УДК 519.615

Б. М. Подлевський (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

ПРО ОДИН МЕТОД РОЗКЛАДУ АЛГЕБРАЇЧНОГО ПОЛІНОМА НА МНОЖНИКИ

We propose a method of the factorization of algebraic polynomial with real or complex coefficients into factors. We construct a numerical algorithm that, alongside with the factorization of a polynomial with multiple roots into factors, solves the problem of the determination of multiplicities and number of multiple roots of the polynomial.

Запропоновано метод розкладу алгебраїчного полінома з дійсними або комплексними коефіцієнтами на множники. Побудовано числовий алгоритм, який поряд з розкладом полінома з кратними коренями на множники розв'язує задачу знаходження кратностей та кількості кратних коренів полінома.

Знаходження коренів поліномів є однією з найдавніших задач алгебри. Відомо, що для полінома степеня $n > 2$ не існує задовільного (а при $n > 4$ взагалі ніякого) явного зображення коренів полінома через його коефіцієнти. Тому одним з напрямків розвитку числових методів розв'язування цієї задачі є напрям, пов'язаний з факторизацією полінома, тобто виділення лінійного множника (метод Ліна [1]) або полінома заданого степеня, зокрема квадратного [2], а також факторизація у вигляді квадратних тричленів (див., наприклад, [3–5]). За цими методами наближено обчислюються не самі корені, а коефіцієнти поліномів-множників, зокрема квадратних тричленів. Таким чином, ці методи не є прямими ітераційними методами на відміну від великої кількості прямих ітераційних методів, які безпосередньо обчислюють всі або частину коренів (див., наприклад, [6–9]). Для ефективного використання методів цього класу поряд з початковими наближеннями до коренів потрібно задавати їх кратність. Отже, виникає питання про визначення кратностей всіх або частини коренів заданого алгебраїчного полінома, якщо задано лише його коефіцієнти.

У даній роботі пропонується метод, який поряд з розкладом полінома на множники розв'язує задачу знаходження кратностей та кількості кратних коренів алгебраїчних поліномів лише за його коефіцієнтами (дійсними або комплексними). Коефіцієнти поліномів-множників розкладу на відміну від існуючих методів, зокрема, [2–5] (а в окремих випадках і самі корені) обчислюються „точно" в межах машинної арифметики.

1. Постановка задачі. Розглянемо поліном n-го степеня

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \qquad \deg f(x) = n, \tag{1}$$

з дійсними коефіцієнтами $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Якщо $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — корені полінома (1) кратності $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ відповідно, то (1) можна записати у вигляді

$$f(x) = a_0 \prod_{j=1}^{m} (x - \alpha_j)^{\nu_j}, \qquad \sum_{j=1}^{m} \nu_j = n, \qquad m \le n. \tag{2}$$

Така факторизація полінома (1) є максимально бажаною, але, як уже зазначалось, її дуже важко здійснити, оскільки для цього потрібно знайти всі його корені та їх кратності. Тому поставимо завдання факторизувати поліном (1) у вигляді

$$f(x) = X_1 X_2^2 X_3^3 \ldots X_k^k, \tag{3}$$

де

$$X_\beta(x) = \prod_{i=1}^{N_\beta} (x - \alpha_{\beta_i}), \qquad \beta = \overline{1, k}, \quad k \le n. \tag{4}$$

Тут α_{β_i} — корені полінома (1), перенумеровані за зростанням їх кратності, а N_β — кількість усіх його коренів кратності β, тобто N_β — степінь $X_\beta(x)$ і

$$\deg f(x) = \sum_{\beta=1}^{k} \beta N_\beta = \sum_{j=1}^{m} \nu_j = n. \tag{5}$$

Таким чином, $X_\beta(x)$ є добутком усіх лінійних множників полінома $f(x)$, які мають кратність β.

Отже, поставлену задачу можна переформулювати так: побудувати алгоритм знаходження поліномів $X_\beta(x)$ та чисел N_β і визначити умови його застосування.

2. Алгоритм розкладу. Спочатку обчислимо похідну $f(x)$. Для цього скористаємося зображенням (3) і після еквівалентних перетворень отримаємо

$$f'(x) = F(x) X_2 X_3^2 X_4^3 \ldots X_k^{k-1}, \tag{6}$$

де $F(x)$ — деякий поліном такий, що $F(\alpha_j) \neq 0,\ j = 1, 2, \ldots, m$.

Із співвідношень (3) та (6) видно, що найбільшим спільним дільником (НСД) полінома $f(x)$ і його похідної $f'(x)$ буде поліном

$$\text{НСД}(f, f') = G_1(x) = X_2 X_3^2 X_4^3 \ldots X_k^{k-1}, \tag{7}$$

і нехай $m_1 = \deg G_1(x)$. Аналогічно визначаємо НСД полінома $G_1(x)$ і його похідної $G_1'(x)$, тобто

$$\text{НСД}(G_1, G_1') = G_2(x) = X_3 X_4^2 X_5^3 \ldots X_k^{k-2}, \tag{8}$$

і нехай $m_2 = \deg G_2(x)$. Продовжуючи далі, приходимо до НСД,

$$\text{НСД}(G_{k-2}, G_{k-2}') = G_{k-1}(x) = X_k, \tag{9}$$

який буде взаємно простим зі своєю похідною і його степінь дорівнює степеню множника $X_k(x)$, тобто $m_{k-1} = N_k$.

Тепер, використавши співвідношення (5), визначимо степені в правих частинах (3), (7) – (9) і прирівняємо їх відповідно до $n, m_1, m_2, \ldots, m_{k-1}$. В результаті отримаємо трикутну лінійну систему рівнянь відносно невідомих $N_1, N_2, \ldots, N_k$:

$$\begin{aligned} N_1 + 2N_2 + 3N_3 + \ldots + (k-1)N_{k-1} + kN_k &= n, \\ N_2 + 2N_3 + \ldots + (k-2)N_{k-1} + (k-1)N_k &= m_1, \\ N_3 + \ldots + (k-3)N_{k-1} + (k-2)N_k &= m_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ N_{k-1} + 2N_k &= m_{k-2}, \\ N_k &= m_{k-1}, \end{aligned} \tag{10}$$

з якої послідовно визначимо $N_k, N_{k-1}, \ldots, N_1$. Цим ми визначили кількість коренів відповідної кратності полінома (1), а самі поліноми-множники розкладу (3) обчислюються за допомогою співвідношень

$$\begin{aligned} X_i &= \frac{G_{i-1} G_{i+1}}{G_i^2}, \quad i = \overline{1, k-1}, \\ X_k &= G_{k-1}, \end{aligned} \tag{11}$$

де $G_0 = f(x)$, $G_k = 1$.

Зауважимо, що матриця системи (10) є однотипною (цілочисловою, трикутною, з однаковими елементами) для поліномів довільного степеня. Змінюється лише її розмірність, яка визначається максимальною кратністю кореня полінома (1), та права частина системи (10).

Отже, алгоритм розкладу складається з таких кроків:

1. Покладаємо $G_0(x) = f(x)$.
2. Обчислюємо похідну $G_0'(x)$.
3. За допомогою алгоритму Евкліда знаходження НСД двох поліномів знаходимо $\text{НСД}(G_{k-1}, G_{k-1}') = G_k(x)$, тобто обчислюємо коефіцієнти полінома $G_k(x)$ та визначаємо його степінь m_k.
4. Якщо $G_k(x) \neq 1$, то обчислюємо похідну $G_k'(x)$ і переходимо до п. 3.
5. Розв'язуємо систему (10) відносно N_β, $\beta = 1, 2, \ldots, k$, з правою частиною $(n, m_1, m_2, \ldots, m_{k-1})$.
6. Послідовно знаходимо поліноми-множники X_β, $\beta = 1, 2, \ldots, k$, за формулами (11).

Зауважимо, що оскільки X_β — поліноми степеня $N_\beta \le n$, корені яких є простими, то до них можна застосувати ті швидко збіжні ітераційні методи, які застосовуються при знаходженні простих коренів (див., наприклад, методи Ньютона і Геллі [10] або їх модифікації [11, 12]).

Зазначимо також, що за допомогою запропонованого алгоритму розкладу полінома на множники у багатьох випадках корені полінома $f(x)$ довільного степеня можна знайти точно, не використовуючи ітераційні методи. Усі ці випадки можна описати за допомогою умов

$$N_\beta \le 4, \qquad \beta = \overline{1, k}. \tag{12}$$

Справді, в такому випадку поліном $f(x)$ запишеться у факторизованому вигляді (3), де кожний множник X_β є поліномом степеня не більшого, ніж 4, для якого існують методи знаходження коренів за коефіцієнтами полінома (наприклад, методи Кардано, Феррарі).

Ефективність алгоритму проілюструємо на числовому прикладі.

***Приклад* 1.** Розглянемо дійсний поліном 6-го степеня

$$f(x) = x^6 - 15x^4 - 14x^3 + 36x^2 + 24x - 32, \qquad \deg f = 6,$$

і розкладемо його на множники. Згідно з (7) – (9) маємо

$$G_1(f, f') = x^3 + 3x^2 - 4, \qquad \deg G_1 = 3,$$

$$G_2(G_1, G_1') = x = 2, \qquad \deg G_2 = 1.$$

Отже, система рівнянь (10) набирає вигляду

$$\begin{aligned} N_1 + 2N_2 + 3N_3 &= 6, \\ N_2 + 2N_3 &= 3, \\ N_3 &= 1. \end{aligned}$$

Звідси отримуємо $N_3 = 1$, $N_2 = 1$, $N_1 = 1$. Це означає, що поліном має 3 різних корені, з яких один трикратний, один двократний та один простий. Оскільки для всіх N_β, $\beta = 1, 2, 3$, справджуються умови (12), то, визначаючи X_β за допомогою співвідношень (11), можна обчислити точно всі корені полінома, тобто

$$X_3 = x + 2, \qquad X_2 = x - 1, \qquad X_1 = x - 4.$$

Отже,

$$f(x) = (x-4)(x-1)^2(x+2)^3.$$

3. Варіант алгоритму для поліномів з комплексними коефіцієнтами. Тепер розглянемо випадок, коли серед коефіцієнтів полінома $f(x)$ є комплексні числа. Запишемо $f(x)$ у вигляді

$$f(x) = a_0\prod_{i=1}^{p}(x-\alpha_i)^{\nu_{p_i}}\prod_{i=1}^{q}(x-\beta_i)^{\nu_{q_i}}\prod_{i=1}^{q}(x-\bar{\beta}_i)^{\nu_{q_i}}\prod_{i=1}^{r}(x-\gamma_i)^{\nu_{r_i}}. \tag{13}$$

Тут α_i, $i=\overline{1,p}$, — дійсні корені полінома $f(x)$, β_i, $\bar{\beta}_i$, $i=\overline{1,q}$, — пари комплексно-спряжених коренів, γ_i, $i=\overline{1,r}$, — комплексні корені такі, що числа $\bar{\gamma}_i$, $i=\overline{1,r}$, не є коренями полінома $f(x)$. З такого запису видно, що поліном $f(x)$ має $\sum_{i=1}^{p}\nu_{p_i}$ дійсних та $2\sum_{i=1}^{q}\nu_{q_i} + \sum_{i=1}^{r}\nu_{r_i}$ комплексних коренів. Запишемо тепер $\bar{f}(x)$ у вигляді, аналогічному до (13):

$$\bar{f}(x) = \bar{a}_0\prod_{i=1}^{p}(x-\alpha_i)^{\nu_{p_i}}\prod_{i=1}^{q}(x-\bar{\beta}_i)^{\nu_{q_i}}\prod_{i=1}^{q}(x-\beta_i)^{\nu_{q_i}}\prod_{i=1}^{r}(x-\bar{\gamma}_i)^{\nu_{r_i}}. \tag{14}$$

З (13) та (14) можна отримати і записати НСД поліномів $f(x)$ та $\bar{f}(x)$:

$$g(x) = \text{НСД}(f,\bar{f}) = b_0\prod_{i=1}^{p}(x-\alpha_i)^{\nu_{p_i}}\prod_{i=1}^{q}(x-\beta_i)^{\nu_{q_i}}\prod_{i=1}^{q}(x-\bar{\beta}_i)^{\nu_{q_i}}.$$

Поліном $g(x)$ дійсний (або відрізняється від нього лише комплексним скалярним множником) і має ті самі $\sum_{i=1}^{p}\nu_{p_i}$ дійсних та $2\sum_{i=1}^{q}\nu_{q_i}$ комплексно-спряжених коренів, що і $f(x)$, а поліном

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\left(=\prod_{i=1}^{r}(x-\gamma_i)^{\nu_{r_i}}\right)$$

має $\sum_{i=1}^{r}\nu_{r_i}$ комплексних коренів, які, очевидно, збігаються з коренями γ_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, полінома $f(x)$, так що

$$\deg g(x) = \sum_{i=1}^{p}\nu_{p_i} + 2\sum_{i=1}^{q}\nu_{q_i} = n_1 \quad (\le n),$$

$$\deg h(x) = \sum_{i=1}^{r}\nu_{r_i} = n_2 \quad (\le n),$$

$$n_1 + n_2 = n.$$

Позначимо через K_β кількість коренів кратності β, $\beta=\overline{1,k'}$, полінома $g(x)$, а через L_β — кількість коренів кратності β, $\beta=\overline{1,k''}$ полінома $h(x)$. Звідси

$$\sum_{\beta=1}^{k'}\beta K_\beta = n_1, \qquad \sum_{\beta=1}^{k''}\beta L_\beta = n_2.$$

Тепер, застосовуючи алгоритм (3), (7) – (11) до поліномів $g(x)$ та $h(x)$, отримуємо кількість кратних коренів полінома $f(x)$:

$$N_\beta = K_\beta + L_\beta, \quad \beta = 1, 2, \ldots, k, \quad k = \max(k', k''),$$

оскільки

$$\sum_{\beta=1}^{k}\beta N_\beta = \sum_{\beta=1}^{k'}\beta K_\beta + \sum_{\beta=1}^{k''}\beta L_\beta = n_1 + n_2 = n.$$

Зазначимо, що алгоритм можна застосувати і безпосередньо до полінома $f(x)$ з комплексними коефіцієнтами, але попередня його факторизація у вигляді

$$f(x) = g(x)h(x) \tag{15}$$

дозволяє понизити степінь полінома принаймні на одиницю, що суттєво як в теорії відокремлення коренів поліномів при визначенні кількості дійсних та комплексних коренів [13], так і при застосуванні числових методів.

Покажемо ефективність застосування запропонованого варіанта алгоритму на нетривіальному прикладі многочлена 12-го степеня з комплексними коефіцієнтами.

***Приклад* 2.** Розглянемо поліном

$$f(x) = x^{12} - (2+4i)x^{11} - (6-8i)x^{10} + 14x^9 - (12+8i)x^8 +$$
$$+ (10+16i)x^7 + (6-24i)x^6 - (22-8i)x^5 + (15+8i)x^4 -$$
$$- (8+12i)x^3 + 16ix^2 + (8-8i)x - 4, \quad \deg f = 15, \tag{16}$$

і розкладемо його на множники.

Спочатку зведемо поліном (16) до вигляду (15), використовуючи алгоритм Евкліда для отримання полінома $g(x)$, який є НСД $f(x)$ та $\bar{f}(x)$:

$$g(x) = \text{НСД}(f, \bar{f}) = x^8 - 2x^7 + 2x^5 - 2x^5 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 1,$$

$$h(x) = f(x)/g(x) = x^4 - 4ix^3 - 8x^2 + 8ix + 4.$$

Тепер застосуємо алгоритм окремо до поліномів $g(x)$ та $h(x)$. Отримаємо:

для полінома $g(x)$:

$$g(x) = x^8 - 2x^7 + 2x^5 - 2x^5 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 1, \quad \deg g(x) = 8,$$

$$G_1(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1, \quad \deg G_1(x) = 4,$$

$$G_2(x) = x - 1, \quad \deg G_2(x) = 1;$$

з системи рівнянь

$$K_1 + 2K_2 + 3K_3 = 8,$$
$$K_2 + 2K_3 = 4,$$
$$K_3 = 1$$

визначаємо $K_3 = 1$, $K_2 = 2$, $K_1 = 1$ і за допомогою співвідношень (11) знаходимо поліноми X_β

$$X_3 = x - 1, \quad X_2 = x^2 + 1, \quad X_1 = x + 1;$$

для полінома $h(x)$:

$$h(x) = x^4 - 4ix^3 - 8x^2 + 8ix + 4, \quad \deg h(x) = 4,$$

$$G_1(x) = x^2 - 2ix - 2, \quad \deg G_1(x) = 2,$$

$$L_2 = 2, \quad L_1 = 0.$$

Це означає, що $h(x)$ має два двократних корені, які також можна визначити точно, оскільки для L_2 справджується умова (12). Отже, отримуємо

$$X_2 = x^2 - 2ix - 2.$$

Таким чином, $N_1 = K_1 + L_1 = 1$, $N_2 = K_2 + L_2 = 4$, $N_3 = K_3 = 1$, тобто поліном (16) має 6 різних коренів. З них один простий, 4 двократних та один трикратний корінь. Отже, поліном (16) можемо записати у факторизованому вигляді

$$f(x) = (x+1)(x^2+1)^2(x-1)^3(x^2-2ix-2)^2 =$$
$$= (x+1)(x-i)^2(x+i)^2(x-i-1)^2(x-i+1)^2(x-1)^3.$$

4. Висновки. Відзначимо наступні особливості запропонованого алгоритму, які вигідно відрізняють його від існуючих, зокрема, від алгоритмів [2–5]:

1) запропонований алгоритм не є ітераційним, а отже, не вимагає початкових наближень до коренів полінома, як у [1, 2], чи до коефіцієнтів поліномів-множників, як у [3–5]. Він використовує лише коефіцієнти заданого полінома $f(x)$;

2) поряд з розкладом полінома на множники алгоритм розв'язує задачу знаходження кратностей та числа кратних коренів алгебраїчних поліномів;

3) в окремих випадках (при виконанні умов (12)) алгоритм дозволяє безпосередньо обчислити і самі корені, не залучаючи для цього якихось ітераційних методів;

4) алгоритм можна використовувати для поліномів як з дійсними, так і з комплексними коефіцієнтами.

Разом з тим запропонований алгоритм має і свої обмеження. Оскільки він спеціально створювався для розкладу на множники поліномів з кратними коренями, то він не є ефективним для поліномів з простими коренями. В цьому випадку він збігається зі звичайним способом перевірки на наявність у полінома простих коренів. Саме це обмеження певною мірою звужує область застосування даного алгоритму.

1. *Крылов В. И. и др.* Вычислительные методы прикладной математики / Под ред. И. П. Мысовских. – Минск: Вышэйш. шк., 1972. – Т. 1. – 584 с.
2. *Джиллидови И. А.* Об одном методе разложения многочлена на множители // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 9. – С. 1281–1286.
3. *Maeß G.* Simultane Polynomaufspaltung in Quadratfaktoren // Rostock. Math. Kolloq. – 1981. – **18**. – P. 89–96.
4. *Varga G.* Többszörös valós göykökkel rendelkezo valós együtthatós polinomok faktorizálása // Alkam. mat. lapok. – 1982. – **7**, № 1-2. – P. 175–180.
5. *Alt R., Vignes J.* Stabilizing Bairstow's method // Comput. and Math. – 1982. – **8**, № 5. – P. 379–387.
6. *Prešić M. D.* A convergence theorem for a method for simultaneous determination of all zeros of a polynomial // Publ. Inst. Math., Beograd. – 1980. – **28**. – P. 159–165.
7. *Іванісов А. В., Поліщук В. К.* Алгоритм знаходження коренів поліномів, збіжний при будь-якому початковому наближенні // Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1984. – № 8. – С. 74–77.
8. *Atanassova I., Makrelov I.* On the individual and simultaneous finding the zeros of algebraic polynomials // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1991. – **31**, № 9. – С. 1407–1410.
9. *Илиев А. И., Семерджиев Х. И.* О некоторых обобщениях метода Чебышева для одновременного нахождения всех корней полиномиальных уравнений // Там же. – 1999. – **39**, № 9. – С. 1445–1452.
10. *Трауб Дж.* Итерационные методы решения уравнений. – М.: Мир, 1985. – 264 с.
11. *Подлевський Б. М.* Про один підхід до побудови двосторонніх ітераційних методів розв'язування нелінійних рівнянь // Допов. НАН України. – 1998. – № 5. – С. 37–41.
12. *Подлевський Б. М.* Про нові властивості методу Гейлі // Там же. – 1999. – № 12. – С. 21–26.
13. *Крейн М. Г., Наймарк М. А.* Метод симметрических и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений. – Харьков: ДНТВУ, 1936. – 44 с.

Одержано 22.04.2002