)}_{k+s}} \leq \varepsilon$$

і

$$\sum_{i \in A} \frac{\left|\Delta^{(k+s)}_{a_1, a_2, \ldots, a_k, a^{(l)}_{k+1}, \ldots, a^{(l)}_{k+s}}\right|}{\left|\Delta^{(k)}_{a_1, a_2, \ldots, a_k}\right|} > \varepsilon_0.$$

При цьому вибір ε_0 залежить лише від ε.

Нехай ε, $0 < \varepsilon < 1$, задано.

Якщо для відрізка $\Delta^{(l)}_{a_1, a_2, \ldots, a_l}$ відповідне значення $\lambda^{(l)}_{a_1, a_2, \ldots, a_l}$ функції $f_l(x)$ належить інтервалу $(\varepsilon, 1/\varepsilon)$, то скористаємось умовою B і розіб'ємо відрізок $\Delta^{(l)}_{a_1, a_2, \ldots, a_l}$ на зліченну кількість відрізків $\Delta^{(s)}_{a_1, a_2, \ldots, a_s}$, які не мають спільних внутрішніх точок, причому розподілимо їх на три класи: до класу $K_1^{(1)}$ віднесемо ті відрізки $\Delta^{(s)}_{a_1, a_2, \ldots, a_s}$, для яких відповідне значення $\lambda^{(s)}_{a_1, a_2, \ldots, a_s}$ належить інтервалу $(\varepsilon, 1/\varepsilon)$, до класу $K_2^{(1)}$ — відрізки $\Delta^{(s)}_{a_1, a_2, \ldots, a_s}$, для яких відповідне значення $\lambda^{(s)}_{a_1, a_2, \ldots, a_s}$ не перевищує ε, а до класу $K_3^{(1)}$ — відрізки $\Delta^{(s)}_{a_1, a_2, \ldots, a_s}$, для яких відповідне значення $\lambda^{(s)}_{a_1, a_2, \ldots, a_s}$ не менше, ніж $1/\varepsilon$.

На наступному етапі до кожного з відрізків класу $K_1^{(1)}$ застосуємо аналогічну процедуру і, поповнивши класи $K_2^{(1)}$ та $K_3^{(1)}$, отримаємо розбиття відрізка $\Delta^{(l)}_{a_1, a_2, \ldots, a_l}$ на відрізки $\Delta^{(r)}_{a_1, a_2, \ldots, a_r}$, які знову ж таки розподілені на класи $K_1^{(2)}$, $K_2^{(2)}$, $K_3^{(2)}$ в залежності від того, належить відповідне значення λ інтервалу $(\varepsilon, 1/\varepsilon)$, не перевищує ε, чи не менше, ніж $1/\varepsilon$. Зауважимо, що до класів $K_1^{(2)}$, $K_2^{(2)}$, $K_3^{(2)}$ можуть входити відрізки різних рангів.

Якщо за початковий відрізок вибрати відрізок $[0, 1]$ і застосувати описану процедуру d разів, то отримаємо розбиття відрізка $[0, 1]$ на відрізки, які не мають спільних внутрішніх точок і розподілені на класи $K_1^{(d)}$, $K_2^{(d)}$, $K_3^{(d)}$. Відповідні значення λ для відрізків класу $K_1^{(d)}$ належать інтервалу $(\varepsilon, 1/\varepsilon)$, для відрізків класу $K_2^{(d)}$ не перевищують ε, а для відрізків класу $K_3^{(d)}$ не менші, ніж $1/\varepsilon$. При цьому (як це випливає з умови B)

$$\sum_{\Delta^{(u)}_{a_1, a_2, \ldots, a_u} \in K_1^{(d)}} \left|\Delta^{(u)}_{a_1, a_2, \ldots, a_u}\right| \leq (1-\varepsilon_0)^d. \tag{23}$$

Тому

$$P\left\{\eta \in \bigcup_{\Delta^{(u)}_{a_1, a_2, \ldots, a_u} \in K_1^{(d)}} \Delta^{(u)}_{a_1, a_2, \ldots, a_u}\right\} \leq \frac{1}{\varepsilon}(1-\varepsilon_0)^d. \tag{24}$$

Крім того,

$$P\left\{\eta \in \bigcup_{\Delta^{(u)}_{a_1, a_2, \ldots, a_u} \in K_2^{(d)}} \Delta^{(u)}_{a_1, a_2, \ldots, a_u}\right\} \leq \varepsilon.$$

Таким чином, для множини

$$\bigcup_{\Delta^{(u)}_{a_1, a_2, \ldots, a_u} \in K_3^{(d)}} \Delta^{(u)}_{a_1, a_2, \ldots, a_u}$$

та ймовірності попадання в неї випадкової величини η справедливими є оцінки

$$\sum_{\Delta^{(u)}_{a_1, a_2, \ldots, a_u} \in K_3^{(d)}} \left| \Delta^{(u)}_{a_1, a_2, \ldots, a_u} \right| \leq \varepsilon \tag{25}$$

і

$$P\left\{ \eta \in \bigcup_{\Delta^{(u)}_{a_1, a_2, \ldots, a_u} \in K_3^{(d)}} \Delta^{(u)}_{a_1, a_2, \ldots, a_u} \right\} \geq 1 - \varepsilon - \frac{1}{\varepsilon_0}(1 - \varepsilon_0)^d. \tag{26}$$

Вибором ε та d праву частину (25) можна зробити як завгодно малою, а ліву частину (26) — як завгодно близькою до 1, звідки і випливає відсутність абсолютно неперервної компоненти у функції розподілу випадкової величини η.

1. *Працьовитий М. В.* Сингулярність розподілів випадкових величин, заданих розподілами елементів свого ланцюгового зображення // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 8. – С. 1086 – 1095.
2. *Працьовитий М. В.* Фрактальний аналіз у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Нац. пед. ун-т, 1998. – 296 с.
3. *Виннишин Я. Ф.* Випадкові ланцюгові дроби, що задаються незалежними елементами, та їх функції розподілу // Наук. зап. Нац. пед. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – Київ: Нац. пед. ун-т, 2001. – Вип. 2. – С. 319 – 326.
4. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. – М.: Наука, 1978. – 116 с.

Одержано 16.09.2002