УДК 517.5

Я. В. Заболотний (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ОДНУ ЕКСТРЕМАЛЬНУ ЗАДАЧУ В. М. ДУБІНІНА

We obtain a particular solution of the known conjecture of V. N. Dubinin about nonoverlapping domains on a complex area.

Получено частное решение известной гипотезы В. Н. Дубинина о неналегающих областях на комплексной плоскости.

Одним із класичних напрямків розвитку геометричної теорії функцій комплексної змінної є розв'язання екстремальних задач на класах областей, що не перетинаються. Першим важливим результатом даної тематики була теорема Лаврентьєва [1]. Значний вклад у розвиток цього напрямку було зроблено багатьма авторами (див., наприклад, [1 – 13]).

Нехай $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}$ — множини натуральних і комплексних чисел відповідно, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — розширена комплексна площина або сфера Рімана, $\mathbb{C}^l = \underbrace{\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\ldots\times\mathbb{C}}_{l\ \text{разів}}$ — l-вимірний комплексний простір, який є добутком l комплексних площин (див., наприклад, [14]), $\overline{\mathbb{C}^l} = \underbrace{\overline{\mathbb{C}}\times\overline{\mathbb{C}}\times\overline{\mathbb{C}}\times\ldots\times\overline{\mathbb{C}}}_{l\ \text{разів}}$ — компактифікований l-вимірний комплексний простір, де множина нескінченно віддалених точок має комплексну розмірність $n-1$, $\Omega(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_l)$ — точка простору $\mathbb{C}^l$ з координатами ω_k. Поліциліндричною областю в $\overline{\mathbb{C}^l}$, як відомо [14], називається область $\mathbb{B} = \mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_2\times\mathbf{B}_3\times\ldots\times\mathbf{B}_l$, де $\mathbf{B}_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $\mathbf{B}_k$, $k=\overline{1,l}$, будемо називати координатними областями.

Узагальненим внутрішнім p-радіусом, $p\in\mathbb{N}$, $p\le l$, поліциліндричної області $\mathbb{B}$ в точці Ω ($\Omega\in\mathbb{B}$) будемо називати величину

$$\mathbb{R}_p(\mathbb{B},\Omega) := \left[\prod_{k=1}^{p} r(\mathbf{B}_k,\omega_k)\right]^{1/p}, \qquad p\in\mathbb{N},\quad p\le l,$$

де $r(\mathbf{B}_k,\omega_k)$ — внутрішній радіус координатної області $\mathbf{B}_k$ в точці ω_k (див., наприклад, [9, с. 70, 71]). У випадку, коли $p=l$, узагальнений внутрішній p-радіус будемо називати просто узагальненим внутрішнім радіусом $\mathbb{R}(\mathbb{B},\Omega) = \left[\prod_{k=1}^{l} r(\mathbf{B}_k,\omega_k)\right]^{1/l}$.

У роботі [7] було сформульовано наступну екстремальну задачу.

Задача 1. Довести, що максимум функціонала

$$I_\gamma = r^\gamma(B_0,a_0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k), \tag{1}$$

де B_0, B_1, $B_2,\ldots,B_n$, $n\ge 2$, — попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0=0$, $|a_k|=1$, $k=\overline{1,n}$, $r(B_j,a_j)$ — внутрішній радіус області B_j у точці a_j, $a_j\in B_j$, $j=\overline{0,n}$ і $\gamma\le n$, досягається для деякої конфігурації областей, які мають n-кратну симетрію.

В даній роботі доведено наступні теореми.

Теорема 1. *При $n = 3$ і $\gamma \in (0; 1,5]$ максимум функціонала I_γ досягається на системі областей D_0, D_1, D_2, D_3 в точках a_0, a_1, a_2, a_3, де D_k, $a_k \in D_k$, $k = \overline{0,3}$, — відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(9-\gamma)w^3 + \gamma}{w^2(w^3-1)^2}dw^2.$$

Теорема 2. *При $n = 4$ і $\gamma \in (0; 1{,}7]$ максимум функціонала I_γ досягається на системі областей D_0, D_1, D_2, D_3, D_4 в точках a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, де D_k, $a_k \in D_k$, $k = \overline{0,4}$, — відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(16-\gamma)w^4 + \gamma}{w^2(w^4-1)^2}dw^2.$$

Теорема 3. *Нехай у просторі $\mathbb{C}^l$ маємо систему поліциліндричних областей $\mathbb{B}_k = \mathbf{B}_1^{(k)} \times \times \mathbf{B}_2^{(k)} \times \mathbf{B}_3^{(k)} \times \ldots \times \mathbf{B}_l^{(k)}$, $k = \overline{0,n}$, і точок $\Omega_k = \left(\omega_1^{(k)}, \omega_2^{(k)}, \ldots, \omega_l^{(k)}\right)$, $k = \overline{0,n}$, які задовольняють наступні умови*:

1) $\Omega_0 = (0, 0, \ldots, 0)$,

2) $\Omega_k \in \mathbb{B}_k$,

3) *для* $m = \overline{1,l}$ $\mathbf{B}_m^0, \mathbf{B}_m^1, \mathbf{B}_m^2, \ldots, \mathbf{B}_m^n$, $n \geq 2$, — *попарно неперетинні області в* $\overline{\mathbb{C}}$, $|\omega_m^k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, *і число* $\gamma \in (0; 1]$.

Тоді виконується нерівність

$$\mathbb{R}^\gamma(\mathbb{B}_0, \Omega_0) \prod_{k=1}^{n} \mathbb{R}(\mathbb{B}_k, \Omega_k) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\dfrac{4\gamma}{n^2}\right)^{\gamma/n}}{\left(1 - \dfrac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\gamma/n}} \left(\frac{1 - \dfrac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \dfrac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \qquad (2)$$

***Доведення теореми* 1.** Для $\gamma = 1$ задачу 1 розв'язано в роботі [7]. Методом, використаним у цій роботі, можна встановити, що цей результат є правильним і для $0 < \gamma < 1$.

Встановимо спочатку, що дане твердження є правильним для $\gamma = 1,5$. Як і у випадку теореми 5.2.3 з роботи [9], доведення спирається на застосування методу розділяючого перетворення областей, який детально розроблено в роботі [7].

Згідно з умовою задачі $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,3}$. Припустимо для конкретності, що

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \arg a_3 < 2\pi.$$

Далі, означимо числа α_k таким чином:

$$\alpha_1 := \frac{1}{\pi}(\arg a_2 - \arg a_1), \qquad \alpha_2 := \frac{1}{\pi}(\arg a_3 - \arg a_2), \qquad \alpha_3 := \frac{1}{\pi}(2\pi - \arg a_3).$$

Нехай $P_k := \{w\colon \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}$, $k = \overline{1,3}$, $\arg a_4 = 2\pi$, $P_0 := P_3$, $P_4 := P_1$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2$.

Для кожного $k = \overline{1,3}$ позначимо через $z_k(w)$ ту гілку багатозначної аналітичної функції $z = -i(e^{-i\arg a_k}w)^{1/\alpha_k}$, $z_0 := z_3$, $z_4 := z_1$, яка конформно і однолисто відображає області P_k, $k = \overline{1,3}$, на праву півплощину $\operatorname{Re} z > 0$.

Тоді для областей B_k, $k=\overline{1,3}$, таких, як і в задачі 1, позначимо через $D_k^{(1)}$ об'єднання зв'язної компоненти множини $z_k(B_k \bigcap \overline{P_k})$, що містить точку $z_k(a_k)$, з її відображенням відносно уявної осі, а через $D_k^{(1)}$ об'єднання зв'язної компоненти множини $z_{k-1}\big(B_k \bigcap \overline{P_{k-1}}\big)$, що містить точку $z_{k-1}(a_k)$, з її відображенням відносно уявної осі, $D_0^{(2)} := D_2^{(2)}$. Сім'ю двох симетричних відносно уявної осі областей $\big\{D_k^{(1)}; D_{k-1}^{(2)}\big\}$ будемо називати результатом розділяючого перетворення області B_k. Для утворених областей, згідно з теоремою 3 роботи [8], виконується нерівність

$$\prod_{k=1}^{3} r(B_k, a_k) \leq \prod_{k=1}^{3} \alpha_k \left(r(D_{k+1}^{(i)}, i\right) r \left(D_k^{(2)}, -i\right) \Big)^{1/2}.$$

Аналогічно проводимо розділяюче перетворення області B_0 і отримуємо нерівність $r(B_0, 0) \leq \prod_{k=1}^{3} \left(r(D_0^{(k)}; 0)\right)^{\alpha_k^2/2}$.

Далі, як і при доведенні теореми 5.2.3 [9], за допомогою розділяючого перетворення отримуємо нерівність

$$I_\gamma \leq \left[\prod_{k=1}^{3} \alpha_k r^{\gamma \alpha_k^2} \cdot (D_0, 0) \cdot r(D_1, i) \cdot r(D_2, -i) \right]^{1/2}, \tag{3}$$

де D_k — кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w) dw^2 = -\frac{(9-\gamma) w^3 + \gamma}{w^2 (w^3 - 1)^2} dw^2.$$

Дана нерівність виконується для $\gamma \leq 1$ на основі результатів роботи [8]. Для $\gamma > 1$ її застосування, взагалі кажучи, некоректне. Воно можливе у випадку $\alpha_k \sqrt{\gamma} \leq 2$, $k = \overline{1,n}$. Знайдемо умови виконання цієї нерівності для $\gamma = 1,5$.

Нехай для конкретності $r(B_0, 0) = p$. Тоді

$$I_\gamma = r^\gamma (B_0, a_0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) = p^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq p^\gamma \frac{64}{81\sqrt{3}} |a_1 - a_2| |a_1 - a_3| |a_2 - a_3|. \tag{4}$$

Остання нерівність виконується на основі теореми Голузіна [2, с. 165].

Доведемо, що області, які можуть бути екстремальними, задовольняють умову $\alpha_0 \leq \dfrac{2}{\sqrt{\gamma}}$, де $\alpha_0 = \max\{\alpha_k\}$, $k = \overline{1,n}$. Припустимо протилежне, а саме, $\alpha_0 > \dfrac{2}{\sqrt{\gamma}}$. Обчислимо значення функціонала

$$I_\gamma^0 = r^\gamma (D_0, a_0) \prod_{k=1}^{3} r(D_k, a_k).$$

Згідно з теоремою 5.2.3 роботи [9]

$$I_\gamma^0 = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\dfrac{4\gamma}{n^2}\right)^{\gamma/n}}{\left(1 - \dfrac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\gamma/n}} \left(\frac{1 - \dfrac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \dfrac{\sqrt{\gamma}}{n}} \right)^{2\sqrt{\gamma}}. \tag{5}$$

Підставивши в (5) $\gamma = 1,5$ і $n = 3$, отримаємо $I_{1,5}^0 \approx 0,9423$.

Далі нам потрібне наступне твердження.

Лема. *Нехай $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n$, $n \geq 2$, — попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, $a_j \in B_j$, $j = \overline{0,n}$, $q > 0$, $q \in \mathbb{R}$, $r(B_j, a_j)$ — внутрішній радіус області B_j у точці a_j, $a_j \in B_j$ і $\gamma < n$. Тоді за умови, що $r(B_0, a_0) \geq q^{1/(\gamma-n)}$, виконується нерівність*

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq q.$$

Доведення. Нехай $r(B_0, a_0) = p \geq q^{1/(\gamma-n)}$. Застосувавши теорему Лаврентьєва [1] для областей B_0 і B_1, отримаємо нерівність $r(B_0, 0) r(B_1, a_1) \leq | a_1 | = 1$. Оскільки $r(B_0, 0) = p$, то $r(B_1, a_1) \leq \dfrac{1}{p}$. Так само $r(B_k, a_k) \leq \dfrac{1}{p}$ для $k = \overline{1,n}$. Тоді

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq p^\gamma \frac{1}{p^n} = p^{\gamma-n} \leq (q^{1/(\gamma-n)})^{\gamma-n} = q.$$

Лему доведено.

Далі, для $\gamma = 1,5$ і $n = 3$ застосуємо лему, взявши $q = I_{1,5}^0$. Таким чином отримаємо, що при $r(B_0, a_0) \geq (I_{1,5}^0)^{1/(\gamma-n)} \approx 1,0404$ виконується нерівність $r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq I_{1,5}^0$, тому конфігурації областей для таких значень $r(B_0, a_0)$ не можуть бути екстремальними.

Нехай тепер $p \leq p_0 = (I_{1,5}^0)^{1/(\gamma-n)}$. Тоді згідно з (4)

$$I_\gamma \leq 4p^\gamma \cdot \frac{64}{81\sqrt{3}} |a_1 - a_2||a_1 - a_3||a_2 - a_3|.$$

Далі, нехай $\alpha_0 \geq \dfrac{2}{\sqrt{\gamma}}$. Візьмемо для конкретності $\alpha_1 = \alpha_0$. Тоді

$$|a_1 - a_2| = 2 \sin \frac{\alpha_1 \pi}{2} \leq 2 \sin \frac{2 - \dfrac{2}{\sqrt{\gamma}} \pi}{2} = 2 \sin \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right) \pi = 2 \sin \frac{\pi}{\sqrt{\gamma}}.$$

Далі, оскільки $\alpha_2 + \alpha_3 = 2 - \alpha_1 \leq \dfrac{2}{\sqrt{\gamma}}$, за нерівністю Коші максимальне значення добутку $|a_1 - a_3||a_2 - a_3|$ отримаємо у випадку, коли $|a_1 - a_3| = |a_2 - a_3|$, тобто при $\alpha_2 = \alpha_3 \leq 1 - \dfrac{1}{\sqrt{\gamma}}$. Звідси $|a_1 - a_3| = |a_2 - a_3| \leq 2 \sin \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{\gamma}}\right) \dfrac{\pi}{2}$. Отже, для $\alpha_0 \geq \dfrac{2}{\sqrt{\gamma}}$

$$I_\gamma \leq p_0^\gamma \cdot \frac{64}{81\sqrt{3}} |a_1 - a_2||a_1 - a_3||a_2 - a_3| \leq 8 p_0^\gamma \cdot \frac{64}{81\sqrt{3}} \sin \frac{\pi}{\sqrt{\gamma}} \sin^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right) \frac{\pi}{2}.$$

Підставивши відповідні значення γ і p_0, отримаємо $I_\gamma \leq 0,3665 \ll I_{1,5}^0$, тобто для $\alpha_0 \geq \dfrac{2}{\sqrt{\gamma}}$ конфігурації областей не можуть бути екстремальними.

Тому $\alpha_0 \leq \dfrac{2}{\sqrt{\gamma}}$, і ми можемо застосовувати нерівність (3).

Далі запишемо нерівність, отриману при доведенні теореми 4 із [8]:

$$I_\gamma \le \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left[\prod_{k=1}^{3} 2^{\sigma_k+6}\sigma_k^{\sigma_k+2}(2-\sigma_k)^{-\frac{1}{2}(2-\sigma_k)^2}(2+\sigma_k)^{-\frac{1}{2}(2+\sigma_k)^2}\right]^{1/2},$$

де $\sigma_k = \sqrt{\gamma}\alpha_k$. Введемо функцію

$$\Psi(\sigma) = 2^{\sigma+6}\sigma^{\sigma+2}(2-\sigma)^{-\frac{1}{2}(2-\sigma)^2}(2+\sigma)^{-\frac{1}{2}(2+\sigma)^2}$$

для $\sigma \in [0,2]$ і, використавши її поведінку на цьому проміжку, доведемо екстремальність конфігурації областей D_0, D_1, D_2, D_3.

Функція $\Psi(\sigma)$ логарифмічно опукла на проміжку $[0;x_0]$, де $x_0 \approx 1,32$. На проміжку $[0;x_1]$, де $x_1 \approx 1,05$, вона зростає від $\Psi(0)=0$ до $\Psi(x_1)\approx 0,9115$, спадає на проміжку $[x_1;x_2]$, де $x_2 \approx 1,6049$, до $\Psi(x_2)\approx 0,86$, а на проміжку $[x_2;2]$ зростає до $\Psi(2)=1$. Для точки $x_3\approx 1,9$ $\Psi(x_3)=\Psi(x_1)\approx 0,9115$. Тепер, використавши рівність $\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3 = 2\sqrt{\gamma}$, доведемо, що $\Psi(\sigma_1)\Psi(\sigma_2)\Psi(\sigma_3) \le \left(\Psi\left(\frac{2}{3}\sqrt{\gamma}\right)\right)^3 \approx 0,8367$. Для $\sigma_k \in [0;x_0]$ відповідний висновок робимо на підставі логарифмічної опуклості функції $\Psi(\sigma)$. Для $\sigma_3 \in [x_0;x_3]$ він випливає із властивостей графіка функції $\Psi(\sigma)$, $\Psi(\sigma_k) \le \Psi\left(\frac{2}{3}\sqrt{\gamma}\right)$, $k=\overline{1,3}$, а тому $\Psi(\sigma_1)\Psi(\sigma_2)\Psi(\sigma_3) \le$ $\le \left(\Psi\left(\frac{2}{3}\sqrt{\gamma}\right)\right)^3$. Якщо ж $\sigma_3 \in [x_3;2]$, то $\Psi(\sigma_3) < \Psi(2) = 1$, $\Psi(\sigma_1) < \Psi(0,2) \ll 0,4$, $\Psi(\sigma_2) < \Psi(0,2) \ll 0,4$, звідки $\Psi(\sigma_1)\Psi(\sigma_2)\Psi(\sigma_3) < 0,16 < \left(\Psi\left(\frac{2}{3}\sqrt{\gamma}\right)\right)^3$. Отже, $I_\gamma \le I_\gamma^0(x_1)$, тому екстремальних конфігурацій областей ми не отримаємо.

Для $\gamma = 1,5$ теорему доведено.

Доведемо, що функціонал I_γ^0, як функція від γ, монотонно спадає на проміжку $[1;1,5]$. Для цього візьмемо логарифмічну похідну від виразу

$$I_\gamma^0 = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\gamma/n}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\gamma/n}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}$$

для $n=3$. В результаті отримаємо

$$\left(\ln\left(I_\gamma^0\right)\right)' = \frac{1}{3}\ln\frac{4\gamma}{9} - \frac{1}{3} - \frac{\gamma}{3}\ln\left(1-\frac{\gamma}{9}\right) + \frac{9+\gamma}{27-3\gamma} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\ln\left(1-\frac{\sqrt{\gamma}}{3}\right) -$$

$$-\frac{1}{3-\sqrt{\gamma}} - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\ln\left(1+\frac{\sqrt{\gamma}}{3}\right) - \frac{1}{3+\sqrt{\gamma}}.$$

На проміжку $[1;1,5]$

$$\left(\ln\left(I_\gamma^0\right)\right)' \le \frac{1}{3}\ln\frac{6}{9} - \frac{1}{3} - \frac{1,5}{3}\ln\left(1-\frac{1,5}{9}\right) + \frac{9+1,5}{27-31,5} - \frac{1}{3-\sqrt{1}} \approx$$

$$\approx -0,1351 - \frac{1}{3} + 0,0922 + 0,4667 - \frac{1}{2} \approx -0,4095 < 0,$$

тому дана функція є монотонно спадною, а отже, $I^0_\gamma > I^0_{1,5}$ при $\gamma \in [1; 1,5]$. За властивостями функції $\sin x$ отримаємо

$$I_\gamma \le 8p_0^\gamma \frac{64}{81\sqrt{3}} \sin\frac{\pi}{\sqrt{\gamma}} \sin^2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)\frac{\pi}{2} \le I_{1,5}.$$

Таким чином, $\dfrac{I_\gamma}{I^0_\gamma} \le \dfrac{I_{1,5}}{I^0_{1,5}} < 1$. Звідси для $\gamma \in [1; 1,5]$ $I_\gamma \le I^0_\gamma$, а тому I^0_γ — шукана екстремальна конфігурація областей.

Теорему доведено.

***Доведення теореми* 2** аналогічне доведенню попередньої теореми. Для $\gamma = 1$ задачу розв'язано в роботі [7]. Методом, використаним у цій роботі, можна встановити цей результат і для $0 < \gamma < 1$.

Встановимо спочатку теорему при $\gamma = 1,7$. Використавши метод розділяючого перетворення областей, як і вище, отримаємо нерівність (3).

Підставивши $\gamma = 1,7$ і $n = 4$, одержимо $I^0_{1,7} \approx 0,1957$.

Далі, при $\gamma = 1,7$ і $n = 4$ застосуємо лему 1, взявши $q = I^0_{1,7}$. Таким чином отримаємо, що для $r(B_0, a_0) \ge (I^0_{1,7})^{1/(\gamma-4)} \approx 2,0324$ $r^\gamma(B_0, a_0)\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \le I^0_{1,7}$, тому конфігурації областей при таких значеннях $r(B_0, a_0)$ не можуть бути екстремальними.

Нехай тепер $p \le p_0 = (I^0_{1,7})^{1/(\gamma-n)}$. Тоді за теоремою Кузьміної [15] $I_\gamma \le p^\gamma \dfrac{9}{4^{8/3}}(|a_1 - a_2||a_1 - a_3||a_2 - a_3||a_1 - a_4||a_2 - a_4||a_3 - a_4|)^{2/3}$. Далі, за нерівністю Коші максимальне значення добутку отримаємо у випадку, коли $|a_1 - a_2| = |a_2 - a_3| = |a_3 - a_4|$. Звідси $|a_1 - a_2| = |a_2 - a_3| = |a_3 - a_4| = 2\sin\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)\dfrac{\pi}{6}$. Отже, для $\alpha_0 \ge \dfrac{2}{\sqrt{\gamma}}$

$$I_\gamma \le p_0^\gamma \cdot 16\frac{9}{4^{8/3}}(|a_1 - a_2||a_1 - a_3||a_2 - a_3||a_1 - a_4||a_2 - a_4||a_3 - a_4|)^{2/3} \le$$

$$\le p_0^\gamma \cdot 16\frac{9}{4^{8/3}}\sin^2\left(2 - \frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin^{4/3}\left(2 - \frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin^{2/3}\left(2 - \frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Підставивши відповідні значення γ і p_0, одержимо $I_\gamma \le 0,1939 < I^0_{1,7}$, тобто для $\alpha_0 \ge \dfrac{2}{\sqrt{\gamma}}$ конфігурації областей не можуть бути екстремальними.

Отже, $\alpha_0 \le \dfrac{2}{\sqrt{\gamma}}$, і ми можемо застосувати нерівність (3).

Далі нам буде потрібна нерівність, отримана при доведенні теореми 5.2.3 із [9]:

$$I_\gamma \le \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left[\prod_{k=1}^4 2^{\sigma_k+6}\sigma_k^{\sigma_k+2}(2-\sigma_k)^{-\frac{1}{2}(2-\sigma_k)^2}(2+\sigma_k)^{-\frac{1}{2}(2+\sigma_k)^2}\right]^{1/2},$$

де $\sigma_k = \sqrt{\gamma}\alpha_k$. Введемо функцію

$$\Psi(\sigma) = 2^{\sigma+6}\sigma^{\sigma+2}(2-\sigma)^{-\frac{1}{2}(2-\sigma)^2}(2+\sigma)^{-\frac{1}{2}(2+\sigma)^2}$$

для $\sigma \in [0, 2]$ і, використовуючи її поведінку на цьому проміжку, доведемо екстремальність конфігурації областей D_0, D_1, D_2, D_3, D_4.

Функція $\Psi(\sigma)$ логарифмічно опукла на проміжку $[0; x_0]$, де $x_0 \approx 1,32$. На проміжку $[0; x_1]$, де $x_1 \approx 1,05$, вона зростає від $\Psi(0) = 0$ до $\Psi(x_1) \approx 0,9115$, спадає на проміжку $[x_1; x_2]$, де $x_2 \approx 1,6049$, до $\Psi(x_2) \approx 0,86$, а на проміжку $[x_2; 2]$ зростає до $\Psi(2) = 1$. Для точки $x_3 \approx 1,9$ $\Psi(x_3) = \Psi(x_1) \approx 0,9115$. Тепер, використавши рівність $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 = 2\sqrt{\gamma}$, доведемо, що $\Psi(\sigma_1)\Psi(\sigma_2)\Psi(\sigma_3)\Psi(\sigma_4) \leq \left(\Psi\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{2}\right)\right)^4 \approx 0,0125$. Виконуючи ті ж самі операції, що і при доведенні попередньої теореми, переконуємося, що і в такому випадку інших екстремальних конфігурацій областей ми не отримаємо.

Для $\gamma = 1,7$ теорему доведено.

Як і при доведенні попередньої теореми, покажемо, що $\frac{I_\gamma}{I_\gamma^0} \leq \frac{I_{1,7}}{I_{1,7}^0} < 1$. Звідси для $\gamma \in$ $\in [1; 1,7]$ $\;I_\gamma \leq I_\gamma^0$, а тому I_γ^0 — шукана екстремальна конфігурація областей.

Теорему 2 доведено.

***Доведення теореми* 3.** Виконаємо наступні перетворення:

$$\mathbb{R}^\gamma(\mathbb{B}_0, \Omega_0) \prod_{k=1}^n \mathbb{R}(\mathbb{B}_k, \Omega_k) = \left[\prod_{m=1}^l r(\mathbf{B}_m^{(0)}, \Omega_m^{(0)})\right]^{\gamma/l} \prod_{k=1}^n \left[\prod_{m=1}^l r(\mathbf{B}_m^{(k)}, \Omega_m^{(k)})\right]^{1/l} =$$

$$= \left[\prod_{m=1}^l \left[(r(\mathbf{B}_m^{(0)}, \Omega_m^{(0)}))^\gamma \prod_{k=1}^n r(\mathbf{B}_m^{(k)}, \Omega_m^{(k)})\right]\right]^{1/l}.$$

Тоді для $m = \overline{1,l}$ області $\mathbf{B}_m^{(k)}$, $k = \overline{0,n}$, утворюють систему неперетинних областей, для якої виконуються всі умови теореми 1 [8]. Тому

$$\left[(r(\mathbf{B}_m^{(0)}, \Omega_m^{(0)}))^\gamma \prod_{k=1}^n r(\mathbf{B}_m^{(k)}, \Omega_m^{(k)})\right] \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\gamma/n}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\gamma/n}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Підставивши отриманий вираз у попередню рівність, одержимо

$$\mathbb{R}^\gamma(\mathbb{B}_0, \Omega_0) \prod_{k=1}^n \mathbb{R}(\mathbb{B}_k, \Omega_k) \leq \left[\prod_{m=1}^l \left[\left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\gamma/n}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\gamma/n}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}\right]\right]^{1/l} =$$

$$= \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\gamma/n}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\gamma/n}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Теорему 3 доведено.

Автор висловлює подяку О. К. Бахтіну за постановку задач та цінні поради і зауваження щодо написання даної роботи.

1. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – **5**. – С. 159–245.
2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М: Наука, 1966. – 628 с.
3. *Хейман В К.* Многолистные функции. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 180 с.
4. *Дженкинс Дж.* А. Однолистные функции и конформные отображения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.
5. *Колбина Л. И.* Конформное отображение единичного круга на неналегающие области // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1955. – **5**. – С. 37–43.
6. *Бахтина Г. П.* Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях: Автореф. дис. . . . канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1975. – 11 с.
7. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – **49**, № 1(295). – С. 3–76.
8. *Дубинин В. Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **168**. – С. 48–66.
9. *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2008. – **73**. – 308 с.
10. *Бахтин А. К.* Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей и открытых множеств // Доп. НАН України. – 2006. – № 10. – С. 7–13.
11. *Бахтин А. К.* Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на окружности // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 7. – С. 868–886.
12. *Бахтин А. К.* Точные оценки для внутренних радиусов систем неналегающих областей и открытых множеств // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 12. – С. 1601–1618.
13. *Бахтін О. К.* Нерівності для внутрішніх радіусів неперетинних областей та відкритих множин // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 5. – С. 596–610.
14. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. – М.: Наука, 1972. – 571 с.
15. *Кузьмина Г. В.* К вопросу об экстремальном разбиении римановой сферы // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1990. – **185**. – С. 96–110.

Отримано 28.12.10,
після доопрацювання — 23.12.11