УДК 517.95

О. Д. Власій, Б. Й. Пташник
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

НЕЛОКАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ, НЕ РОЗВ'ЯЗНИХ ВІДНОСНО СТАРШОЇ ПОХІДНОЇ ЗА ЧАСОМ*

We investigate the correctness of the problem with general nonlocal boundary conditions with respect to time variable and conditions of the periodicity with respect to space coordinates for partial differential equations unsolved with respect to the higher time derivative. We establish conditions for the existence and uniqueness of the solution of considered problem. In proving the existence of the solution, we use the method of divided differences. We prove metric statements on lower bounds of small denominators which appear in constructing the solution of the problem.

Исследована корректность задачи с общими нелокальными краевыми условиями по временной переменной и условиями периодичности по пространственным координатам для уравнений с частными производными, не разрешенных относительно старшей производной по времени. Установлены условия существования и единственности решения рассматриваемой задачи. При доказательстве существования решения использован метод разделенных разностей. Доказаны метрические утверждения об оценках снизу малых знаменателей, возникающих при построении решения задачи.

Крайові задачі для рівнянь, не розв'язних відносно старшої похідної за часовою змінною, виникають при вивченні малих коливань ідеальної [1, 2] та в'язкої [3] рідини в посудині, що обертається, при вивченні фільтрації рідини в тріщинуватих породах [4], при дослідженні малих коливань експоненціально стратифікованої рідини в полі сили тяжіння [5, 6] тощо. У згаданих працях, а також у роботах [7 – 9] вивчались задача Коші та мішані задачі для диференціальних та диференціально-операторних рівнянь, не розв'язних відносно старшої похідної.

Багатоточкові задачі та задачі типу Діріхле для рівнянь і систем рівнянь, не розв'язних відносно старшої похідної за часом, розглядалися в роботах [10, 11].

Задачі з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними, не розв'язних відносно старшої похідної за часом, вивчалися в роботах [12, 13], а для диференціально-операторних рівнянь — у праці [14].

У даній роботі будемо розглядати задачу із загальними нелокальними крайовими умовами за часовою змінною та умовами періодичності за просторовими координатами для рівнянь із частинними похідними, не розв'язних відносно старшої похідної за часом. При встановленні умов коректності задачі використано розділені різниці, отримано нові метричні твердження про оцінки знизу малих знаменників певного типу.

Введемо такі позначення: $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $D = \left(-i\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, -i\dfrac{\partial}{\partial x_p}\right)$; $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $|k| = |k_1| + \ldots + |k_p|$, $(k, x) = k_1 x_1 + \ldots + k_p x_p$; $h = (h_1, \ldots, h_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_p) \in \mathbb{R}^p$, $\xi^h = \xi_1^{h_1} \ldots \xi_p^{h_p}$; Ω^p — p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $Q_T^p = (0, T) \times \Omega^p$, $T > 0$; $H_z(\Omega^p)$ — гільбертовий простір 2π-періодичних функцій $\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \varphi_k \exp(ik, x)$ із нормою $\|\varphi\|_{H_z(\Omega^p)} = \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} |\varphi_k|^2 (1 + |k|)^{2z}}$, $C\big([0, T], H_z(\Omega^p)\big)$ — простір функцій $f(t, x)$ таких,

* Підтримано Державним фондом фундаментальних досліджень України (проект № Ф 10/21-2005).

що при фіксованому $t \in [0, T]$ $f(t, x)$ належить до $H_z(\Omega^p)$ і як елемент цього простору є неперервною по t на $[0, T]$, норма в $C\big([0, T], H_z(\Omega^p)\big)$ означається так: $\| f \|_{C([0,T], H_z(\Omega^p))} = \max_{t \in [0,T]} \| f(t, x) \|_{H_z(\Omega^p)}$; E_n — одинична матриця порядку n; C_j, $j \in \mathbb{N}$, — додатні сталі, не залежні від k.

1. Постановка задачі. Єдиність розв'язку. В області Q_T^p розглядаємо таку нелокальну задачу:

$$L\left(D, \frac{\partial}{\partial t}\right) u(t, x) \equiv \sum_{j=0}^{n} A_{n-j}(D) \frac{\partial^j u(t, x)}{\partial t^j} = 0, \tag{1}$$

$$M_j(D) u(t, x) \equiv B_{1,j}(D) \left.\frac{\partial^{j-1} u(t, x)}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=0} - B_{2,j}(D) \left.\frac{\partial^{j-1} u(t, x)}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=T} =$$

$$= \varphi_j(x), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

де $A_j(\xi)$, $B_{1,j}(\xi)$, $B_{2,j}(\xi)$ — многочлени з комплексними коефіцієнтами: $A_j(\xi) = \sum_{|h| \le n_j} a_j^h \xi^h$, $j = 0, 1, \ldots, n$, $B_{1,j}(\xi) = \sum_{|h| \le \upsilon_j} b_{1,j}^h \xi^h$, $B_{2,j}(\xi) = \sum_{|h| \le \upsilon_j} b_{2,j}^h \xi^h$, $j = 1, \ldots, n$, $A_0(D)$ — еліптичний диференціальний вираз.

Вигляд області Q_T^p накладає умови 2π-періодичності за змінними $x_1, \ldots, x_p$ на функції $u(t, x)$ та $\varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$.

Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k(t) \exp(ik, x). \tag{3}$$

Кожна функція $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є розв'язком задачі

$$L\left(k, \frac{d}{dt}\right) u_k(t) \equiv \sum_{j=0}^{n} A_{n-j}(k) u_k^{(j)}(t) = 0, \tag{4}$$

$$M_j(k) u_k(t) \equiv B_{1,j}(k) u_k^{(j-1)}(0) - B_{2,j}(k) u_k^{(j-1)}(T) = \varphi_{j,k}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

де $\varphi_{j,k}$, $k \in \mathbb{Z}^p$, — коефіцієнти Фур'є функції $\varphi_j(x)$ $\Big($за системою $\{\exp(ik, x), k \in \mathbb{Z}^p\}\Big)$.

Припустимо, що справджується умова

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p : A_0(k) \ne 0.$$

Тоді на підставі леми 1 із [15] існує стала C_1 така, що

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p : \left| A_0(k) \right| \ge C_1 (1 + |k|)^{n_0}. \tag{6}$$

Якщо ж для деякого вектора $k^0 \in \mathbb{Z}^p$ $A_0(k^0) = 0$, то відповідна задача (4), (5) буде перевизначеною, і для існування її єдиного розв'язку потрібно накладати додаткові умови на коефіцієнти рівняння (1) (див. [13]).

Нехай $\Lambda(k) = \{\lambda_1(k), \ldots, \lambda_n(k)\}$, $k \in \mathbb{Z}^p$, — сукупність коренів рівняння

$$L(k,\lambda) \equiv \sum_{j=0}^{n} A_{n-j}(k)\lambda^j = 0. \tag{7}$$

Через $m(k)$ позначимо число коренів рівняння (7) з недодатною дійсною частиною. Будемо вважати, що для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ всі корені рівняння (7) є різними і занумерованими так, що $\operatorname{Re}\lambda_q(k) \leq \operatorname{Re}\lambda_{q+1}(k)$ (якщо $\operatorname{Re}\lambda_q(k) = \operatorname{Re}\lambda_{q+1}(k)$, то $\operatorname{Im}\lambda_q(k) < \operatorname{Im}\lambda_{q+1}(k)$), $q = 1,\ldots,n-1$. Тоді система функцій $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t,k) = = \left\{\exp\left(\lambda_q(k)t\right)\right\}_{q=1}^{n}$ є фундаментальною системою розв'язків (ФСР) рівняння (4).

Введемо розділені різниці

$$w_k^q(\eta,t) = \frac{w_k^{q-1}(\eta,t) - w_k^{q-1}\left(\lambda_q(k),t\right)}{\eta - \lambda_q(k)},$$
$$q = 1,\ldots,n-1, \qquad \eta \in \mathbb{C}\setminus\left\{\lambda_q(k)\right\}, \tag{8}$$
$$w_k^0(\eta,t) = \exp(\eta t),$$

які можна подати в інтегральній формі

$$w_k^q(\eta,t) = \frac{1}{\eta - \lambda_q(k)} \int\limits_{\lambda_q(k)}^{\eta} \frac{\partial w_k^{q-1}(z,t)}{\partial z}dz, \qquad q = 1,\ldots,n-1, \tag{9}$$

де інтегрування проводиться по відрізку, що сполучає точки $\lambda_q(k)$ та η на комплексній площині $\mathbb{C}$. Кожну з функцій $w_k^q(\eta,t)$, $q = 1,\ldots,n-1$, доозначимо при $\eta = \lambda_q(k)$ за неперервністю: $w_k^q\left(\lambda_q(k),t\right) = \left.\dfrac{\partial w_k^{q-1}(\eta,t)}{\partial\eta}\right|_{\eta=\lambda_q(k)}$, $q = = 1,\ldots,n-1$.

Для побудови розв'язку задачі (4), (5) використаємо таку фундаментальну систему розв'язків рівняння (4) (побудовану за розділеними різницями функцій системи $\mathbf{E}$, що спрощує обґрунтування розв'язності задачі (1), (2)): $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t, k) = \left\{u_{kq}(t)\right\}_{q=1}^{n}$, де

$$u_{kq}(t) = w_k^{q-1}\left(\lambda_q(k),t\right), \quad q = 1,\ldots,n. \tag{10}$$

Розв'язок задачі (4), (5) з класу $C^n([0,T])$ визначається формулою

$$u_k(t) = \sum_{q=1}^{n} C_{kq}\, u_{kq}(t), \tag{11}$$

в якій сталі C_{kq}, $q = 1,\ldots,n$, знаходяться із системи рівнянь

$$\sum_{q=1}^{n} C_{kq}\left(B_{1,j}(k)u_{kq}^{(j-1)}(0) - B_{2,j}(k)u_{kq}^{(j-1)}(T)\right) = \varphi_{jk}, \quad j = 1,\ldots,n, \tag{12}$$

визначник якої

$$\Delta(k,T;\mathbf{U}) \equiv \det\left\| M_j(k)u_{kq}(t)\right\|_{j,q=1}^{n} =$$
$$= \det\left\| B_{1,j}(k)u_{kq}^{(j-1)}(0) - B_{2,j}(k)u_{kq}^{(j-1)}(T)\right\|_{j,q=1}^{n}. \tag{13}$$

Із (8), (10) видно, що системи функцій $\mathbf{U}$ та $\mathbf{E}$ пов'язані між собою таким чином:

$$u_{kq}(t) = \sum_{j=1}^{q} z_{qj}(k)\exp\big(\lambda_j(k)t\big), \quad q = 1,\dots,n, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{14}$$

де

$$z_{qj}(k) = \prod_{\substack{1\le r\le q\\ r\ne j}} \big(\lambda_j(k) - \lambda_r(k)\big)^{-1} \quad (z_{11}(k) \equiv 1).$$

Для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ покладемо $z_{qj}(k) = 0$ при $n \ge j > q \ge 1$ і розглянемо матрицю $Z(k) = \left\| z_{qj}(k) \right\|_{j,q=1}^{n}$, яка є трикутною. Легко бачити, що визначник цієї матриці визначається формулою

$$Y(k) \equiv \det Z(k) = \prod_{1\le r<j\le n} \big(\lambda_j(k) - \lambda_r(k)\big)^{-1}, \tag{15}$$

яка, згідно з припущенням щодо коренів рівняння (7), має сенс для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$.

На підставі формул (13) – (15) отримуємо співвідношення

$$\Delta(k, T; \mathbf{U}) = Y(k)\Delta(k, T; \mathbf{E}), \tag{16}$$

де $\Delta(k, T; \mathbf{E}) \equiv \det\left\| M_j(k)\exp\big(\lambda_q(k)t\big) \right\|_{j,q=1}^{n}$.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $C^n\big(\overline{Q_T^p}\big)$ *необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p\colon \Delta(k, T; \mathbf{E}) \ne 0. \tag{17}$$

Доведення аналогічне до доведення теореми 3.7.5 із [16] із урахуванням (16).

2. Існування розв'язку. Далі вважатимемо, що умова (17) справджується. Тоді з (11) – (13) отримуємо, що для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ існує єдиний розв'язок $u_k(t)$ задачі (4), (5), який визначається формулою

$$u_k(t) = \Delta^{-1}(k, T; \mathbf{U}) \sum_{j=1}^{n} \varphi_{j,k} \sum_{q=1}^{n} \Delta_{jq}(k, T; \mathbf{U}) u_{kq}(t), \tag{18}$$

де $\Delta_{jq}(k, T; \mathbf{U})$, $j, q = 1, \dots, n$, — алгебраїчне доповнення елемента, який розташований на перетині j-го рядка та q-го стовпця у визначнику $\Delta(k, T; \mathbf{U})$. На підставі формул (3), (18) формальний розв'язок задачі (1), (2) зображується рядом

$$u(t, x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \left(\Delta^{-1}(k, T; \mathbf{U}) \sum_{j=1}^{n} \varphi_{jk} \sum_{q=1}^{n} \Delta_{jq}(k, T; \mathbf{U}) u_{kq}(t) \right) \exp(ik, x). \tag{19}$$

Збіжність ряду (19), взагалі, пов'язана із проблемою малих знаменників, оскільки $|\Delta(k, T; \mathbf{U})|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

Для коренів рівняння (7), враховуючи (6), отримуємо оцінки

$$\left|\lambda_q(k)\right| \leq C_2(1+|k|)^{\gamma_0}, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \quad q = 1, \ldots, n, \tag{20}$$

де $\gamma_0 = \max_{1\leq j\leq n}\left\{\dfrac{n_j - n_0}{j}\right\}$, а стала C_2 не залежить від k [17, с. 101]. Позначимо $\upsilon = \sum_{j=1}^n \upsilon_j$.

Теорема 2. *Нехай справджується умова* (17) *та існують сталі* $C_3 > 0$, $\gamma_1 \in \mathbb{R}$ *такі, що для всіх* (*крім скінченної кількості*) $k \in \mathbb{Z}^p$ *виконуються нерівності*

$$\left|\Delta(k, T; \mathbf{U})\right| \geq C_3(1+|k|)^{-\gamma_1}\exp\left(\sum_{q=m(k)+1}^{n}\operatorname{Re}\lambda_q(k)T\right). \tag{21}$$

Якщо $\varphi_j(x) \in H_{z_j}(\Omega^p)$, $z_j > \beta_j + p/2$, *де* $\beta_j = \gamma_1 + \gamma_0\left(\dfrac{n(n-1)}{2} + 1 - j\right) + n\max\{1, \gamma_0\} + \upsilon - \upsilon_j$, $j = 1, \ldots, n$, *то у просторі* $C^n\left(\overline{Q_T^p}\right)$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2), *який зображується рядом* (19) *і неперервно залежить від функцій* $\varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$.

Доведення. Щоб оцінити норму функції (19) у просторі $C^n\left(\overline{Q_T^p}\right)$, оцінимо функції

$$I_j(k, t) = \sum_{q=1}^{n}\Delta_{jq}(k, T; \mathbf{U})u_{kq}(t), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{22}$$

та їх похідні за змінною t, зауваживши, що

$$I_j(k,t) = \begin{vmatrix} M_1(k)u_{k1}(t) & M_1(k)u_{k2}(t) & \cdots & M_1(k)u_{kn}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ M_{j-1}(k)u_{k1}(t) & M_{j-1}(k)u_{k2}(t) & \cdots & M_{j-1}(k)u_{kn}(t) \\ u_{k1}(t) & u_{k2}(t) & \cdots & u_{kn}(t) \\ M_{j+1}(k)u_{k1}(t) & M_{j+1}(k)u_{k2}(t) & \cdots & M_{j+1}(k)u_{kn}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ M_n(k)u_{k1}(t) & M_n(k)u_{k2}(t) & \cdots & M_n(k)u_{kn}(t) \end{vmatrix}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{23}$$

Із (9), (10) та (20) випливають такі оцінки:

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{d^s u_{kq}(t)}{dt^s}\right| \leq \begin{cases} C_4(1+|k|)^{\gamma_0 s}, & q = 1,\ldots, m(k), \\ C_5(1+|k|)^{\gamma_0 s}\exp\left(\operatorname{Re}\lambda_q(k)T\right), & q = m(k)+1,\ldots, n, \end{cases} \tag{24}$$

$$s = 0, 1, \ldots, n.$$

Із (5) та оцінок (24) одержуємо

$$\left|M_j(k)u_{kq}(t)\right| \leq \begin{cases} C_6(1+|k|)^{\gamma_0(j-1)+\upsilon_j}, & q = 1,\ldots, m(k), \\ C_7(1+|k|)^{\gamma_0(j-1)+\upsilon_j}\exp\left(\operatorname{Re}\lambda_q(k)T\right), & q = m(k)+1,\ldots, n, \end{cases} \tag{25}$$

$$j = 1, \ldots, n.$$

На підставі (23) – (25) приходимо до нерівностей

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{d^s I_j(k,t)}{dt^s}\right| \le$$

$$\le C_8(1+|k|)^{\gamma_0(n(n-1)/2-j+s+1)+v-v_j}\exp\left(\sum_{q=m(k)+1}^{n}\operatorname{Re}\lambda_q(k)T\right), \tag{26}$$

$$s = 0, 1, \ldots, n.$$

Враховуючи (18), (21), (22) та (26), дістаємо оцінку

$$\|u\|_{C^n\left(\overline{Q_T^p}\right)} \equiv \sum_{0\le s+|h|\le n}\max_{(t,x)\in\overline{Q_T^p}}\left|\frac{\partial^{s+|h|}u(t,x)}{\partial t^s\,\partial x_1^{h_1}\ldots\partial x_p^{h_p}}\right| \le$$

$$\le C_9\sum_{j=1}^{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}(1+|k|)^{\beta_j}\left|\varphi_{j,k}\right|. \tag{27}$$

Застосовуючи до (27) нерівність Коші – Буняковського і враховуючи, що ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}(1+|k|)^{\omega}$ є збіжним при $\omega<-p$, отримуємо

$$\|u\|_{C^n\left(\overline{Q_T^p}\right)} \le C_9\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}(1+|k|)^{2(\beta_j-z_j)}}\sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}(1+|k|)^{2z_j}\left|\varphi_{j,k}\right|^2} \le$$

$$\le C_{10}\sum_{j=1}^{n}\|\varphi_j\|_{H_{z_j}(\Omega^p)},$$

що завершує доведення теореми.

3. Деякі метричні твердження. Оцінка знизу характеристичного визначника задачі (4), (5). Щоб з'ясувати, коли справджується оцінка (21), потрібно довести ряд допоміжних тверджень. Введемо такі позначення:

$$R_j(k) \equiv \frac{1}{2}\sum_{|h|\le v_j}\left(b_{1,j}^h(k)-b_{2,j}^h(k)\right)k^h,$$

$$S_j(k) \equiv \frac{1}{2}\sum_{|h|\le v_j}\left(b_{1,j}^h(k)+b_{2,j}^h(k)\right)k^h, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Тоді із формули (16) отримуємо

$$\Delta(k, T; \mathbf{U}) =$$

$$= Y(k)\det\left\|\lambda_q^{j-1}(k)R_j(k)\left(1+\exp\left(\lambda_q(k)T\right)\right)+\lambda_q^{j-1}(k)S_j(k)\left(1-\exp\left(\lambda_q(k)T\right)\right)\right\|_{j,q=1}^{n}.$$

Вираз $\Delta(k, T; \mathbf{U})$ розглядатимемо як функцію параметрів $r_j = \operatorname{Re}\left(b_{1,j}^{(0)}-b_{2,j}^{(0)}\right)/2$, $j=1,\ldots,n$. Тоді

$$\Delta(k, T; \mathbf{U}) = Y(k)\det\left\|\lambda_q^{j-1}(k)r_j\left(1+\exp\left(\lambda_q(k)T\right)\right)+\Theta_{jq}(k)\right\|_{j,q=1}^{n}, \tag{28}$$

де доданки $\Theta_{jq}(k)$ не залежать від $r_1, \ldots, r_n$.

Розглянемо поліном n-го степеня відносно змінних $y=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ з комплексними коефіцієнтами

$$P_n(y) \equiv \sum_{q \in Q} a_q\, y_1^{q_1} \ldots y_n^{q_n}, \qquad Q = \{0, 1\}^n, \qquad a_{(1,\ldots,1)} \neq 0, \tag{29}$$

визначений у паралелепіпеді $\Pi_n = \left\{ (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n : \alpha_j \le y_j \le \beta_j,\ j = 1, \ldots, n \right\}$.

Лема 1. *Для довільного* $\varepsilon > 0$ *справджується оцінка*

$$\frac{\operatorname{mes}\{ y \in \Pi_n : |P_n(y)| < \varepsilon \}}{\operatorname{mes}\Pi_n} \le F_n\left(\frac{|a_{(1,\ldots,1)}| \operatorname{mes}\Pi_n}{2^n \varepsilon} \right), \tag{30}$$

де

$$F_n(w) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } w \le 1, \\ \dfrac{1}{w} \displaystyle\sum_{r=0}^{n-1} \frac{\ln^r w}{r!}, & \text{якщо } w > 1. \end{cases}$$

Доведення. Розглянемо спочатку випадок дійсних коефіцієнтів полінома $P_n(y)$. Для доведення леми в цьому випадку використаємо метод повної математичної індукції.

При $n = 1$ лема є справедливою, оскільки для полінома $P_1(y_1) \equiv a_1 y_1 + a_0$, де $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ $(a_1 \neq 0)$, заданого на відрізку $\Pi_1 = [\alpha_1, \beta_1]$, і для довільного $\varepsilon > 0$ очевидною є оцінка

$$\frac{\operatorname{mes}\{ y \in \Pi_1 : |P_1(y_1)| < \varepsilon \}}{\operatorname{mes}\Pi_1} \le F_1\left(\frac{|a_1| \operatorname{mes}\Pi_1}{2\varepsilon} \right).$$

Припустимо, що лема є справедливою при $n = m$, тобто справджується оцінка

$$\frac{\operatorname{mes}\{ y \in \Pi_m : |P_m(y)| < \varepsilon \}}{\operatorname{mes}\Pi_m} \le F_m\left(\frac{|a_{(1,\ldots,1)}| \operatorname{mes}\Pi_m}{2^m \varepsilon} \right). \tag{31}$$

Покажемо, що оцінка (30) справджується також при $n = m + 1$. Дійсно, враховуючи (31), отримуємо

$$\frac{\operatorname{mes}\{ (y_1, \ldots, y_m, y_{m+1}) \in \Pi_{m+1} : |P_{m+1}(y_1, \ldots, y_m, y_{m+1})| < \varepsilon \}}{\operatorname{mes}\Pi_{m+1}} =$$

$$= \frac{1}{\beta_{m+1} - \alpha_{m+1}} \int_{\alpha_{m+1}}^{\beta_{m+1}} \frac{\operatorname{mes}\{ (y_1, \ldots, y_m) \in \Pi_m : |P_{m+1}(y_1, \ldots, y_m, \eta)| < \varepsilon \}}{\operatorname{mes}\Pi_m} d\eta \le$$

$$\le \frac{1}{\beta_{m+1} - \alpha_{m+1}} \int_{\alpha_{m+1}}^{\beta_{m+1}} F_m\left(\frac{|a_{(1,\ldots,1,1)}\eta + a_{(1,\ldots,1,0)}| \operatorname{mes}\Pi_m}{2^m \varepsilon} \right) d\eta. \tag{32}$$

Безпосередньою перевіркою можна показати, що для функції $F_j(w)$, $j \in \mathbb{N}$, на довільному відрізку $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} F_j(|Ay + B|)\, dy \le F_{j+1}\left(|A| \frac{\beta - \alpha}{2} \right), \qquad A, B \in \mathbb{R}, \quad A \neq 0. \tag{33}$$

На підставі (32), (33) отримуємо

$$\frac{\operatorname{mes}\{(y_1,\ldots,y_m,y_{m+1})\in\Pi_{m+1}:|P_{m+1}(y_1,\ldots,y_m,y_{m+1})|<\varepsilon\}}{\operatorname{mes}\Pi_{m+1}} \le$$

$$\le F_{m+1}\left(|a_{(1,\ldots,1,1)}|\frac{\operatorname{mes}\Pi_m}{2^m\varepsilon}\frac{\beta_{m+1}-\alpha_{m+1}}{2}\right) = F_{m+1}\left(\frac{|a_{(1,\ldots,1)}|\operatorname{mes}\Pi_{m+1}}{2^{m+1}\varepsilon}\right).$$

Отже, на основі принципу повної математичної індукції лему для випадку дійсних коефіцієнтів полінома $P_n(y)$ доведено.

Розглянемо тепер випадок комплексних коефіцієнтів. Подамо поліном $P_n(y)$ у вигляді

$$P_n(y) = \frac{a_{(1,\ldots,1)}}{|a_{(1,\ldots,1)}|}\sum_{q\in Q}\frac{|a_{(1,\ldots,1)}|}{a_{(1,\ldots,1)}}a_q y_1^{q_1}\ldots y_n^{q_n} = \frac{a_{(1,\ldots,1)}}{|a_{(1,\ldots,1)}|}(R_n(y)+iI_n(y)), \tag{34}$$

де

$$R_n(y) = \sum_{q\in Q}\operatorname{Re}\left(\frac{|a_{(1,\ldots,1)}|}{a_{(1,\ldots,1)}}a_q\right)y_1^{q_1}\ldots y_n^{q_n},$$

$$I_n(y) = \sum_{q\in Q}\operatorname{Im}\left(\frac{|a_{(1,\ldots,1)}|}{a_{(1,\ldots,1)}}a_q\right)y_1^{q_1}\ldots y_n^{q_n}.$$

Тоді, враховуючи справедливість леми для випадку дійсних коефіцієнтів полінома $P_n(y)$, отримуємо

$$\operatorname{mes}\{y\in\Pi_n:|P_n(y)|<\varepsilon\} = \operatorname{mes}\{y\in\Pi_n:|R_n(y)+iI_n(y)|<\varepsilon\} \le$$

$$\le \operatorname{mes}\{y\in\Pi_n:|R_n(y)|<\varepsilon\} \le F_n\left(\frac{|a_{(1,\ldots,1)}|\operatorname{mes}\Pi_n}{2^n\varepsilon}\right).$$

Отже, лему повністю доведено.

Для полінома $P_n(y)$, визначеного формулою (29), із леми 1 випливає таке твердження.

Лема 2. *Для довільного* $\psi\in(0,1)$ *існує додатна стала* $C_{11} = C_{11}(\psi, \operatorname{mes}\Pi_n)$ *така, що міра Лебега в* $\mathbb{R}^n$ *множини* $Y_n = \{y\in\Pi_n:|P_n(y)|<\varepsilon\}$, $\varepsilon\in(0,\delta)$, $\delta = 2^{-n}|a_{(1,\ldots,1)}|\operatorname{mes}\Pi_n$, *не перевищує величини* $C_{11}(\varepsilon/\delta)^{\psi}$.

Доведення базується на використанні оцінки $\ln x\le(e\alpha)^{-1}x^{\alpha}$ (де e — основа натуральних логарифмів), яка справджується для довільних $x>0$ та $\alpha>0$.

Теорема 3. *Для довільних фіксованих параметрів задачі* (1), (2) (*крім* $b_{1,j}^{(0)}$, $b_{2,j}^{(0)}$, $j=1,\ldots,n$) *і для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$) *векторів* $r = (r_1,\ldots,r_n)$ *нерівність*

$$|\Delta(k,T;\mathbf{U})| \ge (1+|k|)^{-\gamma_2}\prod_{q=1}^{n}\left|1+\exp\left(\lambda_q(k)T\right)\right| \tag{35}$$

справджується при $\gamma_2>p$ *для всіх* (*крім скінченної кількості*) *векторів* $k\in\mathbb{Z}^p$.

Доведення. Із формули (28) видно, що вираз $\Delta(k,T;\mathbf{U})$ є поліномом n-го степеня відносно змінних $r_1,\ldots,r_n$, який задовольняє умови леми 1. Старший коефіцієнт цього полінома дорівнює

$$\prod_{q=1}^{n}\left(1+\exp\left(\lambda_q(k)T\right)\right).$$

Нехай вектор $r=(r_1,\ldots,r_n)$ належить деякому паралелепіпеду $\Pi_n\subset\mathbb{R}^n$ і ψ — довільне число з проміжку $(p/\gamma_2,1)$.

На підставі леми 2 для тих $k\in\mathbb{Z}^p$, для яких $(1+|k|)^{-\gamma_2}<\dfrac{\operatorname{mes}\Pi_n}{2^n}$, існує така стала $C_{12}=C_{12}(\psi,\operatorname{mes}\Pi_n)>0$, що справджується оцінка

$$\operatorname{mes}\left\{r\in\Pi_n:|\Delta(k,T;\mathbf{U})|<(1+|k|)^{-\gamma_2}\prod_{q=1}^{n}\left|1+\exp\left(\lambda_q(k)T\right)\right|\right\}\le C_{12}(1+|k|)^{-\psi\gamma_2}.$$

Зі збіжності ряду $\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}(1+|k|)^{-\psi\gamma_2}$ на підставі леми Бореля – Кантеллі (див. лему 2.1 [18], гл. 1) отримуємо, що міра Лебега тих $r\in\Pi_n$, для яких нерівність

$$|\Delta(k,T;\mathbf{U})|<(1+|k|)^{-\gamma_2}\prod_{q=1}^{n}\left|1+\exp\left(\lambda_q(k)T\right)\right|$$

виконується для нескінченної кількості векторів $k\in\mathbb{Z}^p$, дорівнює нулеві. Отже, для майже всіх $r\in\Pi_n$ нерівність (35) справджується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$. Оскільки простір $\mathbb{R}^n$ можна покрити зліченною кількістю паралелепіпедів, то, враховуючи викладене вище та σ-адитивність міри Лебега, завершуємо доведення леми.

Лема 3. *Нехай* $\rho(k)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, *— довільна послідовність комплексних чисел. Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $T>0$ *нерівність*

$$|1+\exp(\rho(k)T)|\ \ge\ (1+|k|)^{-\gamma_3}\max\{1,\exp(\operatorname{Re}\rho(k)T)\}\tag{36}$$

справджується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ *при* $\gamma_3>p$.

Доведення. Спочатку доведемо лему для $T\in[T_0,2T_0]$, де T_0 — довільне фіксоване додатне число.

Розіб'ємо множину $\mathbb{Z}^p$ на такі підмножини:

$$K_1=\left\{k\in\mathbb{Z}^p:|\operatorname{Re}\rho(k)|>\frac{1}{T_0}\right\},$$

$$K_2=\left\{k\in\mathbb{Z}^p:|\operatorname{Re}\rho(k)|\le\frac{1}{T_0},\ |\operatorname{Im}\rho(k)|<\frac{\pi}{4T_0}\right\},$$

$$K_3=\left\{k\in\mathbb{Z}^p:|\operatorname{Re}\rho(k)|\le\frac{1}{T_0},\ |\operatorname{Im}\rho(k)|\ge\frac{\pi}{4T_0}\right\}.$$

Для всіх $k\in K_1$, $|k|\ge\left(\dfrac{e}{e-1}\right)^{1/\gamma_3}-1$, і всіх $T\in[T_0,2T_0]$ справджується оцінка

$$\left|1 + e^{\rho(k)T}\right| \geq (1-e^{-1})\max\left\{1, e^{\operatorname{Re}\rho(k)T}\right\} \geq$$

$$\geq (1+|k|)^{-\gamma_3}\max\{1, \exp(\operatorname{Re}\rho(k)T)\}.$$

Для $k \in K_2 \cup K_3$ виконується нерівність

$$\left|1 + e^{\rho(k)T}\right| = \sqrt{\left(1-e^{\operatorname{Re}\rho(k)T}\right)^2 + 4e^{\operatorname{Re}\rho(k)T}\cos^2\left(\frac{\operatorname{Im}\rho(k)T}{2}\right)} \geq$$

$$\geq 2e^{\operatorname{Re}\rho(k)T/2}\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\operatorname{Im}\rho(k)T}{2}\right)\right|. \tag{37}$$

На підставі (37) для всіх $k \in K_2$, $|k| \geq e^{1/\gamma_3} - 1$, і всіх $T \in [T_0, 2T_0]$ отримуємо

$$\left|1 + e^{\rho(k)T}\right| > 2e^{\operatorname{Re}\rho(k)T/2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{\operatorname{Re}\rho(k)T/2} \geq$$

$$\geq \sqrt{2}e^{-1}\max\{1, \exp(\operatorname{Re}\rho(k)T)\} > (1+|k|)^{-\gamma_3}\max\{1, \exp(\operatorname{Re}\rho(k)T)\}.$$

Для $k \in K_3$ справджується оцінка

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\operatorname{Im}\rho(k)T}{2}\right)\right| = \sin\left|\frac{\pi}{2}+\frac{\operatorname{Im}\rho(k)T}{2}-\pi m\right| \geq 2\left|\frac{1}{2}+\frac{\operatorname{Im}\rho(k)T}{2\pi}-m\right|, \tag{38}$$

де $m = m(k) \in \mathbb{Z}$ таке, що $\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\operatorname{Im}\rho(k)T}{2}-\pi m\right) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Покажемо, що при $\gamma_3 > p$ нерівність

$$\left|\frac{1}{2}+\frac{\operatorname{Im}\rho(k)T}{2\pi}-m\right| < (1+|k|)^{-\gamma_3} \tag{39}$$

для майже всіх $T \in [T_0, 2T_0]$ має лише скінченну кількість розв'язків (k, m), де $k \in K_3$, $m \in \mathbb{Z}$. Для цього скористаємося схемою доведення леми 2.4 із [18] (гл. 1).

Зафіксуємо вектор $k = \hat{k} \in K_3$. Відповідні йому значення m, для яких виконується нерівність (39), містяться в інтервалі

$$\frac{1}{2} + \frac{T\operatorname{Im}\rho(\hat{k})}{2\pi} - \left(1+\left|\hat{k}\right|\right)^{-\gamma_3} < m < \frac{1}{2} + \frac{T\operatorname{Im}\rho(\hat{k})}{2\pi} + \left(1+\left|\hat{k}\right|\right)^{-\gamma_3}. \tag{40}$$

Зафіксуємо деяке ціле значення $m = m_0$ з інтервалу (40). Очевидно, що при $T \in [T_0, 2T_0]$ $|m_0| \leq \dfrac{T_0\left|\operatorname{Im}\rho(\hat{k})\right|}{\pi} + 2$. Тоді для міри множини $S(\hat{k}, m_0)$ тих чисел $T \in [T_0, 2T_0]$, для яких при фіксованих $k = \hat{k} \in K_3$, $m = m_0 \in \mathbb{Z}$ справджується нерівність (39), має місце оцінка

$$\operatorname{mes} S(\hat{k}, m_0) \leq \frac{4\pi}{\left|\operatorname{Im}\rho(\hat{k})\right|}\left(1+\left|\hat{k}\right|\right)^{-\gamma_3}.$$

Отже, міра множини $S(\hat{k})$ тих $T \in [T_0, 2T_0]$, для яких нерівність (39) при фіксованих $k = \hat{k} \in K_3$ має розв'язки в цілих числах m, оцінюється таким чином:

$$\operatorname{mes} S(\hat{k}) \leq \sum_{m_0 = -\left[T_0\left|\operatorname{Im}\rho(\hat{k})\right|/\pi\right]-3}^{\left[T_0\left|\operatorname{Im}\rho(\hat{k})\right|/\pi\right]+3} \frac{4\pi}{\left|\operatorname{Im}\rho(\hat{k})\right|}\left(1+\left|\hat{k}\right|\right)^{-\gamma_3} \leq$$

$$\leq \left(\frac{2T_0 \left| \operatorname{Im} \rho(\hat{k}) \right|}{\pi} + 7 \right) \frac{4\pi \left(1 + \left|\hat{k}\right|\right)^{-\gamma_3}}{\left| \operatorname{Im} \rho(\hat{k}) \right|} =$$

$$= \left(8T_0 + \frac{28\pi}{\left| \operatorname{Im} \rho(\hat{k}) \right|} \right) \left(1 + \left|\hat{k}\right|\right)^{-\gamma_3} \leq 120 T_0 \left(1 + \left|\hat{k}\right|\right)^{-\gamma_3},$$

де $[a]$ — ціла частина числа a.

Оскільки ряд $\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} (1 + |k|)^{-\gamma_3}$ є збіжним при $\gamma_3 > p$, то на підставі леми Бореля – Кантеллі отримуємо, що міра тих $T \in [T_0, 2T_0]$, для яких нерівність (39) має нескінченну кількість розв'язків (k, m), $k \in K_3$, $m \in \mathbb{Z}$, дорівнює нулеві. Звідси на підставі (37), (38) отримуємо, що для майже всіх $T \in [T_0, 2T_0]$ і всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in K_3$ справджується оцінка

$$\left| 1 + e^{\rho(k)T} \right| \geq 4 e^{\operatorname{Re}\rho(k)T/2} (1 + |k|)^{-\gamma_3} \geq$$

$$\geq 4e^{-1} (1 + |k|)^{-\gamma_3} \max\{1, \exp(\operatorname{Re}\rho(k)T)\} >$$

$$> (1 + |k|)^{-\gamma_3} \max\{1, \exp(\operatorname{Re}\rho(k)T)\}.$$

Отже, для $T \in [T_0, 2T_0]$ лему доведено.

Оскільки додатну піввісь $(0, \infty)$ можна покрити зліченною кількістю відрізків вигляду $[T_0, 2T_0]$, то, враховуючи встановлене вище та σ-адитивність міри Лебега, завершуємо доведення леми.

Із леми 3 випливає наступне твердження.

Теорема 4. *Для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$) *чисел* $T > 0$ *та для довільних фіксованих коефіцієнтів рівняння* (1) *нерівність*

$$\prod_{q=1}^{n} \left| 1 + \exp\left(\lambda_q(k)T\right) \right| \geq (1 + |k|)^{-\gamma_4} \exp\left(\sum_{q=m(k)+1}^{n} \operatorname{Re}\lambda_q(k)T \right)$$

справджується для всіх (*крім скінченної кількості*) *векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *при* $\gamma_4 > np$.

Із теорем 3, 4 отримуємо таке твердження.

Теорема 5. *Для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^{n+1}$) *векторів* $(T, r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *нерівність* (21) *справджується при* $\gamma_1 > (n+1)p$ *для всіх* (*крім скінченної кількості*) *векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$.

Зауваження. Якщо в оцінках (20) $\gamma_0 < 0$, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ нерівність (21) справджується при $\gamma_1 > p$ для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

Результати роботи поширено на випадок неоднорідного рівняння

$$L\left(D, \frac{\partial}{\partial t} \right) u(t, x) = f(t, x),$$

де функція $f(t, x)$ неперервна по t і досить гладка по x в $\overline{Q_T^p}$.

1. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1954. – **18**, № 1. – С. 3–50.
2. *Соболев С. Л.* О движении симметрического волчка с полостью, наполненной жидкостью // Прикл. механика и техн. физика. – 1960. – № 3. – С. 20–55.

3. *Масленникова В. Н.* Решение смешанной задачи для нестационарного движения вращающейся вязкой жидкости и исследование дифференциальных свойств этого решения // Сиб. мат. журн. – 1961. – **2**, № 5. – С. 708 – 718.
4. *Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. математика и механика. – 1960. – **24**, вып. 5. – С. 852 – 864.
5. *Габов С. А., Свешников А. Г.* Задачи динамики стратифицированной жидкости. – М.: Наука, 1986. – 287 с.
6. *Габов С. А., Свешников А. Г.* Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. – М.: Наука, 1990. – 344 с.
7. *Вишик М. И.* Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения // Мат. сб. – 1956. – **39**, № 1. – С. 51 – 148.
8. *Горбачук М. Л., Федак И. В.* Задача Коши для дифференциально-операторного уравнения, связанного с колебаниями стратифицированных жидкостей // Докл. АН СССР. – 1987. – **297**, № 1. – С. 14 – 17.
9. *Успенский С. В., Демиденко Г. В., Перепелкин В. Г.* Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. – Новосибирск: Наука, 1984. – 224 с.
10. *Білусяк Н. І., Комарницька Л. І., Пташник Б. Й.* Задача типу Діріхле для систем рівнянь із частинними похідними, не розв’язаних відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 12. – С. 1592 – 1602.
11. *Клюс І. С., Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача для рівнянь із частинними похідними, не розв’язаних відносно старшої похідної за часом // Там же. – 1999. – **51**, № 12. – С. 1604 – 1613.
12. *Комарницька Л. І.* Нелокальна крайова задача для рівняння зі змінними коефіцієнтами, не розв’язаного відносно старшої похідної // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1994. – Вип. 40. – С. 17 – 23.
13. *Власій О. Д., Пташник Б. Й.* Задача з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними, не розв’язаних стосовно старшої похідної // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 8. – С 1022 – 1034.
14. *Романко В. К.* О граничных задачах для дифференциально-операторных уравнений, не разрешенных относительно старшей производной // Докл. АН СССР. – 1977. – **235**, № 5. – С. 1030 – 1033.
15. *Комарницька Л. І., Пташник Б. Й.* Крайові задачі для диференціального рівняння, не розв’язаного відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 9. – С. 1197 – 1208.
16. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
17. *Фаддеев Д. К., Соминский И. С.* Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Наука, 1968. – 304 с.
18. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.

Одержано 17.11.2006