УДК 517.98

С. О. Кужель (Ін-т математики НАН України, Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова, Київ),
О. М. Пацюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

ДО ТЕОРІЇ $\mathcal{PT}$-СИМЕТРИЧНИХ ОПЕРАТОРІВ

This article develops a general theory of $\mathcal{PT}$-symmetric operators. Special attention is given to $\mathcal{PT}$-symmetric quasi-self-adjoint extensions of symmetric operator with deficiency indices $\langle 2, 2\rangle$. For these extensions, the possibility of their interpretation as self-adjoint operators in Krein spaces is investigated, and a description of nonreal eigenvalues is given. These abstract results are applied to the Schrödinger operator with Coulomb potential on the real axis.

Развивается общая теория $\mathcal{PT}$-симметрических операторов. Основное внимание уделяется $\mathcal{PT}$-симметрическим квазисамосопряженным расширениям симметрического оператора с индексом дефекта $\langle 2, 2\rangle$. Для таких расширений исследуется возможность их интерпретации как самосопряженных операторов в пространствах Крейна, дается описание недействительных собственных значений. Полученные абстрактные результаты применяются к оператору Шредингера с кулоновским потенциалом на вещественной оси.

1. Вступ. Використання несамоспряжених операторів у квантовій механіці сягає початкового етапу її розвитку [1]. Стійкий інтерес до несамоспряжених гамільтоніанів значно посилився після того, як було помічено за допомогою наближених обчислень [2] і незабаром строго доведено [3], що спектр несамоспряженого у просторі $L_2(\mathbb{R})$ оператора

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2(ix)^{\varepsilon}, \quad 0 \le \varepsilon < 2,$$

є дійсним і додатним. Інтуїтивне пояснення цього факту полягало у припущенні [2], що дійсний спектр оператора H зумовлений його властивістю $\mathcal{PT}$-симетрії:

$$\mathcal{PT}H = H\mathcal{PT},$$

де оператор парності $\mathcal{P}$ та оператор комплексного спряження $\mathcal{T}$ визначено таким чином:

$$\mathcal{P}f(x) = f(-x), \quad \mathcal{T}f(x) = \overline{f(x)} \quad \forall f \in L_2(\mathbb{R}).$$

Ґрунтуючись на цьому, було побудовано так зване комплексне розширення звичайної квантової механіки до $\mathcal{PT}$-симетричної квантової механіки, в якій $\mathcal{PT}$-симетричні гамільтоніани відіграють важливу роль (див., наприклад, оглядову роботу [4]).

Для різних фізичних моделей оператори $\mathcal{P}$ і $\mathcal{T}$ в означенні $\mathcal{PT}$-симетрії можуть бути різними, але лінійний оператор $\mathcal{P}$ завжди є інволюцією: $\mathcal{P}^2 = I$, і має властивість унітарності: $(\mathcal{P}f, \mathcal{P}g) = (f, g)$. В свою чергу, антилінійний оператор $\mathcal{T}$ є оператором спряження в сенсі означення [5] (пункт 104). У зв'язку з цим виникає природна задача дослідження $\mathcal{PT}$-симетричних операторів із абстрактної точки зору як операторів, що діють у довільному гільбертовому просторі. Слід зазначити, що поняття $\mathcal{PT}$-симетричних операторів є цікавим і з математичної точки зору, оскільки воно дозволяє поєднати різноманітні методи теорії просторів Крейна [6], теорії збурень [7] та апарат алгебр Кліфорда [8, 9] для інтерпретації і дослідження $\mathcal{PT}$-симетричних операторів.

Метою даної роботи є розвиток загальної теорії $\mathcal{PT}$-симетричних операторів. На початку наступного пункту наведено абстрактне означення $\mathcal{PT}$-симетричних операторів у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$, де замість оператора парності в $L_2(\mathbb{R})$ використовується довільна унітарна інволюція, а замість оператора спряження — довільний оператор спряження в $\mathfrak{H}$. Далі наведено загальні властивості $\mathcal{PT}$-симетричних операторів та досліджено можливість інтерпретації $\mathcal{PT}$-симетричних операторів як самоспряжених у просторі Крейна операторів. Зауважимо, що $\mathcal{PT}$-симетричні оператори не завжди будуть самоспряженими відносно індефінітної метрики, породженої у просторі $\mathfrak{H}$ оператором $\mathcal{P}$, а тому для їх інтерпретації як самоспряжених операторів у деякому просторі Крейна необхідно знаходити інші індефінітні метрики простору $\mathfrak{H}$. У роботах [9, 10] було показано, що важливу роль у побудові таких індефінітних метрик відіграють певні алгебраїчні структури, зокрема алгебра Кліфорда $\mathcal{C}l_2(\mathcal{P}, \mathcal{R})$.

Пункт 3 є основним у даній роботі. Тут вивчаються $\mathcal{PT}$-симетричні квазісамоспряжені розширення H симетричного оператора S у припущенні, що S є $\mathcal{PT}$-симетричним і комутує з усіма елементами алгебри Кліфорда $\mathcal{C}l_2(\mathcal{P}, \mathcal{R})$. За умови, що S має індекс дефекту $\langle 2, 2\rangle$, показано, що довільне $\mathcal{PT}$-симетричне квазісамоспряжене розширення H можна інтерпретувати як самоспряжений оператор у просторі Крейна з індефінітною метрикою, що породжена унітарною інволюцією $\mathcal{P}_\xi = e^{i\xi\mathcal{R}}\mathcal{P}$, побудованою в термінах $\mathcal{C}l_2(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ (теорема 3.1). Оператори $\mathcal{P}_\xi$ також є $\mathcal{PT}$-симетричними. Показано, що можливість інтерпретації деяких $\mathcal{PT}$-симетричних квазісамоспряжених розширень H як самоспряжених операторів у просторі Крейна з індефінітною метрикою, породженою унітарною інволюцією $\mathcal{J} \in \mathcal{C}l_2(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ без властивості $\mathcal{PT}$-симетрії, означає, що спектр таких операторів H збігається з комплексною площиною (теорема 3.2). Теорема 3.3 містить опис недійсних власних значень $\mathcal{PT}$-симетричних квазісамоспряжених розширень H, що дає можливість сформулювати просту достатню умову дійсності спектра оператора H (зауваження 3.1). У пункті 4 як ілюстрацію отриманих результатів розглянуто випадок $\mathcal{PT}$-симетричних операторів Шредінгера із сингулярними потенціалами.

2. Абстрактні $\mathcal{PT}$-симетричні оператори. ***2.1. Означення $\mathcal{PT}$-симетричних операторів та їх елементарні властивості.*** Нехай $\mathfrak{H}$ — комплексний гільбертів простір. Елементи $\mathfrak{H}$ позначатимемо малими латинськими літерами $f, g, h, \ldots$.

Довільний оператор $\mathcal{P}$, визначений на всьому просторі $\mathfrak{H}$, будемо називати *унітарною інволюцією*, якщо

$$\text{(i)} \quad \mathcal{P}^2 = I, \qquad \text{(ii)} \quad (\mathcal{P}f, \mathcal{P}g) = (f, g). \tag{2.1}$$

Із рівностей (2.1) випливає, що $\mathcal{P}$ є лінійним обмеженим оператором у просторі $\mathfrak{H}$.

Незначна модифікація умови (ii) в (2.1) веде до означення оператора спряження (або антиунітарної інволюції).

Довільний оператор $\mathcal{T}$, визначений на всьому просторі $\mathfrak{H}$, називатимемо *оператором спряження,* якщо

$$\text{(i)} \quad \mathcal{T}^2 = I, \qquad \text{(ii)} \quad (\mathcal{T}f, \mathcal{T}g) = (g, f). \tag{2.2}$$

Оператор спряження $\mathcal{T}$ є обмеженим оператором в $\mathfrak{H}$, але, на відміну від унітарних інволюцій, $\mathcal{T}$ є антилінійним, тобто

$$\mathcal{T}(\alpha f + \beta g) = \overline{\alpha}\mathcal{T}f + \overline{\beta}\mathcal{T}g \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \tag{2.3}$$

Зафіксуємо деяку унітарну інволюцію $\mathcal{P}$ та оператор спряження $\mathcal{T}$ в $\mathfrak{H}$ і припустимо, що вони комутують:

$$\mathcal{PT} = \mathcal{TP}. \tag{2.4}$$

Означення 2.1. *Замкнений щільно визначений у просторі $\mathfrak{H}$ лінійний оператор H називатимемо $\mathcal{PT}$-симетричним, якщо рівність*

$$\mathcal{PT}Hf = H\mathcal{TP}f$$

виконується для всіх елементів f з області визначення $\mathcal{D}(H)$ оператора H.

***Зауваження* 2.1.** Умова $\mathcal{PT}$-симетрії використовується в $\mathcal{PT}$-симетричній квантовій механіці як деякий аналог математичної умови самоспряженості [4].

Із (2.4) випливає, що оператор $\mathcal{PT}$ також буде оператором спряження. Іноді лінійний оператор, який комутує із деяким оператором спряження $\mathcal{PT}$, називають $\mathcal{PT}$-дійсним [5]. Отже, поняття $\mathcal{PT}$-симетричності еквівалентне поняттю $\mathcal{PT}$-дійсного оператора. Враховуючи можливі фізичні застосування, ми віддаватимемо перевагу першому з них.

Із означення 2.1 випливає, що точковий, залишковий і неперервний спектри $\mathcal{PT}$-симетричного оператора H є симетричними відносно дійсної осі, тобто

$$\lambda \in \sigma_\alpha(H) \iff \overline{\lambda} \in \sigma_\alpha(H), \quad \alpha \in \{p, r, c\}.$$

Властивість $\mathcal{PT}$-симетричності зберігається при переході до спряженого оператора, що випливає з наступної леми.

Лема 2.1. *Якщо оператор H є $\mathcal{PT}$-симетричним у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$, то спряжений до нього оператор H^* також є $\mathcal{PT}$-симетричним.*

Доведення. Нехай H — $\mathcal{PT}$-симетричний оператор. Із (2.1)–(2.3) випливає, що для всіх $f \in \mathcal{D}(H)$ і $g \in \mathcal{D}(H^*)$

$$(\mathcal{PT}Hf, g) = (H\mathcal{PT}f, g) = (\mathcal{PT}f, H^*g) = (\mathcal{PT}H^*g, f).$$

З іншого боку, $(\mathcal{PT}Hf, g) = (\mathcal{T}Hf, \mathcal{P}g) = (\mathcal{TP}g, Hf) = (\mathcal{PT}g, Hf)$. Порівнюючи отримані співвідношення, приходимо до висновку, що $\mathcal{PT}g \in \mathcal{D}(H^*)$ і $\mathcal{PT}H^*g = H^*\mathcal{PT}g$ для всіх $g \in \mathcal{D}(H^*)$. Отже, спряжений оператор H^* також є $\mathcal{PT}$-симетричним.

Лему доведено.

2.2. Інтерпретація $\mathcal{PT}$-симетричних операторів як самоспряжених у просторах Крейна. Поняття $\mathcal{PT}$-симетрії є досить загальним, і множина $\mathcal{PT}$-симетричних операторів може містити оператори з різноманітними властивостями. Зокрема, в багатьох випадках $\mathcal{PT}$-симетричні оператори можна інтерпретувати як самоспряжені у просторах Крейна.

Нагадаємо, що за допомогою довільної унітарної інволюції $\mathcal{J}$ в гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$ можна визначити півторалінійну форму

$$[f, g]_{\mathcal{J}} := (\mathcal{J}f, g).$$

Якщо $\mathcal{J}$ є нетривіальною унітарною інволюцією (тобто $\mathcal{J} \neq \pm I$), то форма $[f, f]_{\mathcal{J}}$ буде набувати як додатних, так і від'ємних значень при різних $f \in \mathfrak{H}$, тобто $[\cdot,\cdot]_{\mathcal{J}}$ буде індефінітною метрикою. Гільбертів простір $\mathfrak{H}$ із індефінітною метрикою $[\cdot,\cdot]_{\mathcal{J}}$ будемо позначати через $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{J}})$.

Простір $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{J}})$ називається *простором Крейна,* якщо

$$\dim\ker(I+\mathcal{J}) = \dim\ker(I-\mathcal{J}) = \infty. \tag{2.5}$$

Умова (2.5) означає, що простір Крейна $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{J}})$ містить „однакову" кількість як додатних, так і від'ємних значень $[f,f]_{\mathcal{J}}$. Інакше (якщо (2.5) не виконується) простір $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{J}})$ називають простором Понтрягіна.

Різноманітні індефінітні метрики зручно будувати за допомогою алгебр Кліфорда. Пояснимо це детальніше, розглянувши наступний простий випадок.

Нехай унітарні інволюції $\mathcal{P}$ та $\mathcal{R}$ антикомутують в $\mathfrak{H}$:

$$\mathcal{PR} = -\mathcal{RP}. \tag{2.6}$$

Ці оператори можна розглядати як породжуючі елементи комплексної алгебри Кліфорда [9] $\mathcal{C}l_2(\mathcal{P},\mathcal{R}) := \operatorname{span}\{I, \mathcal{P}, \mathcal{R}, i\mathcal{RP}\}$. Звідси випливає, що довільний оператор $\mathcal{J} \in \mathcal{C}l_2(\mathcal{P},\mathcal{R})$ має вигляд

$$\mathcal{J} = \alpha_0 I + \alpha_1\mathcal{P} + \alpha_2\mathcal{R} + \alpha_3 i\mathcal{RP}, \quad \alpha_j \in \mathbb{C}, \quad j = \overline{0,3}. \tag{2.7}$$

Зокрема, $\mathcal{J}$ буде нетривіальною унітарною інволюцією в $\mathfrak{H}$ тоді і тільки тоді, коли [11]

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \quad \text{і} \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1.$$

Таким чином, множина нетривіальних унітарних інволюцій, побудована у термінах алгебри Кліфорда $\mathcal{C}l_2(\mathcal{P},\mathcal{R})$, складається з операторів вигляду

$$\mathcal{J} = \alpha_1\mathcal{P} + \alpha_2\mathcal{R} + \alpha_3 i\mathcal{RP}, \tag{2.8}$$

де $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ — довільний вектор одиничної сфери $\mathbb{S}^2$ в $\mathbb{R}^3$.

Визначаючи індефінітні метрики як $[\cdot,\cdot]_{\mathcal{J}} := (\mathcal{J}\cdot,\cdot)$, де $\mathcal{J}$ задається (2.8), отримуємо множину різних просторів Крейна $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{J}})$.

Далі вважатимемо, що унітарні інволюції $\mathcal{P}$ та $\mathcal{R}$ *комутують із оператором спряження* $\mathcal{T}$, тобто

$$\mathcal{PT} = \mathcal{TP}, \quad \mathcal{RT} = \mathcal{TR}. \tag{2.9}$$

Зображення (2.8) нетривіальних унітарних інволюцій $\mathcal{J}$ значно спрощується, якщо додатково припустити, що оператор $\mathcal{J}$ є $\mathcal{PT}$-симетричним.

Лема 2.2. *Нетривіальна унітарна інволюція $\mathcal{J} \in \mathcal{C}l_2(\mathcal{P},\mathcal{R})$ є $\mathcal{PT}$-симетричною тоді і тільки тоді, коли існує таке $\xi \in [0, 2\pi)$, що*

$$\mathcal{J} \equiv \mathcal{P}_\xi := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}\xi^n\mathcal{R}^n\mathcal{P} = e^{i\xi\mathcal{R}}\mathcal{P}. \tag{2.10}$$

Як правило, коли $\mathcal{PT}$-симетричні оператори є гамільтоніанами $\mathcal{PT}$-симетричної квантової механіки, ці оператори можна трактувати як самоспряжені у деяких просторах Крейна $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{J}})$ [4]. Зауважимо, що тут $\mathcal{J}$ не обов'язково дорівнює $\mathcal{P}$. Зокрема, для певних моделей [9] відповідні $\mathcal{PT}$-симетричні гамільтоніани можуть бути інтерпретовані як самоспряжені у просторах Крейна $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{J}})$ з індефінітними метриками, які визначаються через унітарні інволюції $\mathcal{J}$ з алгебри Кліфорда $\mathcal{C}l_2(\mathcal{P},\mathcal{R})$. Наступний результат показує, що при доведенні такої властивості достатньо обмежитись лише підмножиною унітарних інволюцій $\{\mathcal{P}_\xi\}$, що означена рівністю (2.10).

Лема 2.3. *Якщо $\mathcal{PT}$-симетричний оператор H є самоспряженим у просторі Крейна $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{J}})$ при деякому виборі унітарної інволюції $\mathcal{J}$ із множини* (2.8), *то оператор H також буде самоспряженим у просторі Крейна $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{P}_\xi})$ при деякій $\mathcal{P}_\xi$, визначеній за допомогою* (2.10).

Доведення. Самоспряженість оператора H у просторі Крейна $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{J}})$ еквівалентна виконанню тотожності [6]

$$\mathcal{J}Hf = H^*\mathcal{J}f \qquad \forall f \in \mathcal{D}(H), \tag{2.11}$$

де H^* — спряжений до H у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$.

Згідно з лемою 2.1, оператор H^* також є $\mathcal{PT}$-симетричним, а отже, рівність $\mathcal{PT}H^* = H^*\mathcal{PT}$ виконується на $\mathcal{D}(H^*)$. Тоді, діючи оператором $\mathcal{PT}$ на обидві частини рівності (2.11) і беручи до уваги співвідношення (2.6) та (2.9), отримуємо

$$\widehat{\mathcal{J}}H\mathcal{PT}f = H^*\widehat{\mathcal{J}}\mathcal{PT}f \qquad \forall f \in \mathcal{D}(H), \tag{2.12}$$

де $\widehat{\mathcal{J}} = \alpha_1\mathcal{P} - \alpha_2\mathcal{R} + \alpha_3 i\mathcal{R}\mathcal{P}$.

Оскільки оператор H є $\mathcal{PT}$-симетричним, оператор спряження $\mathcal{PT}$ відображає $\mathcal{D}(H)$ на $\mathcal{D}(H)$. Таким чином, рівність (2.12) можна записати у вигляді

$$\widehat{\mathcal{J}}Hf = H^*\widehat{\mathcal{J}}f \quad \forall f \in \mathcal{D}(H). \tag{2.13}$$

Додаючи рівності (2.11) і (2.13) та враховуючи, що оператор $\mathcal{J}$ визначається за допомогою (2.8), отримуємо

$$(\alpha_1\mathcal{P} + \alpha_3 i\mathcal{R}\mathcal{P})Hf = H^*(\alpha_1\mathcal{P} + \alpha_3 i\mathcal{R}\mathcal{P})f$$

або

$$\mathcal{P}_\xi Hf = H^*\mathcal{P}_\xi f \qquad \forall f \in \mathcal{D}(H),$$

де

$$\mathcal{P}_\xi = \frac{\alpha_1}{\sqrt{1-\alpha_2^2}}\mathcal{P} + \frac{\alpha_3}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} i\mathcal{R}\mathcal{P} = (\cos\xi \cdot I + i\sin\xi \cdot \mathcal{R})\mathcal{P} = e^{i\xi\mathcal{R}}\mathcal{P}.$$

Таким чином, H є самоспряженим оператором у просторі Крейна $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{P}_\xi})$.

Лему доведено.

3. $\mathcal{PT}$-симетричні розширення симетричного оператора S. ***3.1. Опис $\mathcal{PT}$-симетричних розширень за допомогою методу просторів граничних значень.*** Нехай S — замкнений щільно визначений у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$ симетричний оператор із принаймні однією дійсною точкою регулярного типу [5, с. 349]. Остання умова означає, що S має рівні індекси дефекту [5, с. 352].

Розширення H симетричного оператора S називається *власним,* якщо $S \subset H \subset S^*$. Для опису власних розширень зручно використовувати метод просторів граничних значень (ПГЗ).

Нагадаємо [12], що ПГЗ оператора S^* називається трійка $(\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1)$, де Γ_0, Γ_1 — лінійні відображення $\mathcal{D}(S^*)$ у допоміжний гільбертів простір $\mathcal{H}$, що задовольняють умови:

1) $(S^*f, g) - (f, S^*g) = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{H}} \ \ \forall f, g \in \mathcal{D}(S^*)$;

2) відображення $(\Gamma_0, \Gamma_1) \colon \mathcal{D}(S^*) \to \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ сюр'єктивне.

Далі припускатимемо, що оператор *S є $\mathcal{PT}$-симетричним і комутує з усіма елементами алгебри Кліфорда $\mathcal{C}l_2(\mathcal{P}, \mathcal{R})$*, або, що еквівалентно, для всіх $f \in \mathcal{D}(S)$ виконуються тотожності

$$\mathcal{PT}Sf = S\mathcal{PT}f, \quad S\mathcal{P}f = \mathcal{P}Sf, \quad S\mathcal{R}f = \mathcal{R}Sf. \tag{3.1}$$

Лема 3.1. *Нехай симетричний оператор S із принаймні однією дійсною точкою регулярного типу задовольняє умови* (3.1). *Тоді існує такий* ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ *оператора S^*, що формули*

$$\mathcal{T}_{\mathcal{H}}\Gamma_j = \Gamma_j\mathcal{T}, \quad \mathcal{P}_{\mathcal{H}}\Gamma_j = \Gamma_j\mathcal{P}, \quad \mathcal{R}_{\mathcal{H}}\Gamma_j = \Gamma_j\mathcal{R}, \quad j = 0, 1, \tag{3.2}$$

коректно визначають оператор спряження $\mathcal{T}_{\mathcal{H}}$ та унітарні інволюції $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}$ і $\mathcal{R}_{\mathcal{H}}$ із наступними властивостями в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{T}_{\mathcal{H}}\mathcal{P}_{\mathcal{H}} = \mathcal{P}_{\mathcal{H}}\mathcal{T}_{\mathcal{H}}, \quad \mathcal{T}_{\mathcal{H}}\mathcal{R}_{\mathcal{H}} = \mathcal{R}_{\mathcal{H}}\mathcal{T}_{\mathcal{H}}, \quad \mathcal{P}_{\mathcal{H}}\mathcal{R}_{\mathcal{H}} = -\mathcal{R}_{\mathcal{H}}\mathcal{P}_{\mathcal{H}}. \tag{3.3}$$

Доведення. Покажемо, що існує такий ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1)$, що формули (3.2) коректно визначають оператори $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}, \mathcal{R}_{\mathcal{H}}$ і $\mathcal{T}_{\mathcal{H}}$. Спочатку встановимо, що

$$\mathcal{P} \colon N_{\pm i} \to N_{\pm i}, \quad \mathcal{R} \colon N_{\pm i} \to N_{\pm i}, \quad \mathcal{T} \colon N_{\pm i} \to N_{\mp i}, \tag{3.4}$$

де $N_{-i} := \ker\,(S^* + iI)$, $N_i := \ker\,(S^* - iI)$.

Справді, якщо $f \in N_i$, то $S^*f = if$, а тому $\mathcal{P}S^*f = \mathcal{P}if = i\mathcal{P}f$ внаслідок лінійності оператора $\mathcal{P}$. Врахувавши, що $S^*\mathcal{P} = \mathcal{P}S^*$, матимемо $S^*\mathcal{P}f = i\mathcal{P}f$, звідки й випливає, що $\mathcal{P} \colon N_i \to N_i$. Аналогічно доводяться й інші співвідношення (3.4).

Якщо S має дійсні точки регулярного типу, то його індекси дефекту є рівними. Звідси випливає, що $\dim N_{-i} = \dim N_i$, а тому існують унітарні оператори $V \colon N_{-i} \to N_i$.

Згідно із формулами фон Неймана, між самоспряженими розширеннями H оператора S та унітарними відображеннями V простору N_{-i} на простір N_i можна встановити взаємно однозначну відповідність за допомогою формули

$$\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(S) \dot{+} \{f_{-i} + Vf_{-i} \mid f_{-i} \in N_{-i}\}. \tag{3.5}$$

Використовуючи це співвідношення, можна побудувати ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ оператора S^* таким чином:

$$\mathcal{H} = N_i, \quad \Gamma_0 f = f_i - Vf_{-i}, \quad \Gamma_1 f = if_i + iVf_{-i}, \tag{3.6}$$

де $f = f_0 + f_{-i} + f_i \in \mathcal{D}(S^*)$, $f_0 \in \mathcal{D}(S)$, $f_{-i} \in N_{-i}$, $f_i \in N_i$.

Зрозуміло, що різноманітні додаткові властивості самоспряженого розширення H приводять до додаткових властивостей оператора V в (3.5) і, далі, до додаткових властивостей ПГЗ (3.6).

Зафіксуємо дійсну точку регулярного типу r оператора S і розглянемо оператор

$$H = S^* \upharpoonright_{\mathcal{D}(H)}, \quad \mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(S) \dot{+} \ker(S^* - rI). \tag{3.7}$$

Відомо, що формули (3.7) визначають самоспряжене розширення оператора S. Більше того, з комутації оператора S^* з операторами $\mathcal{P}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{T}$ (що очевидним чином випливає зі співвідношень (3.1) та леми 2.1) та з того факту, що точка r є *дійсною*, випливає, що оператор H комутує з $\mathcal{P}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{T}$, тобто

$$H\mathcal{P} = \mathcal{P}H, \quad H\mathcal{R} = \mathcal{R}H, \quad H\mathcal{T} = \mathcal{T}H. \tag{3.8}$$

Оскільки H є самоспряженим розширенням, то його область визначення задається деяким унітарним відображенням V у формулі (3.5). Покажемо, що для цього оператора V співвідношення (3.8) еквівалентні наступним співвідношенням:

$$V\mathcal{P} = \mathcal{P}V, \quad V\mathcal{R} = \mathcal{R}V, \quad \mathcal{T}V = V^{-1}\mathcal{T}. \tag{3.9}$$

Розглянемо останнє зі співвідношень (3.8). З нього випливає, що $\mathcal{T}\colon \mathcal{D}(H) \to \mathcal{D}(H)$. А оскільки $\mathcal{T}\colon N_{\pm i} \to N_{\mp i}$ (див. (3.4)), то з (3.5) випливає, що оператор $\mathcal{T}$ переводить множину $\{f_{-i} + Vf_{-i} \mid f_{-i} \in N_{-i}\}$ в себе, тобто $\mathcal{T}(f_{-i} + Vf_{-i}) = \mathcal{T}f_{-i} + \mathcal{T}Vf_{-i}$. Знову врахувавши третє зі співвідношень (3.4), отримаємо $\mathcal{T}f_{-i} = V\mathcal{T}Vf_{-i}$, звідки $\mathcal{T} = V\mathcal{T}V$. Отже, $\mathcal{T}V = V^{-1}\mathcal{T}$. Аналогічно доводяться й інші співвідношення з (3.9).

Розглянемо ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1)$, який визначається формулою (3.6) з оператором V, що має додаткові властивості (3.9). Тоді, як легко бачити, граничні оператори Γ_j задовольняють співвідношення (3.2) з[1]

$$\mathcal{P}_{\mathcal{H}} = \mathcal{P} \upharpoonright_{\mathcal{H}}, \quad \mathcal{R}_{\mathcal{H}} = \mathcal{R} \upharpoonright_{\mathcal{H}}, \quad \mathcal{T}_{\mathcal{H}} = -V\mathcal{T} \upharpoonright_{\mathcal{H}}.$$

Покажемо, наприклад, що $\Gamma_j\mathcal{P} = \mathcal{P} \upharpoonright_{\mathcal{H}} \Gamma_j$. Справді, для будь-якого $f \in \mathcal{D}(S^*)$:

$$\Gamma_0\mathcal{P}f = \Gamma_0\mathcal{P}(f_0 + f_i + f_{-i}) = \Gamma_0(\mathcal{P}f_0 + \mathcal{P}f_i + \mathcal{P}f_{-i}) =$$

$$= \mathcal{P}f_i - V\mathcal{P}f_{-i} = \mathcal{P}f_i - \mathcal{P}Vf_{-i} = \mathcal{P}\Gamma_0 f = \mathcal{P} \upharpoonright_{\mathcal{H}} \Gamma_0 f.$$

Так само переконуємося, що $\Gamma_1\mathcal{P} = \mathcal{P} \upharpoonright_{\mathcal{H}} \Gamma_1$.

Тепер із формул (2.6), (2.9) і (3.2) одержуємо співвідношення (3.3). А подвійне використання (3.2) і умови $\mathcal{P}^2 = \mathcal{R}^2 = \mathcal{T}^2 = I$ приводить до аналогічних співвідношень для операторів $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}$, $\mathcal{R}_{\mathcal{H}}$ і $\mathcal{T}_{\mathcal{H}}$.

Покладемо

$$H_0 = S^* \upharpoonright \ker\Gamma_0, \quad H_1 = S^* \upharpoonright \ker\Gamma_1. \tag{3.10}$$

Із загальної теорії ПГЗ відомо [13], що H_j є самоспряженими розширеннями оператора S (зауважимо, що із формул (3.5) та (3.6) випливає, що H_0 збігається з оператором H, визначеним

[1] Символ $\upharpoonright_{\mathcal{H}}$ означає звуження відповідного оператора на $\mathcal{H}$.

за допомогою (3.7)). Із рівностей (3.2) випливає, що оператори H_j комутують із операторами $\mathcal{P}, \mathcal{R}, \mathcal{T}$.

Покладемо

$$\Delta(f, g) = (S^* f, g) - (f, S^* g), \quad f, g \in \mathcal{D}(S^*). \tag{3.11}$$

Із означення ПГЗ випливає, що

$$\Delta(f_0, f_1) = (H_0 f_0, f_1) - (f_0, H_1 f_1) = (\Gamma_1 f_0, \Gamma_0 f_1)_{\mathcal{H}} \quad \forall f_j \in \mathcal{D}(H_j).$$

Підставляючи в цей вираз елементи $\mathcal{P} f_j$ замість f_j та використовуючи (3.2), одержуємо $\Delta(\mathcal{P} f_0, \mathcal{P} f_1) = (\Gamma_1 \mathcal{P} f_0, \Gamma_0 \mathcal{P} f_1)_{\mathcal{H}} = (\mathcal{P}_{\mathcal{H}} \Gamma_1 f_0, \mathcal{P}_{\mathcal{H}} \Gamma_0 f_1)_{\mathcal{H}}$.

З іншого боку,

$$\Delta(\mathcal{P} f_0, \mathcal{P} f_1) = (H_0 \mathcal{P} f_0, \mathcal{P} f_1) - (\mathcal{P} f_0, H_1 \mathcal{P} f_1) = (\mathcal{P} H_0 f_0, \mathcal{P} f_1) - (\mathcal{P} f_0, \mathcal{P} H_1 f_1) = \Delta(f_0, f_1).$$

Порівнюючи отримані рівності, отримуємо

$$(\mathcal{P}_{\mathcal{H}} \Gamma_1 f_0, \mathcal{P}_{\mathcal{H}} \Gamma_0 f_1)_{\mathcal{H}} = (\Gamma_1 f_0, \Gamma_0 f_1)_{\mathcal{H}} \quad \forall f_j \in \mathcal{D}(H_j).$$

Звідси та зі співвідношення $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}^2 = I \restriction_{\mathcal{H}}$ випливає, що $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}$ є унітарною інволюцією в $\mathcal{H}$ (див. (2.1)). Аналогічно можна показати, що $\mathcal{R}_{\mathcal{H}}$ також буде унітарною інволюцією в $\mathcal{H}$, а врахувавши (2.2) — що $\mathcal{T}_{\mathcal{H}}$ є оператором спряження в $\mathcal{H}$.

Лему доведено.

Зауважимо, що існування ПГЗ із властивостями, наведеними в лемі 3.1, можна також довести, спираючись на результати роботи [14].

Формули (2.7) та (3.2) встановлюють взаємно однозначну відповідність між елементами початкової алгебри Кліфорда $\mathcal{C}l_2(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ та її „образом" $\mathcal{C}l_2(\mathcal{P}_{\mathcal{H}}, \mathcal{R}_{\mathcal{H}})$ у допоміжному просторі $\mathcal{H}$. Зокрема, для кожної унітарної інволюції $\mathcal{P}_\xi$, визначеної за допомогою (2.10), її образом буде унітарна інволюція $\mathcal{P}_{\xi_{\mathcal{H}}}$ в $\mathcal{H}$, що визначається формулами

$$\mathcal{P}_{\xi_{\mathcal{H}}} \Gamma_j = \Gamma_j \mathcal{P}_\xi, \quad j = 0, 1. \tag{3.12}$$

Більше того, граничні оператори Γ_j із ПГЗ, який задовольняє умови леми 3.1, дозволяють отримати „образ" оператора спряження $\mathcal{PT}$ у вигляді оператора спряження $\mathcal{P}_{\mathcal{H}} \mathcal{T}_{\mathcal{H}}$, що діє в $\mathcal{H}$. Такі властивості дозволяють легко описувати різноманітні спеціальні класи власних розширень оператора S.

Твердження 3.1. *Нехай* ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ *оператора* S^* *задовольняє умови леми* 3.1, *а власні розширення* H *оператора* S *задаються як звуження* $H = S^* \restriction_{\mathcal{D}(H)}$ *на одну з множин*

$$\mathcal{D}(H) = \{f \in \mathcal{D}(S^*) \mid T \Gamma_0 f = \Gamma_1 f\}, \quad \mathcal{D}(H) = \{f \in \mathcal{D}(S^*) \mid T' \Gamma_1 f = \Gamma_0 f\}, \tag{3.13}$$

де T *та* T' *— замкнені щільно визначені оператори в* $\mathcal{H}$. *Тоді*:

1) *оператор* H *є* $\mathcal{PT}$-*симетричним в* $\mathfrak{H}$ *тоді і тільки тоді, коли оператор* T (*або* T') *є* $\mathcal{P}_{\mathcal{H}} \mathcal{T}_{\mathcal{H}}$-*симетричним в* $\mathcal{H}$;

2) *оператор* H *є самоспряженим у просторі Крейна* $(\mathfrak{H}, [\cdot, \cdot]_{\mathcal{P}_\xi})$ *тоді і тільки тоді, коли оператор* T (*або* T') *є самоспряженим у просторі Крейна* $(\mathcal{H}, [\cdot, \cdot]_{\mathcal{P}_{\xi_{\mathcal{H}}}})$, *де унітарні інволюції* $\mathcal{P}_\xi$ *та* $\mathcal{P}_{\xi_{\mathcal{H}}}$ *визначено формулами* (2.10) *та* (3.12) *відповідно.*

Доведення. Доведемо перше твердження.

Якщо оператор H є $\mathcal{PT}$-симетричним в $\mathfrak{H}$, то виконується рівність $\mathcal{PT}H = H\mathcal{PT}$, звідки випливає, зокрема, що оператор $\mathcal{PT}$ переводить область $\mathcal{D}(H)$ у себе. Звідси маємо, що для будь-якого $f \in \mathcal{D}(H)$ виконується рівність $T\Gamma_0\mathcal{PT}f = \Gamma_1\mathcal{PT}f$. Із (3.2) випливає, що тоді й $T\mathcal{P_H T_H}\Gamma_0 f = \mathcal{P_H T_H}\Gamma_1 f$, або $\mathcal{T_H P_H}T\mathcal{P_H T_H}\Gamma_0 f = \Gamma_1 f$. Оскільки за означенням $\mathcal{D}(H)$ має виконуватися рівність $T\Gamma_0 f = \Gamma_1 f$, то $\mathcal{T_H P_H}T\mathcal{P_H T_H} = T$, або $T\mathcal{P_H T_H} = \mathcal{P_H T_H}T$, звідки й випливає $\mathcal{P_H T_H}$-симетричність оператора T.

Навпаки, якщо оператор T є $\mathcal{P_H T_H}$-симетричним, то, міркуючи у зворотному напрямку, переконуємося в тому, що оператор $\mathcal{PT}$ переводить множину $\mathcal{D}(H)$ у себе. А оскільки оператор S є $\mathcal{PT}$-симетричним, то за лемою 2.1 оператор S^* також є $\mathcal{PT}$-симетричним. Врахувавши, що оператор H є звуженням оператора S^* на $\mathcal{D}(H)$, дістанемо, що H є $\mathcal{PT}$-симетричним оператором.

Аналогічні міркування мають місце й для оператора T'.

Доведемо друге твердження. Якщо оператор H є $\mathcal{P}_\xi$-самоспряженим в $\mathfrak{H}$, то виконується рівність $\mathcal{P}_\xi H = H^*\mathcal{P}_\xi$, звідки випливає, зокрема, що оператор $\mathcal{P}_\xi$ переводить область $\mathcal{D}(H)$ у $\mathcal{D}(H^*)$. Із теорії просторів граничних значень [13] відомо, що $\mathcal{D}(H^*) = \{f \in \mathcal{D}(S^*) \mid T^*\Gamma_0 f = \Gamma_1 f\}$. Тому для будь-якого $f \in \mathcal{D}(H)$ виконується рівність $T^*\Gamma_0\mathcal{P}_\xi f = \Gamma_1\mathcal{P}_\xi f$. Із (3.12) випливає, що тоді й $T^*\mathcal{P}_{\xi_\mathcal{H}}\Gamma_0 f = \mathcal{P}_{\xi_\mathcal{H}}\Gamma_1 f$, або $\mathcal{P}_{\xi_\mathcal{H}}T^*\mathcal{P}_{\xi_\mathcal{H}}\Gamma_0 f = \Gamma_1 f$. Оскільки за означенням $\mathcal{D}(H)$ має виконуватись рівність $T\Gamma_0 f = \Gamma_1 f$, то $\mathcal{P}_{\xi_\mathcal{H}}T^*\mathcal{P}_{\xi_\mathcal{H}} = T$, або $T^*\mathcal{P}_{\xi_\mathcal{H}} = \mathcal{P}_{\xi_\mathcal{H}}T$, звідки й випливає $\mathcal{P}_{\xi_\mathcal{H}}$-самоспряженість оператора T у просторі $\mathcal{H}$.

Навпаки, якщо оператор T є $\mathcal{P}_{\xi_\mathcal{H}}$-самоспряженим у просторі $\mathcal{H}$, то, міркуючи у зворотному напрямку, переконуємося в тому, що оператор $\mathcal{P}_\xi$ переводить множину $\mathcal{D}(H)$ у $\mathcal{D}(H^*)$. А оскільки оператор S комутує з усіма елементами алгебри Кліфорда $\mathcal{C}l_2(\mathcal{P},\mathcal{R})$, то S комутує і з $\mathcal{P}_\xi$, звідки випливає, що $S^*\mathcal{P}_\xi = \mathcal{P}_\xi S^*$. Тоді $S^*\mathcal{P}_\xi \restriction_{\mathcal{D}(H)} = \mathcal{P}_\xi S^* \restriction_{\mathcal{D}(H)}$, або $H^*\mathcal{P}_\xi = \mathcal{P}_\xi H$, тобто H є $\mathcal{P}_\xi$-самоспряженим в $\mathfrak{H}$ оператором.

Подібним чином проводиться доведення й для оператора T'.

Твердження доведено.

3.2. Випадок індексу дефекту $\langle 2, 2\rangle$. Інтерпретація $\mathcal{PT}$-симетричних операторів як самоспряжених у просторах Крейна. Твердження 3.1 зводить перевірку можливої інтерпретації $\mathcal{PT}$-симетричного розширення H оператора S як самоспряженого оператора у просторі Крейна $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{P}_\xi})$ до перевірки відповідної властивості для операторного параметра T (або T'). Це суттєво спрощує дослідження у випадку скінченних дефектних чисел оператора S, а у випадку індексу дефекту $\langle 2, 2\rangle$ дозволяє показати, що довільне $\mathcal{PT}$-симетричне квазісамоспряжене розширення можна інтерпретувати як самоспряжений оператор у просторі Крейна. Перед формулюванням відповідного результату нагадаємо [5] (пункт 114), що власне розширення H оператора S називається *квазісамоспряженим*, якщо H не є самоспряженим оператором і його область визначення $\mathcal{D}(H)$ задовольняє умову

$$\dim \mathcal{D}(H) = n \; (\operatorname{mod} \dim \mathcal{D}(S)),$$

де n — дефектне число оператора S.

Теорема 3.1. *Нехай симетричний оператор S із принаймні однією дійсною точкою регулярного типу має індекс дефекту $\langle 2, 2\rangle$. Тоді довільне $\mathcal{PT}$-симетричне квазісамоспряжене* *розширення H оператора S можна інтерпретувати як самоспряжений оператор у просторі Крейна $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{P}_\xi})$ при певному виборі параметра $\xi \in [0, 2\pi)$.*

Доведення. Згідно з лемою 3.1, існує ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ оператора S^* із властивостями (3.2), (3.3).

Припустимо, що квазісамоспряжене розширення H задається першою з формул (3.13). Оскільки S має індекс дефекту $\langle 2, 2\rangle$, розмірність допоміжного простору $\mathcal{H}$ дорівнює 2. Це означає, що алгебра Кліфорда $\mathcal{C}l_2(\mathcal{P}_\mathcal{H}, \mathcal{R}_\mathcal{H})$ із породжуючими операторами $\mathcal{P}_\mathcal{H}$ і $\mathcal{R}_\mathcal{H}$ *збігається з множиною усіх операторів, визначених на* $\mathcal{H}$. Таким чином, оператор T в (3.13) можна записати як

$$T = \alpha_0 I + \alpha_1 \mathcal{P}_\mathcal{H} + \alpha_2 \mathcal{R}_\mathcal{H} + \alpha_3 i\mathcal{R}_\mathcal{H}\mathcal{P}_\mathcal{H}, \quad \alpha_j \in \mathbb{C}, \tag{3.14}$$

де I — тотожний оператор в $\mathcal{H}$.

Якщо H є $\mathcal{PT}$-симетричним у просторі $\mathfrak{H}$, то за твердженням 3.1 T буде $\mathcal{P}_\mathcal{H}\mathcal{T}_\mathcal{H}$-симетричним в $\mathcal{H}$. Але з (3.3) та (3.14) випливає, що

$$\mathcal{P}_\mathcal{H}\mathcal{T}_\mathcal{H}T = (\overline{\alpha}_0 I + \overline{\alpha}_1\mathcal{P}_\mathcal{H} - \overline{\alpha}_2\mathcal{R}_\mathcal{H} + \overline{\alpha}_3 i\mathcal{R}_\mathcal{H}\mathcal{P}_\mathcal{H})\mathcal{P}_\mathcal{H}\mathcal{T}_\mathcal{H}.$$

Отже, T може бути $\mathcal{P}_\mathcal{H}\mathcal{T}_\mathcal{H}$-симетричним тоді і тільки тоді, коли

$$\alpha_0 = \overline{\alpha}_0, \quad \alpha_1 = \overline{\alpha}_1, \quad \alpha_2 = -\overline{\alpha}_2, \quad \alpha_3 = \overline{\alpha}_3. \tag{3.15}$$

Розглянемо унітарну інволюцію $\mathcal{P}_\xi$, визначену за допомогою (2.10). Згідно з твердженням 3.1, оператор H буде самоспряженим у просторі Крейна $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{P}_\xi})$ тоді і тільки тоді, коли оператор T буде самоспряженим в $(\mathcal{H}, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{P}_{\xi_\mathcal{H}}})$. Остання умова еквівалентна операторному рівнянню $T\mathcal{P}_{\xi_\mathcal{H}} = \mathcal{P}_{\xi_\mathcal{H}}T^*$. Враховуючи, що $\mathcal{P}_{\xi_\mathcal{H}} = e^{i\xi\mathcal{R}_\mathcal{H}}\mathcal{P}_\mathcal{H}$, одержуємо

$$T\mathcal{P}_{\xi_\mathcal{H}} = Te^{i\xi\mathcal{R}_\mathcal{H}}\mathcal{P}_\mathcal{H} = T(\cos\xi\cdot\mathcal{P}_\mathcal{H} + i\sin\xi\cdot\mathcal{R}_\mathcal{H}\mathcal{P}_\mathcal{H}) = (\alpha_1\cos\xi + \alpha_3\sin\xi)I +$$

$$+(\alpha_0\cos\xi + i\alpha_2\sin\xi)\mathcal{P}_\mathcal{H} + (i\alpha_3\cos\xi - i\alpha_1\sin\xi)\mathcal{R}_\mathcal{H} + (\alpha_0\sin\xi - i\alpha_2\cos\xi)i\mathcal{R}_\mathcal{H}\mathcal{P}_\mathcal{H},$$

$$\mathcal{P}_{\xi_\mathcal{H}}T^* = e^{i\xi\mathcal{R}_\mathcal{H}}\mathcal{P}_\mathcal{H}T^* = (\cos\xi\cdot\mathcal{P}_\mathcal{H} + i\sin\xi\cdot\mathcal{R}_\mathcal{H}\mathcal{P}_\mathcal{H})T^* = (\overline{\alpha}_1\cos\xi + \overline{\alpha}_3\sin\xi)I +$$

$$+(\overline{\alpha}_0\cos\xi - i\overline{\alpha}_2\sin\xi)\mathcal{P}_\mathcal{H} + (i\overline{\alpha}_1\sin\xi - i\overline{\alpha}_3\cos\xi)\mathcal{R}_\mathcal{H} + (\overline{\alpha}_0\sin\xi + i\overline{\alpha}_2\cos\xi)i\mathcal{R}_\mathcal{H}\mathcal{P}_\mathcal{H}.$$

Порівнюючи отримані вирази і беручи до уваги (3.15), отримуємо, що $\mathcal{P}_\mathcal{H}\mathcal{T}_\mathcal{H}$-симетричний оператор T самоспряжений у просторі Крейна $(\mathcal{H}, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{P}_{\xi_\mathcal{H}}})$ тоді і тільки тоді, коли

$$\alpha_1\sin\xi = \alpha_3\cos\xi. \tag{3.16}$$

Таким чином, кожний $\mathcal{PT}$-симетричний оператор T можна інтерпретувати як самоспряжений у просторі Крейна $(\mathcal{H}, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{P}_{\xi_\mathcal{H}}})$, де параметр ξ визначається за допомогою (3.16). Це означає, що довільне $\mathcal{PT}$-симетричне квазісамоспряжене розширення H, яке визначається першою із формул (3.13), можна реалізувати як самоспряжений оператор у деякому просторі Крейна $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{P}_\xi})$. Зрозуміло, що це твердження залишається правильним і для $\mathcal{PT}$-симетричних квазісамоспряжених розширень H, які визначаються другою із формул (3.13).

Розглянемо тепер $\mathcal{PT}$-симетричне квазісамоспряжене розширення H, яке не можна визначити за допомогою формул (3.13). Це означає, що існують такі елементи $f_j \in \mathcal{D}(H)$, що $f_j \in \ker \Gamma_j$, але $f_j \notin \mathcal{D}(S)$. Оскільки S має індекс дефекту $\langle 2, 2\rangle$, то

$$\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(S) \dot{+} \mathrm{span}\{f_0, f_1\}, \quad f_j \in \ker \Gamma_j \setminus \mathcal{D}(S). \tag{3.17}$$

Окрім того, елементи f_j належать до області визначення самоспряжених операторів H_j, визначених формулами (3.10). Ці оператори є також і $\mathcal{PT}$-симетричними розширеннями оператора S (завдяки твердженню 3.1). Це означає, що множини

$$\mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(H_j) = \mathcal{D}(S) \dot{+} \mathrm{span}\{f_j\}$$

є інваріантними відносно дії оператора $\mathcal{PT}$. Отже, $\mathcal{PT} f_j = u_j + \alpha(f_j) f_j$, де $u_j \in \mathcal{D}(S)$, а ненульове число $\alpha(f_j) \in \mathbb{C}$ залежить від вибору вектора f_j.

Подіємо оператором Γ_k $(k \neq j \in \{0, 1\})$ на останню рівність і використаємо (3.2). Як результат, отримаємо $\mathcal{P_H T_H} \Gamma_k f_j = \alpha(f_j) \Gamma_k f_j$. Звідси випливає, що $|\alpha(f_j)| = 1$.

Розглянемо тепер вектор $f'_j = \gamma f_j$, де $\gamma \in \mathbb{C}$. В цьому випадку $\mathcal{PT} f'_j = u'_j + \alpha(f'_j) f'_j$, де $\alpha(f'_j) = \alpha(f_j) \dfrac{\overline{\gamma}}{\gamma}$. У цій формулі $|\alpha(f_j)| = 1$, а γ є довільним комплексним числом. Таким чином, без обмеження загальності міркувань можемо вважати, що вектори f_j у (3.17) задовольняють співвідношення

$$\mathcal{P_H T_H} \Gamma_k f_j = \Gamma_k f_j \quad k \neq j, \quad k, j \in \{0, 1\}. \tag{3.18}$$

Використовуючи позначення (3.11) та беручи до уваги, що S^* комутує з $\mathcal{P}_\xi$, приходимо до висновку, що оператор H, визначений формулою (3.17), буде самоспряженим у просторі Крейна $(\mathfrak{H}, [\cdot, \cdot]_{\mathcal{P}_\xi})$ тоді і тільки тоді, коли білінійна форма

$$\Delta(\mathcal{P}_\xi f, g) = (S^* \mathcal{P}_\xi f, g) - (\mathcal{P}_\xi f, S^* g)$$

буде обертатись у нуль на множині $\mathrm{span}\{f_0, f_1\}$.

Зауважимо, що вектори f_j належать областям визначення самоспряжених операторів H_j, які комутують із $\mathcal{P}_\xi$. Це означає, що $\Delta(\mathcal{P}_\xi f_j, f_j) = 0$. Отже, форма $\Delta(\mathcal{P}_\xi f, g)$ є нульовою на $\mathrm{span}\{f_0, f_1\}$ тоді і тільки тоді, коли $\Delta(\mathcal{P}_\xi f_0, f_1) = 0$. Використовуючи (3.12), одержуємо $\Delta(\mathcal{P}_\xi f_0, f_1) = (\mathcal{P}_{\xi_\mathcal{H}} \Gamma_1 f_0, \Gamma_0 f_1)_\mathcal{H}$. Таким чином, H буде самоспряженим у просторі Крейна $(\mathfrak{H}, [\cdot, \cdot]_{\mathcal{P}_\xi})$ тоді і тільки тоді, коли

$$(\mathcal{P}_{\xi_\mathcal{H}} \Gamma_1 f_0, \Gamma_0 f_1)_\mathcal{H} = 0. \tag{3.19}$$

Оскільки $\mathcal{P}_{\xi_\mathcal{H}} = e^{i\xi \mathcal{R_H}} \mathcal{P_H} = \cos\xi \cdot \mathcal{P_H} + i \sin\xi \cdot \mathcal{R_H P_H}$, то (3.19) набирає вигляду

$$\cos\xi \cdot (\mathcal{P_H} \Gamma_1 f_0, \Gamma_0 f_1)_\mathcal{H} = -\sin\xi \cdot (i\mathcal{R_H P_H} \Gamma_1 f_0, \Gamma_0 f_1)_\mathcal{H}. \tag{3.20}$$

Тут вираз $(\mathcal{P_H} \Gamma_1 f_0, \Gamma_0 f_1)_\mathcal{H}$ є дійсним числом. Дійсно, з (3.18) отримуємо

$$(\mathcal{P_H} \Gamma_1 f_0, \Gamma_0 f_1)_\mathcal{H} = (\mathcal{T_H} \Gamma_1 f_0, \mathcal{T_H P_H} \Gamma_0 f_1)_\mathcal{H} = (\mathcal{P_H} \Gamma_0 f_1, \Gamma_1 f_0)_\mathcal{H} = (\Gamma_0 f_1, \mathcal{P_H} \Gamma_1 f_0)_\mathcal{H}.$$

Аналогічно переконуємося, що й вираз $(i\mathcal{R_H P_H} \Gamma_1 f_0, \Gamma_0 f_1)_\mathcal{H}$ є дійсним. Це випливає з наступного співвідношення:

$$(i\mathcal{R}_{\mathcal{H}}\mathcal{P}_{\mathcal{H}}\Gamma_1 f_0, \Gamma_0 f_1)_{\mathcal{H}} = (-\mathcal{T}_{\mathcal{H}} i\mathcal{R}_{\mathcal{H}}\Gamma_1 f_0, \mathcal{T}_{\mathcal{H}}\mathcal{P}_{\mathcal{H}}\Gamma_0 f_1)_{\mathcal{H}} =$$

$$= (\mathcal{P}_{\mathcal{H}}\Gamma_0 f_1, -i\mathcal{R}_{\mathcal{H}}\Gamma_1 f_0)_{\mathcal{H}} = (\Gamma_0 f_1, i\mathcal{R}_{\mathcal{H}}\mathcal{P}_{\mathcal{H}}\Gamma_1 f_0)_{\mathcal{H}}.$$

Таким чином, множники біля $\cos\xi$ та $\sin\xi$ у (3.20) є дійсними числами. В такому разі завжди знайдеться принаймні одне $\xi \in [0, 2\pi)$, для якого буде виконуватись (3.20), а отже, і рівність (3.19). При такому виборі ξ оператор H, визначений за допомогою (3.17), буде самоспряженим у просторі Крейна $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{P}_\xi})$. Теорему 3.1 доведено для всіх можливих класів $\mathcal{PT}$-симетричних квазісамоспряжених розширень оператора S.

3.3. Властивості $\mathcal{PT}$-симетричного розширення у випадку існування його самоспряжених інтерпретацій у різних просторах Крейна. Неважко бачити, що $\mathcal{P}_\xi = -\mathcal{P}_{\widetilde{\xi}}$ при $|\xi - \widetilde{\xi}| = \pi$. Таким чином, якщо $\mathcal{PT}$-симетричне розширення H є самоспряженим у просторі Крейна $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{P}_\xi})$, то те ж саме розширення H буде самоспряженим і у просторі Крейна $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{P}_{\widetilde{\xi}}})$. Отже, формально кажучи, довільне $\mathcal{PT}$-симетричне розширення H має самоспряжені інтерпретації у просторах Крейна $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{P}_\xi})$ і $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{P}_{\widetilde{\xi}}})$. Зрозуміло, що така властивість ніяк не впливає на спектр оператора H.

Ситуація докорінно змінюється у випадку, коли $\mathcal{PT}$-симетричне розширення H можна інтерпретувати як самоспряжений оператор у просторі Крейна $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{J}})$ із унітарною інволюцією $\mathcal{J}$, яка задається загальною формулою (2.8), але не має властивості $\mathcal{PT}$-симетрії: $\mathcal{PTJ} \neq \mathcal{JPT}$. Це призводить до „катастрофічних” спектральних наслідків.

Теорема 3.2. *Нехай симетричний оператор S із принаймні однією дійсною точкою регулярного типу має індекс дефекту $\langle 2, 2\rangle$ і $\mathcal{PT}$-симетричне квазісамоспряжене розширення H оператора S можна інтерпретувати як самоспряжений оператор у просторі Крейна $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{J}})$, де унітарна інволюція $\mathcal{J}$ задається формулою* (2.8), *але не має властивості $\mathcal{PT}$-симетрії. Тоді спектр оператора H збігається з комплексною площиною*: $\sigma(H) = \mathbb{C}$.

Доведення. Якщо $\mathcal{J}$ задається формулою (2.8), але не має властивості $\mathcal{PT}$-симетрії, то $\mathcal{J}$ не належить до підмножини $\{\mathcal{P}_\xi\}_{\xi\in[0,2\pi)}$ унітарних інволюцій (див. лему 2.2). Нагадаємо, що $\mathcal{P}_\xi = e^{i\xi\mathcal{R}}\mathcal{P} = (\cos\xi \cdot I + i\sin\xi \cdot \mathcal{R})\mathcal{P}$. Оскільки оператор $\mathcal{J}$ не може бути зображений як $\mathcal{J} = \mathcal{P}_\xi$, то у формулі (2.8) для $\mathcal{J}$ коефіцієнт α_2 є відмінним від нуля.

Самоспряженість H у просторі Крейна $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{J}})$ означає, що

$$(\alpha_1\mathcal{P} + \alpha_2\mathcal{R} + \alpha_3 i\mathcal{RP})H = H^*(\alpha_1\mathcal{P} + \alpha_2\mathcal{R} + \alpha_3 i\mathcal{RP}), \quad \alpha_2 \neq 0.$$

Діючи оператором $\mathcal{PT}$ на обидві частини останньої рівності та беручи до уваги, що, згідно з лемою 2.1, спряжений оператор H^* теж має властивість $\mathcal{PT}$-симетрії, отримуємо

$$(\alpha_1\mathcal{P} - \alpha_2\mathcal{R} + \alpha_3 i\mathcal{RP})H = H^*(\alpha_1\mathcal{P} - \alpha_2\mathcal{R} + \alpha_3 i\mathcal{RP}).$$

Віднявши від першої рівності другу і врахувавши, що $\alpha_2 \neq 0$, дістанемо $\mathcal{R}H = H^*\mathcal{R}$.

З іншого боку, згідно з теоремою 3.1, $\mathcal{P}_\xi H = H^*\mathcal{P}_\xi$ для певного $\xi \in [0, 2\pi)$. Отже,

$$i\mathcal{RP}_\xi H = i\mathcal{R}H^*\mathcal{P}_\xi = Hi\mathcal{RP}_\xi,$$

тобто H комутує з $i\mathcal{RP}_\xi$.

Зауважимо, що оператори $\mathcal{R}$ та $\mathcal{P}_\xi$ антикомутують. Отже, оператор $i\mathcal{R}\mathcal{P}_\xi$ є унітарною інволюцією в $\mathfrak{H}$ і простір $\mathfrak{H}$ може бути розкладений у пряму суму підпросторів:

$$\mathfrak{H} = (I + i\mathcal{R}\mathcal{P}_\xi)\mathfrak{H} \oplus (I - i\mathcal{R}\mathcal{P}_\xi)\mathfrak{H}. \tag{3.21}$$

Оскільки H комутує з $i\mathcal{R}\mathcal{P}_\xi$, то оператор H допускає матричне зображення

$$H = \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix}, \quad H_+ = H \upharpoonright_{(I+i\mathcal{R}\mathcal{P}_\xi)\mathfrak{H}}, \quad H_- = H \upharpoonright_{(I-i\mathcal{R}\mathcal{P}_\xi)\mathfrak{H}} \tag{3.22}$$

відносно розкладу (3.21).

Зауважимо, що симетричний оператор S також комутує з $i\mathcal{R}\mathcal{P}_\xi$, а отже, $S_+ \subseteq H_+ \subseteq S_+^*$ і $S_- \subseteq H_- \subseteq S_-^*$, де $S_+ = S \upharpoonright_{(I+i\mathcal{R}\mathcal{P}_\xi)\mathfrak{H}}$ є симетричним оператором з індексом дефекту $<1,1>$ у підпросторі $(I + i\mathcal{R}\mathcal{P}_\xi)\mathfrak{H}$ гільбертового простору $\mathfrak{H}$, а $S_- = S \upharpoonright_{(I-i\mathcal{R}\mathcal{P}_\xi)\mathfrak{H}}$ — симетричним оператором з індексом дефекту $<1,1>$ у підпросторі $(I - i\mathcal{R}\mathcal{P}_\xi)\mathfrak{H}$.

Унітарна інволюція $i\mathcal{R}\mathcal{P}_\xi$ *комутує* з оператором $\mathcal{PT}$. Тому із властивості $\mathcal{PT}$-симетричності оператора H випливають наступні співвідношення для операторів $H_\pm$ в (3.22):

$$\mathcal{PT}H_+ = H_+\mathcal{PT}, \quad \mathcal{PT}H_- = H_-\mathcal{PT}. \tag{3.23}$$

Покажемо, що за таких умов H_+ збігається з S_+ або з S_+^*.

Припустимо протилежне: H_+ є власним розширенням оператора S_+, тобто $S_+ \subset H_+ \subset S_+^*$.

Нехай ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ оператора S^* задовольняє умови леми 3.1. Тоді трійка $(\mathcal{H}', \Gamma_0 \upharpoonright_{\mathcal{D}(S_+^*)}, \Gamma_1 \upharpoonright_{\mathcal{D}(S_+^*)})$, де $\mathcal{H}' = (I + i\mathcal{R}_\mathcal{H}\mathcal{P}_{\xi_\mathcal{H}})\mathcal{H}$, буде ПГЗ оператора S_+^*. Оскільки S_+ має індекс дефекту $<1,1>$, то умова $S_+ \subset H_+ \subset S_+^*$ означає, що

$$\mathcal{D}(H_+) = \{f \in \mathcal{D}(S_+^*) \mid t\Gamma_0 f = \Gamma_1 f\} \quad \text{або} \quad \mathcal{D}(H_+) = \{f \in \mathcal{D}(S_+^*) \mid \Gamma_0 f = t\Gamma_1 f\},$$

де $t \in \mathbb{C}$. Припустимо для визначеності, що $\mathcal{D}(H_+)$ визначається першою з формул. Беручи до уваги властивості (3.2) і враховуючи (3.23), одержуємо $t\mathcal{P}_\mathcal{H}\mathcal{T}_\mathcal{H} = \mathcal{P}_\mathcal{H}\mathcal{T}_\mathcal{H} tI = \bar{t}\mathcal{P}_\mathcal{H}\mathcal{T}_\mathcal{H}$. Отже, число t може бути тільки дійсним. Це означає, що H_+ буде самоспряженим розширенням. Зазначимо, що якщо $S_+ \subset H_+ \subset S_+^*$, то обов'язково $S_- \subset H_- \subset S_-^*$ (інакше буде суперечність з умовою квазісамоспряженості H). Повторюючи попередні міркування, переконуємося, що H_- теж буде самоспряженим розширенням. Але тоді H — самоспряжений оператор, що суперечить умові квазісамоспряженості. Отримана суперечність приводить до висновку, що $H_+ = S_+$ і $H_- = S_-^*$, або $H_+ = S_+^*$ і $H_- = S_-$. Легко бачити, що при таких $H_\pm$ спектр відповідного оператора H збігається з $\mathbb{C}$ (див. [10]).

Теорему доведено.

3.4. Спектральний аналіз. Нехай $(\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ є довільним ПГЗ оператора S^*. Функція Вейля $M(\cdot)$ оператора S, асоційована з ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1)$, визначається таким чином [15]:

$$M(\mu)\Gamma_0 f_\mu = \Gamma_1 f_\mu \quad \forall f_\mu \in \ker(S^* - \mu I) \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \tag{3.24}$$

Значеннями функції Вейля $M(\mu)$ є оператори в $\mathcal{H}$, і її вигляд залежить від вибору ПГЗ. Зокрема, має місце така лема.

Лема 3.2. *Якщо індекс дефекту оператора S є $\langle 2,2\rangle$, а* ПГЗ $(\mathcal{H},\Gamma_0,\Gamma_1)$ *задовольняє умови леми* 3.1, *то відповідна функція Вейля має вигляд $M(\mu)=m(\mu)I$, де $m(\mu)$ є комплекснозначною аналітичною функцією в $\mathbb{C}_\pm$ такою, що $\overline{m(\mu)}=m(\overline{\mu})$.*

Доведення. Оскільки у випадку індексу дефекту $\langle 2,2\rangle$ алгебра Кліфорда $\mathcal{C}l_2(\mathcal{P}_\mathcal{H},\mathcal{R}_\mathcal{H})$ із породжуючими операторами $\mathcal{P}_\mathcal{H}$ і $\mathcal{R}_\mathcal{H}$ *збігається з множиною усіх операторів, визначених на* $\mathcal{H}$, то оператор $M(\mu)$ можна записати як

$$M(\mu)=m_0(\mu)I+m_1(\mu)\mathcal{P}_\mathcal{H}+m_2(\mu)\mathcal{R}_\mathcal{H}+m_3(\mu)i\mathcal{R}_\mathcal{H}\mathcal{P}_\mathcal{H},$$

де I — тотожний оператор в $\mathcal{H}$.

Із леми 2.13 у [10] випливає, що $M(\mu)$ комутує із операторами $\mathcal{P}_\mathcal{H}$ і $\mathcal{R}_\mathcal{H}$.

Оскільки $\mathcal{P}_\mathcal{H}M(\mu)=(m_0(\mu)I+m_1(\mu)\mathcal{P}_\mathcal{H}-m_2(\mu)\mathcal{R}_\mathcal{H}-m_3(\mu)i\mathcal{R}_\mathcal{H}\mathcal{P}_\mathcal{H})\mathcal{P}_\mathcal{H}=M(\mu)\mathcal{P}_\mathcal{H}$, то $m_2(\mu)=m_3(\mu)=0$, а оскільки $\mathcal{R}_\mathcal{H}M(\mu)=(m_0(\mu)I-m_1(\mu)\mathcal{P}_\mathcal{H}+m_2(\mu)\mathcal{R}_\mathcal{H}-m_3(\mu)i\mathcal{R}_\mathcal{H}\mathcal{P}_\mathcal{H})\times$ $\times\mathcal{R}_\mathcal{H}=M(\mu)\mathcal{R}_\mathcal{H}$, то $m_1(\mu)=m_3(\mu)=0$.

Звідси випливає, що $M(\mu)=m(\mu)I$, де $m(\mu):=m_0(\mu)$ є комплекснозначною аналітичною функцією в $\mathbb{C}_\pm$. Покажемо тепер, що функція $m(\mu)$ має властивість $\overline{m(\mu)}=m(\overline{\mu})$.

Очевидно, що якщо $f_\mu\in\ker(S^*-\mu I)$, то $\mathcal{PT}f_\mu\in\ker(S^*-\overline{\mu}I)$. Позначимо $\mathcal{PT}f_\mu$ через $f_{\overline{\mu}}$. Далі, із (3.24) маємо $M(\overline{\mu})\Gamma_0 f_{\overline{\mu}}=\Gamma_1 f_{\overline{\mu}}$. Звідси $M(\overline{\mu})\Gamma_0\mathcal{PT}f_\mu=\Gamma_1\mathcal{PT}f_\mu$, або $M(\overline{\mu})\mathcal{P}_\mathcal{H}\mathcal{T}_\mathcal{H}\Gamma_0 f_\mu=\mathcal{P}_\mathcal{H}\mathcal{T}_\mathcal{H}\Gamma_1 f_\mu$. Врахувавши (3.24), матимемо $M(\overline{\mu})\mathcal{P}_\mathcal{H}\mathcal{T}_\mathcal{H}\Gamma_0 f_\mu=\mathcal{P}_\mathcal{H}\mathcal{T}_\mathcal{H}M(\mu)\times$ $\times\Gamma_0 f_\mu$. Отже, $M(\overline{\mu})\mathcal{P}_\mathcal{H}\mathcal{T}_\mathcal{H}=\mathcal{P}_\mathcal{H}\mathcal{T}_\mathcal{H}M(\mu)$. А оскільки $M(\mu)=m(\mu)I$, то $m(\overline{\mu})\mathcal{P}_\mathcal{H}\mathcal{T}_\mathcal{H}=$ $=\mathcal{P}_\mathcal{H}\mathcal{T}_\mathcal{H}m(\mu)=\overline{m(\mu)}\mathcal{P}_\mathcal{H}\mathcal{T}_\mathcal{H}$, звідки $m(\overline{\mu})=\overline{m(\mu)}$.

Лему доведено.

Із теореми 3.2 випливає, що множина $\mathcal{PT}$-симетричних розширень оператора S містить оператори, спектр яких заповнює всю комплексну площину. Наступне твердження показує, що такі оператори не визначаються формулами (3.13).

Твердження 3.2. *Нехай індекс дефекту оператора S є $\langle 2,2\rangle$ а* ПГЗ $(\mathcal{H},\Gamma_0,\Gamma_1)$ *задовольняє умови леми* 3.1. *Тоді $\mathcal{PT}$-симетричні квазісамоспряжені розширення оператора S, спектр яких заповнює всю комплексну площину, не можуть задаватися формулами* (3.13).

Доведення. Нехай спектр $\mathcal{PT}$-симетричного квазісамоспряженого розширення H оператора S збігається з $\mathbb{C}$. Оскільки H є $\mathcal{PT}$-симетричним розширенням, то, згідно з теоремою 3.1, його можна інтерпретувати як $\mathcal{P}_\xi$-самоспряжений оператор для деякого $\xi\in[0,2\pi)$. Із результатів [10] випливає, що область $\mathcal{D}(H)$ може бути задана як звуження $\mathcal{D}(S^*)$ на множину $i(U+$ $+I)\Gamma_0 f+(U-I)\mathcal{P}_{\xi_\mathcal{H}}\Gamma_1 f=0$, де U — така унітарна інволюція в $\mathcal{H}$, що антикомутує з $\mathcal{P}_{\xi_\mathcal{H}}$.

Покажемо, що останню формулу не можна записати у вигляді жодної з формул (3.13). Для цього, очевидно, достатньо показати, що існують такі елементи $f_0,f_1\in\mathcal{D}(H)$, що $f_j\in\ker\Gamma_j$, але $f_j\notin\mathcal{D}(S)$.

Запишемо область визначення розширення H у вигляді

$$\mathcal{D}(H)=\{f\in\mathcal{D}(S^*)\mid i(U+I)\Gamma_0 f=\mathcal{P}_{\xi_\mathcal{H}}(U+I)\Gamma_1 f\} \tag{3.25}$$

і подамо простір $\mathcal{H}$ у вигляді $\mathcal{H}=\mathcal{H}_+ + \mathcal{H}_-$, де $\mathcal{H}_+=(I+U)\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_-=(I-U)\mathcal{H}$.

Із сюр'єктивності відображення $(\Gamma_0,\Gamma_1)\colon\mathcal{D}(S^*)\to\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ випливає існування таких елементів f_0 і f_1, що $\Gamma_0 f_0=0$, $\Gamma_1 f_0\neq 0$, до того ж $\Gamma_1 f_0\in\mathcal{H}_-$ і $\Gamma_0 f_1\neq 0$, $\Gamma_1 f_1=0$, а $\Gamma_0 f_1\in\mathcal{H}_-$. Із (3.25) одержуємо, що вектори f_0,f_1 належать $\mathcal{D}(H)$. Отже, елементи f_0 і f_1 є шуканими.

Твердження доведено.

Враховуючи твердження 3.2, доцільно проводити спектральний аналіз *лише для* $\mathcal{PT}$*-симетричних квазісамоспряжених розширень* H, *які задаються однією із формул* (3.13). Без обмеження загальності будемо вважати, що такі розширення задаються першою формулою в (3.13). Отже,

$$H = S^* \upharpoonright_{\mathcal{D}(H)}, \quad \mathcal{D}(H) = \{f \in \mathcal{D}(S^*) \mid T\Gamma_0 f = \Gamma_1 f\}. \tag{3.26}$$

Лема 3.3. *Оператор* H, *визначений за допомогою* (3.26), *одночасно буде* $\mathcal{PT}$*-симетричним і самоспряженим у просторі Крейна* $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{P}_\xi})$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$T = \beta_0 I + \beta_1 \mathcal{P}_{\xi_{\mathcal{H}}} + \beta_2 \mathcal{R}_{\mathcal{H}}, \tag{3.27}$$

де коефіцієнти β_0, β_1 *є дійсними, а коефіцієнт* β_2 *— чисто уявним.*

Доведення. Згідно із твердженням 3.1, оператор H одночасно буде $\mathcal{PT}$-симетричним та самоспряженим у просторі Крейна $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{P}_\xi})$ тоді і тільки тоді, коли

$$T\mathcal{P}_{\mathcal{H}}\mathcal{T}_{\mathcal{H}} = \mathcal{P}_{\mathcal{H}}\mathcal{T}_{\mathcal{H}}T \quad \text{та} \quad T\mathcal{P}_{\xi_{\mathcal{H}}} = \mathcal{P}_{\xi_{\mathcal{H}}}T^*.$$

Зауважимо, що фундаментальні симетрії $\mathcal{P}_{\xi_{\mathcal{H}}}$ і $\mathcal{R}_{\mathcal{H}}$ антикомутують у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. Тому алгебра Кліфорда $\mathcal{C}l_2(\mathcal{P}_{\xi_{\mathcal{H}}}, \mathcal{R}_{\mathcal{H}})$ із породжуючими операторами $\mathcal{P}_{\xi_{\mathcal{H}}}$ і $\mathcal{R}_{\mathcal{H}}$ збігається з множиною усіх операторів, визначених на $\mathcal{H}$. Таким чином, оператор T можна записати як

$$T = \beta_0 I + \beta_1 \mathcal{P}_{\xi_{\mathcal{H}}} + \beta_2 \mathcal{R}_{\mathcal{H}} + \beta_3 i\mathcal{R}_{\mathcal{H}}\mathcal{P}_{\xi_{\mathcal{H}}}, \quad \beta_j \in \mathbb{C}, \tag{3.28}$$

де I — тотожний оператор в $\mathcal{H}$. Міркуючи, як і при доведенні теореми 3.1, одержуємо, що перша та друга рівності в (3.28) еквівалентні умовам

$$\beta_0 = \overline{\beta}_0, \quad \beta_1 = \overline{\beta}_1, \quad \beta_2 = -\overline{\beta}_2, \quad \beta_3 = \overline{\beta}_3 \tag{3.29}$$

і

$$\beta_0 = \overline{\beta}_0, \quad \beta_1 = \overline{\beta}_1, \quad \beta_2 = -\overline{\beta}_2, \quad \beta_3 = -\overline{\beta}_3 \tag{3.30}$$

відповідно. Порівнюючи (3.29) і (3.30), завершуємо доведення леми.

Теорема 3.3. *Нехай* S *є симетричним оператором із принаймні однією дійсною точкою регулярного типу та індексом дефекту* $\langle 2, 2\rangle$, ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ *оператора* S^* *задовольняє умови леми* 3.1, *а* $M(\mu) = m(\mu)I$ *є відповідною функцією Вейля. Оператор* H, *визначений за допомогою* (3.26) *та* (3.27), *буде мати недійсне власне значення* $\mu \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ *тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти* β_j *у* (3.27) *задовольняють співвідношення*

$$\beta_0 = \mathrm{Re}\, m(\mu), \quad |\beta_2|^2 = \beta_1^2 + (\mathrm{Im}\, m(\mu))^2. \tag{3.31}$$

Доведення. Відомо [12], що $\mu \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ належить до точкового спектра оператора H, визначеного формулою (3.26), тоді і тільки тоді, коли рівняння $(T - M(\mu))h = 0$ має нетривіальний розв'язок $h \in \mathcal{H}$. З огляду на те, що оператор T визначається формулою (3.27), а функція Вейля має вигляд $M(\mu) = m(\mu)I$, запишемо це рівняння у вигляді

$$(\beta_0 - m(\mu))h + \beta_1 \mathcal{P}_{\xi_{\mathcal{H}}} h + \beta_2 \mathcal{R}_{\mathcal{H}} h = 0. \tag{3.32}$$

Оскільки простір $\mathcal{H}$ має розмірність 2, то його можна ототожнити з $\mathbb{C}^2$. Більше того, враховуючи, що $\mathcal{P}_{\xi_{\mathcal{H}}}$ та $\mathcal{R}_{\mathcal{H}}$ є антикомутуючими унітарними інволюціями в $\mathcal{H}$, це ототожнення можна визначити таким чином, що оператори $\mathcal{P}_{\xi_{\mathcal{H}}}$ і $\mathcal{R}_{\mathcal{H}}$ переходять в оператори множення на матриці Паулі $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ і $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ відповідно. Отже,

$$h \leftrightarrow \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \quad h_j \in \mathbb{C}, \quad \mathcal{P}_{\xi_{\mathcal{H}}} \leftrightarrow \sigma_1, \quad \mathcal{R}_{\mathcal{H}} \leftrightarrow \sigma_3.$$

Врахувавши ці ототожнення в (3.32), отримаємо еквівалентну систему рівнянь

$$(\beta_0 - m(\mu) + \beta_2)h_1 + \beta_1 h_2 = 0,'$$

$$\beta_1 h_1 + (\beta_0 - m(\mu) - \beta_2)h_2 = 0.$$

Підраховуючи дискримінант, приходимо до висновку, що система має нетривіальні розв'язки h_j тоді і тільки тоді, коли

$$(\beta_0 - m(\mu))^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 = 0.$$

Беручи до уваги, що β_0 та β_1 є дійсними числами, а β_2 — суто уявним числом (лема 3.3), а отже, $-\beta_2^2 = |\beta_2|^2$, та обчислюючи уявну та дійсну частини даного рівняння, отримуємо співвідношення (3.31).

Теорему доведено.

***Зауваження* 3.1.** У зображенні (3.27) оператора T параметри β_0 та β_1 характеризують його дійсну (самоспряжену) частину, а параметр β_2 описує уявну (антисамоспряжену) частину. Якщо $|\beta_2| \leq |\beta_1|$, то друга рівність у (3.31) не може виконуватись, і тоді відповідний оператор H буде мати лише дійсний спектр.

4. Приклад. Розглянемо оператор Шредінгера з кулонівським потенціалом на дійсній осі

$$l(u) = -\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{1}{|x|}u. \tag{4.1}$$

Кулонівський потенціал $V(x) = -\dfrac{1}{|x|}$ має сингулярність у точці $x = 0$ і відповідає випадку граничного кола з обох боків точки $x = 0$. На нескінченності цей потенціал відповідає випадку граничної точки.

Позначимо через S_+ та S_- мінімальні оператори, породжені виразом (4.1) у просторах $L_2(0, +\infty)$ та $L_2(-\infty, 0)$ відповідно. Ці оператори є симетричними з індексами дефекту $< 1, 1 >$. Таким чином, оператор S, визначений рівністю $S = S_- + S_+$ відносно розкладу $L_2(\mathbb{R}) = L_2(-\infty, 0) \oplus L_2(0, +\infty)$, буде симетричним у просторі $L_2(\mathbb{R})$ із індексом дефекту $\langle 2, 2 \rangle$

Оператор S є мінімальним оператором для виразу (4.1), що розглядається на дійсній осі. З означення S випливає, що $\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(S_-) \oplus \mathcal{D}(S_+)$. Тому область визначення максимального оператора S^*, асоційованого з виразом (4.1), також можна записати у вигляді $\mathcal{D}(S^*) = \mathcal{D}(S_-^*) \oplus$ $\oplus\, \mathcal{D}(S_+^*)$.

У просторі $L_2(\mathbb{R})$ розглянемо антикомутуючі унітарні інволюції

$$\mathcal{P}u(x) = u(-x), \quad \mathcal{R}u(x) = \mathsf{sgn}(x)u(x).$$

Легко бачити, що оператори S та S^* комутують із алгеброю Кліфорда $\mathcal{C}l_2(\mathcal{P}, \mathcal{R})$, а також виконуються співвідношення $\mathcal{P}\colon \mathcal{D}(S_-^*) \to \mathcal{D}(S_+^*)$ і

$$\mathcal{P}S_-^* f_- = S_+^* \mathcal{P} f_- \quad \forall f_- \in \mathcal{D}(S_-^*). \tag{4.2}$$

Покладемо

$$\eta_0(x) = -x, \quad \eta_1(x) = x \ln x + 1, \quad x \geq 0.$$

Відомо [16], що для всіх $f_+ \in \mathcal{D}(S_+^*)$ існують границі

$$[f_+, \eta_j]_0 := \lim_{x \to 0+} f_+(x)\overline{\eta_j'(x)} - f_+'(x)\overline{\eta_j(x)}, \quad j = 0, 1.$$

Зауважимо, що функції $f_- \in \mathcal{D}(S_-^*)$ мають носій, зосереджений на $(-\infty, 0)$. Тому функції $f_-(-x) = \mathcal{P}f_-(x)$ є відмінними від нуля на $(0, +\infty)$ і належать $\mathcal{D}(S_+^*)$. Отже, границі

$$[f_-, \eta_j]_0 := \lim_{x \to 0+} f_-(-x)\overline{\eta_j'(x)} - f_-'(-x)\overline{\eta_j(x)}, \quad j = 0, 1,$$

також існують.

Довільний елемент $f \in \mathcal{D}(S^*)$ запишемо у вигляді $f = f_- + f_+$, $f_\pm \in \mathcal{D}(S_\pm^*)$ і покладемо

$$\Gamma_0 f = \begin{pmatrix} [f_+, \eta_0]_0 \\ [f_-, \eta_0]_0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_1 f = \begin{pmatrix} [f_+, \eta_1]_0 \\ [f_-, \eta_1]_0 \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Лема 4.1. *Трійка* $(\mathbb{C}^2, \Gamma_0, \Gamma_1)$, *де оператори* Γ_j *визначені за допомогою* (4.3), *є* ПГЗ *оператора* S^* *із властивостями* (3.2), *тобто*

$$\mathcal{T}_{\mathbb{C}^2}\Gamma_j = \Gamma_j \mathcal{T}, \quad \sigma_1 \Gamma_j = \Gamma_j \mathcal{P}, \quad \sigma_3 \Gamma_j = \Gamma_j \mathcal{R}, \tag{4.4}$$

де $\mathcal{T}_{\mathbb{C}^2}$ *— оператор комплексного спряження в* $\mathbb{C}^2$, *а* σ_1, σ_3 *— матриці Паулі.*

Доведення. Покладемо $\Gamma_j^+ = [f_+, \eta_j]_0$. Тоді формули (4.3) можна записати у вигляді

$$\Gamma_0 f = \begin{pmatrix} \Gamma_0^+ f_+ \\ \Gamma_0^+ \mathcal{P} f_- \end{pmatrix}, \quad \Gamma_1 f = \begin{pmatrix} \Gamma_1^+ f_+ \\ \Gamma_1^+ \mathcal{P} f_- \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Відомо [17] (теорема 4), що трійка $(\mathbb{C}, \Gamma_0^+, \Gamma_1^+)$ є ПГЗ оператора S_+^*. Звідси, враховуючи (4.2), отримуємо, що трійка $(\mathbb{C}, \Gamma_0^+\mathcal{P}, \Gamma_1^+\mathcal{P})$ є ПГЗ оператора S_-^*. Беручи до уваги те, що S^* є ортогональною сумою операторів S_-^* і S_+^*, та формули (4.5), приходимо до висновку, що трійка $(\mathbb{C}^2, \Gamma_0, \Gamma_1)$ є ПГЗ оператора S^*. Формули (4.4) перевіряються безпосередньо з використанням (4.3) та означення $[f_\pm, \eta_j]_0$.

Лему 4.1 доведено.

Порівнюючи рівності (3.2) та (4.4), отримуємо $\mathcal{P}_\mathcal{H} = \sigma_1$ і $\mathcal{R}_\mathcal{H} = \sigma_3$. Тоді, враховуючи, що $\mathcal{P}_{\xi_\mathcal{H}} = (\cos\xi \cdot I + i \sin\xi \cdot \mathcal{R}_\mathcal{H})\mathcal{P}_\mathcal{H}$, одержуємо

$$\mathcal{P}_{\xi_\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\xi} \\ e^{-i\xi} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тепер із лем 3.3, 4.1 та теореми 3.3 одержуємо, що формула

$$H = S^* \restriction_{\mathcal{D}(H)},$$

$$\mathcal{D}(H) = \left\{ f \in \mathcal{D}(S^*) \middle| \begin{pmatrix} \beta_0 + \beta_2 & \beta_1 e^{i\xi} \\ \beta_1 e^{-i\xi} & \beta_0 - \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [f_+, \eta_0]_0 \\ [f_-, \eta_0]_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [f_+, \eta_1]_0 \\ [f_-, \eta_1]_0 \end{pmatrix} \right\},$$

де $f = f_- + f_+$ ($f_\pm \in \mathcal{D}(S_\pm^*)$), а $\beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}$, $\beta_2 \in i\mathbb{R}$, визначає породжені диференціальним виразом (4.1) $\mathcal{PT}$-симетричні оператори, які є самоспряженими у просторі Крейна $(L_2(\mathbb{R}), [\cdot,\cdot]_{\mathcal{P}_\xi})$, $\xi \in [0, 2\pi)$. Ці оператори мають дійсний спектр, якщо $|\beta_2| \leq |\beta_1|$. Якщо ця нерівність не виконується, наявність недійсних власних значень визначається рівняннями (3.31). Легко бачити, що в цих рівняннях функція $m(\cdot)$ є функцією Вейля симетричного оператора S_+, яка визначена за допомогою ПГЗ $(\mathbb{C}, \Gamma_0^+, \Gamma_1^+)$.

***Зауваження* 4.1.** За незначних модифікацій (зміна функцій $\eta_j(x)$) подібні результати можуть бути одержані для широкого класу операторів Шредінгера з парними сингулярними потенціалами, розглянутих у роботі А. Н. Кочубея [17]. Єдиною принциповою відмінністю таких моделей є різні функції Вейля $m(\mu)$ у рівняннях (3.31), які будуть давати різні розташування недійсних власних значень.

1. *Dirac P. A. M.* Bakerian lecture. The physical interpretation of quantum mechanics // Proc. Roy. Soc. London A. – 1942. – **180**, № 980. – P. 1 – 40.
2. *Bender C. M., Boettcher S.* Real spectra in non-Hermitian Hamiltonians having $\mathcal{PT}$-symmetry // Phys. Rev. Lett. – 1998. – **80**, № 24. – P. 5243 – 5246.
3. *Dorey P., Dunning C., Tateo R.* Spectral equivalence, Bethe ansatz, and reality properties in $\mathcal{PT}$-symmetric quantum mechanics // J. Phys. A: Math. and Gen. – 2001. – **34**, № 28. – P. 5679 – 5704.
4. *Bender C. M.* Making sense of non-Hermitian Hamiltonians // Repts Progr. Phys. – 2007. – **70**, № 6. – P. 947 – 1018.
5. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Наука, 1966. – 544 с.
6. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. – М.: Наука, 1986. – 352 с.
7. *Caliceti E., Cannata F., Graffi S.* $\mathcal{PT}$-symmetric Schrodinger operators, reality of the perturbed eigenvalues // SIGMA. – 2010. – **6**. – P. 9 – 17.
8. *Lounesto P.* Clifford algebras and spinors. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001. – 338 p.
9. *Günther U., Kuzhel S.* $\mathcal{PT}$-symmetry, Cartan decompositions, Lie triple systems and Krein space related Clifford algebras // J. Phys. A: Math. and Theor. – 2010. – **43**, № 39. – P. 392002 – 392011.
10. *Kuzhel S., Patsiuk O.* On self-adjoint operators in Krein spaces constructed by Clifford algebra $\mathcal{C}l_2$ // Opusc. Math. – 2012. – **32**, № 2. – P. 297 – 316.
11. *Kuzhel S., Trunk C.* On a class of *J*-self-adjoint-operators with empty resolvent set // J. Math. Anal. and Appl. – 2011. – **379**, № 1. – P. 272 – 289.
12. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л., Кочубей А. Н.* Теория расширений симметрических операторов и граничные задачи для дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. — 1989. – **41**, № 10. – С. 1299 – 1313.
13. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
14. *Кочубей А. Н.* О расширениях J-симметрических операторов // Теория функций, функцион. анализ и прил. – 1979. – **31**. – С. 74 – 80.
15. *Derkach V. A., Malamud M. M.* Generalized resolvents and the boundary value problems for Hermitian operators with gaps // J. Funct. Anal. – 1991. – **95**, № 1. – P. 1 – 95.
16. *Zettl A.* Sturm-Liouville theory. – Providence: Amer. Math. Soc., 2005. – 330 p.
17. *Кочубей А. Н.* Самосопряженные расширения оператора Шредингера с сингулярным потенциалом // Сиб. мат. журн. – 1991. – **32**, № 3. – С. 60 – 69.

Одержано 13.10.11