УДК 519.1

Л. А. Назарова, А. В. Ройтер (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

НОРМА ОТНОШЕНИЯ, РАЗДЕЛЯЮЩИЕ ФУНКЦИИ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МАРКИРОВАННЫХ КОЛЧАНОВ

We consider numerical functions that separate the Dynkin schemes, the Coxeter graphs, and hand marked quivers.

Розглядаються числові функції, що виділяють схеми Динкіна, графи Кокстера та ручні марковані колчани.

Хорошо известно, что схемы (и расширенные схемы) Дынкина широко распространены в современной математике.

По существу, известно также, что по крайней мере часть этих схем может быть охарактеризована некоторыми числовыми функциями. Однако эти функции возникают и в тех случаях, в которых схемы Дынкина естественно ввести нельзя.

Авторы столкнулись с этим при изучении представлений диадических и триадических множеств [1, 2], где многократно появляются функция $\mu(n_1, n_2, n_3) = n_1n_2 + n_1n_3 + n_2n_3 + n_1n_2n_3$ и условия $\mu < 4$ и $\mu = 4$, являющиеся условиями конечной представимости и ручности соответствующих множеств.

С другой стороны, в [3, 4] для бинарного отношения R была введена его норма $\|R\| \in [0, 1]$, представляющая содержательный интерес, по крайней мере для частично упорядоченных множеств (чум) в связи с их представлениями [5].

Если $(S, \leq)$ — чум, то, положив $P(S) = \|\leq\|^{-1}$, получим критерии конечной представимости и ручности чум в виде $P(S) < 4$ и $P(S) = 4$. Если S_t — объединение t непересекающихся цепей порядков $n_1, \ldots, n_t$, чьи элементы попарно не сравнимы, то

$$P(S_t) = \sum_{i=1}^{t}\left(1 + \frac{n_i - 1}{n_i + 1}\right) \quad \text{(см. леммы 3, 4).}$$

Тривиальное преобразование при $t = 3$ показывает, что $P(S_t) \leq 4$, если и только если $\mu(n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 - 1) \leq 4$.

Отождествляя S_t с вектором $(n_1, \ldots, n_t)$, можно рассматривать числовую функцию ρ (от любого числа переменных t), определенную на $\mathbb{N}$ по указанной выше формуле, и естественным образом доопределить ее, если значения некоторых ее переменных равны ∞. При $t = 3$ и конечных переменных эта функция по существу (с точностью до постоянных множителя и слагаемого) совпадает с функцией $n_1^{-1} + n_2^{-1} + n_3^{-1}$, играющей важную роль в теории групп Кокстера, систем корней и т. д. и восходящей еще к Мебиусу [6] ($\rho(n_1, n_2, n_3) = 6 - 2\sum_{i=1}^{3}(n_i + 1)^{-1}$).

В пунктах 1, 2 мы рассматриваем функцию P, определенную для произвольного конечного множества S с бинарным отношением R. Из определения следует, что если $S' \subset S$, то $P(S', R) \leq P(S, R)$. Изучение P-точных чум, т. е. таких чум S, что при $S' \subset S$ $P(S', R) < P(S, R)$, в некоторой степени проясняет строение чум $K_1 - K_5$ и $N_0 - N_5$ из критериев конечной представимости и ручности чум [7, 8].

В пунктах 3, 4 функция ρ естественным образом рассматривается как функция от нескольких переменных, определенная на $(\mathbb{N} \sqcup \infty)$, и в этих терминах характеризуются схемы Дынкина, расширенные схемы Дынкина и графы Кокстера.

В пунктах 6 – 8 функции ρ и μ применяются при изучении представлений маркированных колчанов, введенных авторами в [1, 9], являющихся обобщением колчанов Габриеля [10] и содержащих в себе большинство известных матричных задач [11].

При этом оказывается, что часто в терминах функции ρ переформулируются результаты, известные в терминах схем Дынкина, но в ряде случаев функции ρ и μ необходимы там, где использование схем Дынкина невозможно, или, во всяком случае, достаточно затруднительно.

1. Норма бинарного отношения. Пусть R — произвольное бинарное отношение на конечном множестве $S = \{1, \ldots, n\}$, $n \geq 1$. R можно рассматривать как функцию от двух переменных, определенную на S со значениями в $\{0, 1\}$: $R(i, j) = 1$, если i и j находятся в отношении R, и $R(i, j) = 0$ — в противном случае. Сопоставим R квадратичную форму

$$f_R(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,\, j=1}^{n} R(i, j) x_i x_j$$

и назовем *нормой* $\|R\|$ отношения R наименьшее значение, которое принимает форма f_R на стандартном симплексе, т. е. на множестве векторов $(x_1, \ldots, x_n)$, где x_i — вещественные неотрицательные числа и $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Это значение достигается согласно второй теореме Вейерштрасса из математического анализа и может быть вычислено по обычным правилам, откуда, в частности, следует, что $\|R\|$ — рациональное число.

Вектор $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ (вообще говоря, не единственный), на котором достигается это наименьшее значение, назовем *минимальным* для множества (S, R).

Легко видеть, что $0 \leq \|R\| \leq 1$, причем $\|R\| = 0$, если и только если R не рефлексивно, и $\|R\| = 1$, если (и только если) R — полное отношение (т. е. iRj для всех $i, j \in S$). Будем далее считать, что все рассматриваемые отношения рефлексивны (iRi для всех $i \in S$)[1].

При $\alpha, \beta \in S$ положим $r_{\alpha\beta} = R(\alpha, \beta) + R(\beta, \alpha)$ (таким образом, для любого α $r_{\alpha,\alpha} = 2$).

Лемма 1. *Если* $\overline{x}$ *— положительный (т. е.* $x_i > 0$ *при* $i = \overline{1, n}$*) минимальный вектор, то* $\sum_{i=1}^{n} r_{i\alpha} x_i = \sum_{i=1}^{n} r_{i\beta} x_i$ *при любых* $\alpha, \beta \in S$.

Ясно, что

$$\sum_{i=1}^{n} r_{i\alpha} x_i = \frac{\partial f_R}{\partial x_\alpha}(x_1, \ldots, x_n).$$

Однако, чтобы избавиться от условия $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, рассмотрим функцию $\hat{f} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^{-2} f_R$. Легко видеть, что на $\overline{x}$ будет достигаться (безусловный) минимум $\hat{f}$. Поэтому

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_\alpha}(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} r_{i\alpha} x_i \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^{-2} - 2 f_R(\overline{x}) \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^{-3} = 0.$$

---

[1] Замена в определении нормы минимума на максимум не кажется содержательной: при определении такой нормы $\overline{\|\cdot\|}$ легко видеть, что $\overline{\|R\|} = 1 - \|\overline{R}\|$, где R — отношение, обратное к R, и если $\overline{\|\cdot\|}$ нетривиальна на рефлексивных, то $\overline{\|\cdot\|}$ — на антирефлексивных отношениях.

Но $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Поэтому $\sum_{i=1}^{n} r_{i\alpha} x_i = 2f_R(\bar{x})$. Правая часть не зависит от α, откуда и следует утверждение леммы.

Элементы $\alpha, \beta \in S$ назовем *близнецами*, если из $s \in S \setminus \{\alpha, \beta\}$ следует $r_{\alpha s} = r_{\beta s}$.

Бывает полезным следующее почти очевидное утверждение.

Лемма 2. *Если* $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *— минимальный вектор,* α *и* β *— близнецы и* $r_{\alpha,\beta} \le 1$ *(последнее условие заведомо выполняется, если* R *— антисимметричное отношение), то* $x_\alpha = x_\beta$.

Положим $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, где $y_i = x_i$, если $i \notin \{\alpha, \beta\}$, и $y_\alpha = y_\beta = (x_\alpha + x_\beta)/2$. Тогда

$$f_R(\bar{x}) - f_R(\bar{y}) = x_\alpha^2 + x_\beta^2 + r_{\alpha,\beta} x_\alpha x_\beta - \frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta)^2 - \frac{1}{4} r_{\alpha,\beta}(x_\alpha + x_\beta)^2$$

и при $r_{\alpha,\beta} = 1$ эта разность равна $(x_\alpha - x_\beta)^2/4$, а при $r_{\alpha,\beta} = 0$ — $(x_\alpha - x_\beta)^2/2$. Следовательно, если $x_\alpha \ne x_\beta$, то $f_R(\bar{x}) > f_R(\bar{y})$, что противоречит минимальности $\bar{x}$.

Пусть R_1 — отношение на S_1, а R_2 — на S_2. $S_1 \sqcup S_2$ — дизъюнктивное объединение S_1 и S_2 и $R_1 \sqcup R_2$ — соответствующее отношение на $S_1 \sqcup S_2$ (если R_1 и R_2 — отношения частичного порядка, то $(S_1 \sqcup S_2, R_1 \sqcup R_2)$ называется *кардинальной суммой* $(S_1, R_1) + (S_2, R_2)$ [12]). Множество S с отношением R *связное*, если $(S, R) \ne (S_1 \sqcup S_2, R_1 \sqcup R_2)$.

Лемма 3 [4]. $\| R_1 \sqcup R_2 \|^{-1} = \| R_1 \|^{-1} + \| R_2 \|^{-1}$.

Пусть $\bar{z} = \left(x_1, \ldots, x_{n_1}, y_1, \ldots, y_{n_2}\right)$ — минимальный вектор для $(S_1, R_1) \sqcup (S_2, R_2)$, $\sum_{i=1}^{n_1} x_i = \lambda$, $\sum_{i=1}^{n_2} y_i = 1 - \lambda$. Тогда $\bar{x}' = \lambda^{-1}\left(x_1, \ldots, x_{n_1}\right)$ будет минимальным вектором для (S_1, R_1), а $\bar{y}' = (1-\lambda)^{-1}\left(y_1, \ldots, y_{n_2}\right)$ — для (S_2, R_2). Пусть $u = \| R_1 \| = f_{R_1}(\bar{x}')$, $v = \| R_2 \| = f_{R_2}(\bar{y}')$. Тогда $\| R \| = \lambda^2 u + (1-\lambda)^2 v = g(\lambda)$, причем λ должно давать наименьшее значение $g(\lambda)$ на отрезке $[0, 1]$. Беря производную по λ (и полагая постоянными u и v), получаем

$$2\lambda u - 2(1-\lambda)v = 0, \quad \lambda = \frac{v}{u+v}, \quad 1 - \lambda = \frac{u}{u+v}.$$

При этом значении λ имеем

$$f_R(\bar{z}) = \frac{v^2 u}{(u+v)^2} + \frac{u^2 v}{(u+v)^2} = \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right)^{-1}.$$

Нужно еще проверить, что $uv/(u+v) < u = g(1)$ и $uv/(u+v) < v = g(0)$. При $\lambda = 0$ имеем

$$v - \frac{uv}{u+v} = \frac{v^2}{u+v} > 0,$$

аналогично при $\lambda = 1$ $u^2 > 0$. Таким образом, при $\lambda = v/(u+v)$ действительно имеем наименьшее значение для $\lambda^2 u + (1-\lambda)^2 v$, и лемма доказана.

В связи с этим утверждением введем функцию $P(S) = P(S, R)$, равную $\| R \|^{-1}$. Тогда $P(S_1 \sqcup S_2, R_1 \sqcup R_2) = P(S_1, R_1) + P(S_2, R_2)$.

Пусть L_n — (линейно) упорядоченное множество (цепь) порядка n.

Лемма 4. $P(L_n) = 1 + \dfrac{n-1}{n+1}$.

С учетом леммы 2 минимальный вектор $\bar{x}$ для L_n есть $(1/n,\ldots,1/n)$;

$$f_R(\bar{x}) = \frac{1}{n^2}\left(n + C_n^2\right) = \frac{1}{n^2}\left(n + \frac{1}{2}n(n-1)\right) = \frac{n+1}{2n},$$

$$P(L_n) = \frac{2n}{n+1} = 1 + \frac{n-1}{n+1}.$$

Таким образом, для всех линейных частично упорядоченных множеств $1 \leq$ $\leq P < 2$.

***Замечание* 1.** Пусть чум S не линейно упорядочено. Назовем S *полулинейным*, если любой его элемент не сравним самое большее с одним элементом. Легко проверяется, что следующие условия равносильны:

1) S полулинейно;

2) S есть ординальная сумма [12] антицепей порядков 1 и 2;

3) $P(S) = 2$.

Из леммы 3 непосредственно следует, что если R — отношение эквивалентности на S, то $P(S, R)$ равно числу классов эквивалентности.

Из определения функции P следует, что если $S' \subset S$ и R' — отношение на S', индуцированное R, то $P(S', R') \leq P(S, R)$. Множество (S, R) назовем *P-точным*, если $P(S', R') < P(S, R)$ для любого $(S', R') \subset (S, R)$.

Ясно, что полное отношение P-точное только при $n = 1$, а отношение эквивалентности P-точное, если и только если каждый клас эквивалентности содержит один элемент.

Изучение P-точных множеств сводится к связным, так как из леммы 3 следует, что $\left(\bigsqcup_{i=1}^{t} S_i,\ \bigsqcup_{i=1}^{t} R_i\right)$ P-точно, если и только если P-точно каждое (S_i, R_i).

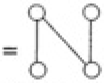
Из леммы 4 следует, что L_n — P-точное при любом n.

Критерий P-точности для произвольных бинарных отношений авторам не известен. Его нахождение составило бы, по-видимому, достаточно трудную и содержательную задачу. В действительности мотивация рассмотрения нормы отношения (а следовательно, функции $P(S, R)$ и P-точных множеств) авторам известна только для отношений частичного порядка, однако ввиду естественности приведенных определений представляется вероятной содержательность этих понятий и в общем случае.

2. P-точные частично упорядоченные множества. Здесь и далее $S = (S, \leq)$ — (конечное) частично упорядоченное множество (чум).

Следуя П. Габриелю, будем вместо „*ориентированный граф*" (вообще говоря, допускающий петли и параллельные стрелки, т. е. по несколько стрелок между одними и теми же вершинами) использовать термин *колчан*. Конечное чум S обычно изображается его колчаном Хассе $Q(S)$: две точки (элементы) S соединяются стрелкой $x \to y$, если $x < y$ и $S \not\ni z$ такого, что $x < z < y$. Будем вместо стрелок обычно писать черточки, считая, что стрелка всегда направлена снизу вверх. *Шириной* $w(S)$ назовем максимальное число попарно несравнимых элементов S. S — *примитивное*, если $S = \bigsqcup_{i=1}^{t} L_{n_i}^{i}$, т. е. есть объединение нескольких попарно несравнимых (x не сравним с y, при $x \in L^i$, $y \in L^j$, $i \neq j$) цепей. Примитивное чум будем в дальнейшем записывать также в виде $(n_1, \ldots, n_t)$, в частности, (n) — цепь порядка n.

Представления частично упорядоченных множеств были введены в [5] (см. п. 5 данной статьи). В [7] доказан следующий критерий конечной представимости.

Чум S конечнопредставимо (т. е. имеет конечное число попарно не эквивалентных неразложимых представлений), если и только если S не содержит следующих подмножеств: $K_1 = (1, 1, 1, 1)$, $K_2 = (2, 2, 2)$, $K_3 = (1, 3, 3)$, $K_4 = (1, 2, 5)$ и $K_5 = (4) \sqcup \hat{N}$; здесь и далее используется обозначение $\hat{N}$ = .

В [8, 13 – 15] бесконечнопредставимые чум и другие матричные задачи разбиты на два типа: ручные и дикие. Определения этих типов в перечисленных работах формально несколько различаются, но фактически совпадают, и мы не будем их здесь приводить. Отметим только, что в соответствии с [9, 15, 16] нам удобно различать конечнопредставимые и ручные задачи.

В [8] доказано, что чум имеет ручной тип, если и только если S содержит одно из множеств $K_1 - K_5$ и не содержит следующих подмножеств: $N_0 = (1, 1, 1, 1, 1)$, $N_1 = (1, 1, 1, 2)$, $N_2 = (3, 2, 2)$, $N_3 = (1, 3, 4)$, $N_4 = (1, 2, 6)$ и $N_5 = (5) \sqcup \hat{N}$.

***Замечание* 2.** Из приведенных двух критериев следует, что любое дикое чум содержит ручное подмножество. Это верно и для других матричных задач, но не следует из определений.

Чум $K_1 - K_5$ и $N_0 - N_5$ выглядят весьма просто, но несколько загадочно (в частности, единственные не примитивные K_5 и N_5).

Ниже мы рассмотрим перечисленные „критические" чум с точки зрения определенной в п. 1 функции P.

С помощью лемм 4 и 3 нетрудно убедиться, что при $i = \overline{1, 4}$ $P(K_i) = 4$; $P(K_5)$ тоже равно 4, но для этого надо подсчитать, что $P(\hat{N}) = 2, 4$. Для множеств $N_0 - N_5$ $P(N_i) > 4$.

***Замечание* 3.** Аналогично замечанию 1 проверяется, что равносильны условия:

1) S не содержит подмножеств вида $(1, 3)$, $(1, 1, 1)$, $(2, 2)$ и $\hat{N}$;

2) S есть ординальная сумма чум вида (1), $(1, 1)$ и $(1, 2)$;

3) $P(S) < 2, 4$.

В [3, 4] доказано следующее предложение.

Предложение 1. *Чум S конечнопредставимо (соответственно ручное), если $P(S) < 4$ (соответственно $P(S) = 4$).*

Из этого предложения и критериев конечной представимости и ручности следует, что множествами $K_1 - K_5$ исчерпываются все P-точные множества, для которых $P = 4$. Множества N_i характеризуются в терминах функции P так: $S \in \{N_i\}$, если и только если $P(S) > 4$, но для любого $S' \subset S$ $P(S') \leq 4$.

Напомним, что по теореме Дилуорса каждое чум ширины t есть объединение t непересекающихся цепей. Назовем чум S *забором*, если S — объединение t непересекающихся цепей $Z_1, \ldots, Z_t$, где $|Z_i| \geq 2$, $i = \overline{1, t}$, $t > 1$, минимальный элемент Z_i меньше максимального элемента Z_{i+1}, $i = \overline{1, t-1}$, и других сравнений между элементами разных цепей нет. Таким образом, забор задается набором $\langle n_1, \ldots, n_t \rangle$, где $n_i = |Z_i|$, $n_i \geq 2$. Чум $\hat{N}$ является простейшим забором $\langle 2, 2 \rangle$.

Можно проверить, что *равновысокий* забор (т. е. $n_i = n / t$ при $i = \overline{1, t}$) P-точен, а забор $\{n_1, n_2\}$ при $n_1 \neq n_2$ не P-точен. Однако забор $\langle 2, 3, 2 \rangle$ (указанный М. Зельдичем) P-точен.

Минимальные точки цепей Z_i при $i=\overline{1,n-1}$ обозначим через z_i^-, а максимальные точки цепей Z_i при $i=\overline{2,n}$ — через z_i^+, остальные точки забора назовем *общими*.

Лемма 5. *Если вектор* $\bar{x}=(x(1),\ldots,x(n))$ *положительный минимальный для забора* S, *то существуют такие числа* α, β, *что*:

1) $x(s)=\alpha$, *если* s — *общая точка*;

2) $x(z_i^-)+x(z_{i+1}^+)=\alpha$ *при* $i=\overline{1,t-1}$;

3) $\sum_{s\in Z_i} x(s)=\beta$ *при* $i=\overline{1,t}$.

Доказательство непосредственно следует из леммы 1. (Вначале, применяя лемму к z_i^- и z_i^+, $1<i<t$, получаем свойство 2, затем применяя ее к общей и необщей точкам каждой цепи Z_i, получаем свойство 1, и, наконец, применяя к общим точкам различных Z_i, получаем свойство 3.)

Предложение 2. *Если* S — *забор и* $|Z_1|=k$, *то* S *может быть Р-точным, только если* S — *равномерный забор, т. е.*

a) $k\le |Z_i|\le k+1$ *при* $i=\overline{2,t-1}$;

b) $|Z_t|=k$;

c) *если* m — *число тех* Z_i, *для которых* $|Z_i|=k+1$ $(0\le m\le t-2)$, *то* $m+1$ *взаимно просто с* t;

d) *если* $u_1<\ldots<u_m\in\{1,\ldots,t\}$ — *те числа, для которых* $|Z_{u_i}|\ne k$, *то*

$$u_i=\left[\frac{it}{m+1}\right]+1.$$

При выполнении условий a), b), c), d) *существует вектор* $\bar{x}$, *удовлетворяющий условиям леммы* 1.

Пусть $\bar{x}=(x(1),\ldots,x(n))$ — положительный минимальный вектор для забора S. Положим $\gamma=x(z_1^-)$. Утверждения a), b) непосредственно следуют из леммы 5. Из нее также следует, что $\gamma=\beta-(k-1)\alpha$. Тогда $x(z_2^+)=\alpha-\gamma=k\alpha-\beta$. Если $t>2$, то

$$\sum_{s\in Z_2} x(s)=\beta=r_2\alpha+\alpha-\gamma+x(z_2^-),$$

где $r_2=k-2$ при $|Z_2|=k$ и $r_2=k-1$ при $|Z_2|=k+1$.

Таким образом, при $|Z_2|=k$

$$x(z_2^-)=\beta-(k-2)\alpha-\alpha+\gamma=2\gamma,$$

а при $|Z_2|=k+1$

$$x(z_2^-)=2\gamma-\alpha.$$

Аналогично получаем, что при $i=\overline{2,t-1}$

$$x(z_i^-)=i\gamma-u_i\alpha,$$

где u_i — число таких $j=\overline{2,i}$, что $|Z_j|=k+1$. Из того, что $0<x(z_i^-)<\alpha$, следует $u_i=\left[\dfrac{i\gamma}{\alpha}\right]$.

С другой стороны,

$$(k-1)\alpha + \gamma = \beta = \sum_{s \in Z_i} x(s) = (k-1)\alpha + x\left(z_i^+\right) =$$

$$= (k-1)\alpha + \alpha - x\left(z_{t-1}^-\right) = k\alpha - (t-1)\gamma + m\alpha,$$

$$m = u_{t-1}, \quad t\gamma = \alpha(1+m), \quad \gamma = \frac{(1+m)\alpha}{t}, \quad \left[\frac{i(1+m)}{t}\right],$$

откуда следуют утверждения c) и d) (если бы утверждение c) не выполнялось, то при некотором i было бы $x\left(z_i^-\right) = 0$). При выполнении условий a), b) c), d) из изложенного выше следует, что однозначно строится положительный вектор $\bar{x}$, удовлетворяющий условиям леммы 6.

Из предложения следует, что при данных t, k, m и заборе, заданном условиями a), b), d), положительный вектор $\bar{x}$, удовлетворяющий условиям лемм 5 и 1, существует, если и только если выполняется условие c).

***Пример* 1.** $t = 7$, $m = 3$, $k = 2$. Тогда $u_1 = 2$, $u_2 = 4$, $u_3 = 6$, $Z = \langle 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2\rangle$. Таким образом, условие d) обеспечивает равномерность расположения удлиненных цепей среди всех цепей Z_i.

Гипотеза 1. *Каждое P-точное связное частично упорядоченное множество является либо цепью, либо равномерным забором.*

Из гипотезы 1 и предложения 1 нетрудно восстановить критерии конечной представимости и ручности, т. е. списки K_i и N_i.

3. Числовая функция ρ и характеризация схем Дынкина. Через $\mathbb{N}^\infty$ обозначим множество, состоящее из натуральных чисел и символа ∞, считая $\infty + n = \infty - n = \infty + \infty = \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Построим функцию ρ на $\mathbb{N}^\infty$. Отождествляя натуральное число n с цепью L_n, полагаем (с учетом леммы 4) $\rho(n) = 1 + (n-1)/(n+1)$ и, „переходя к пределу" при $n \to \infty$, имеем $\rho(\infty) = 2$. Мы будем иногда считать (по той же формуле!) $\rho(0) = 0$, а также

$$\rho(n_1, \ldots, n_t) = \sum_{i=1}^{t} \rho(n_i) \quad (n_i \in \mathbb{N}^\infty).$$

Мы часто будем рассматривать условие $\rho(n_1, \ldots, n_t) \le 4$. При $t \le 2$ оно выполняется всегда и равенство имеет место только при $n_1 = n_2 = \infty$; при $t \ge 4$ условие (с равенством) выполняется только при $t = 4$ и $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1$. При $t = 3$, если $n_1 = \infty$ (будем считать $n_1 \ge n_2 \ge n_3$), возможно только $n_2 = n_3 = 1$. Итак, условие не совсем очевидно только при $t = 3$ и $n_i < \infty$.

Тривиальным алгебраическим преобразованием доказывается следующая лемма.

Лемма 6. *При $n_i < \infty$ следующие условия равносильны:*

i) $\rho(n_1, n_2, n_3) < 4$ (*соответственно* $\rho(n_1, n_2, n_3) = 4$);

ii) $(n_1+1)^{-1} + (n_2+1)^{-1} + (n_3+1)^{-1} > 1$ (*соответственно* $(n_1+1)^{-1} + (n_2+1)^{-1} + (n_3+1)^{-1} = 1$);

iii) $\mu(n_1-1, n_2-1, n_3-1) < 4$ (*соответственно* $\mu(n_1-1, n_2-1, n_3-1) = 4$).

Уравнение $\rho(x_1, \ldots, x_t) = 4$, $x_i \in \mathbb{N}^\infty$, *имеет в точности шесть решений:* (∞, ∞), $(\infty, 1, 1)$, $(5, 2, 1)$, $(3, 3, 1)$, $(2, 2, 2)$ *и* $(1, 1, 1, 1)$.

Из эквивалентности условий i) и ii) следует, что в терминах ρ могут быть переформулированы известные утверждения с $\sum_{i=1}^{3} n_i^{-1}$. Например, если G — группа с образующими g_1, g_2, g_3 и соотношениями $g_1^2 = g_2^2 = g_3^2 = (g_1g_2)^{n_1} = (g_1g_3)^{n_2} = (g_2g_3)^{n_3}$ (см. [6]), то G конечна, если и только если $\rho(n_1-1, n_2-1, n_3-1) < 4$ и в этом случае $|G| = 8(4-\rho(n_1-1, n_2-1, n_3-1))^{-1}$. В таких переформулировках, разумеется, нет никакого смысла, но они подтверждают распространенность ρ.

При $t=3$ и $n_i < \infty$ наиболее удобна функция μ, однако перенос μ и $\sum n_i^{-1}$ на общий случай хотя и возможен, но не выглядит естественно.

Пусть Γ — граф. Будем рассматривать только конечные графы, но допускать (в отличие, например, от [6]) петли и параллельные ребра (т. е. несколько ребер между одними и теми же вершинами). Таким образом, Γ состоит из двух (конечных) множеств Γ_v $(\neq \varnothing)$, Γ_e и отображения φ, сопоставляющего каждому ребру $r \in \Gamma_e$ одноэлементное (если r — петля) или двухэлементное подмножество множества вершин Γ_v. Подмножество петель в Γ_e обозначим Γ_L. Каждый граф есть объединение своих *связных компонент*.

Для $x \in \Gamma_v$ положим $\varphi^{-1}(x) = \{\alpha \in \Gamma_e \mid \varphi(\alpha) \ni x\}$. *Кратность* $g(x, \Gamma) = g(x)$ вершины x есть $|\varphi^{-1}(x)|$, x — *точка ветвления*, если $g(x) > 2$. Через A_l $(l \geq 1)$ обозначим граф $\overset{a_1}{\circ}\!\!-\!\!-\; \ldots \;-\!\!-\!\!\overset{a_l}{\circ}$ $(g(a_1) = g(a_l) = 1$, $g(a_i) = 2$ при $1 < i < l)$. Этот граф назовем *простым*.

По существу хорошо известна (в терминах условия ii)) связь „конечных" решений уравнения $\rho(x_1, \ldots, x_t) = 4$ со схемами и расширенными схемами Дынкина. Если Γ — дерево (т. е. связный граф без циклов) [6] с единственной точкой ветвления x и $\Gamma' = \Gamma \setminus x$ $(\Gamma'_v = \Gamma_v \setminus x$, $\Gamma'_e = \Gamma_e \setminus \varphi^{-1}(x))$ распадается на связные компоненты $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_t$, $t = g(x) \geq 3$, то Γ является расширенной схемой Дынкина ($\tilde{E}_8$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_6$ или $\tilde{D}_4$ — см. список II ниже), если и только если $\rho(|\Gamma_1|, \ldots, |\Gamma_t|) = 4$. В этом пункте мы охарактеризуем в терминах функции ρ все схемы и расширенные схемы Дынкина.

Для $\alpha \in \Gamma_e$ обозначим через Γ'_α граф $\Gamma \setminus \alpha$ $((\Gamma'_\alpha)_v = \Gamma_v$, $(\Gamma'_\alpha)_e = \Gamma_e \setminus \{\alpha\})$. Ребро α связного графа Γ *циклично*, если Γ'_α связен. В противном случае граф Γ'_α распадается на две связные компоненты: $\Gamma'(x, \alpha) \ni x$ и $\Gamma'(y, \alpha) \ni y$, где $\varphi(\alpha) = \{x, y\}$.

(v, f)-Графом $\overline{\Gamma} = (\Gamma, v, f)$ назовем граф Γ, на множествах Γ_v и Γ_e которого заданы функции v и f со значениями соответственно в $\mathbb{N}^\infty$ и $R[1, \infty]$, где $R[1, \infty]$ состоит из вещественных чисел, больших или равных 1, и символа ∞.

Если функция v (соответственно f) для всех вершин (соответственно ребер) равна 1, то (Γ, f) — *f-граф* (соответственно (Γ, v) — *v-граф*)[2]. Если $f(\alpha) \in \mathbb{N}^\infty$ $(\alpha \in \Gamma_e)$, то (Γ, f) — *целый* f-граф; если, кроме того, $f(\alpha) \geq 3$ и Γ не содержит петель и параллельных ребер, то (Γ, f) называется *графом Кокстера* [6].

f-Кратность $g_f(x)$ вершины x (v, f)-графа (Γ, v, f) есть $\sum_{\alpha \in \varphi^{-1}(x)} f(\alpha)$.

---

[2] Фактически мы будем рассматривать только f-графы (в пп. 3, 4) и v-графы (в п. 8), но кажется естественным дать некоторые определения для (v, f)-графов.

Инцидентную пару (x, α) ($x \in \Gamma_v$, $\alpha \in \Gamma_e$, $x \in \varphi(\alpha)$) назовем *простой*, если α не циклично, $g(y) \leq 2$ ($\varphi(\alpha) = \{x, y\}$) и граф $\Gamma'(y, \alpha)$ простой; пара (x, α) (v, f)-*простая* (в $\overline{\Gamma} = (\Gamma, v, f)$), если, кроме того, $v(a) = 1$ при $a \in \Gamma'(y, \alpha)$, $g(a, \Gamma) \neq 1$, и, наконец, $f(\beta) = 1$ для всех $\beta \in \Gamma'(y, \alpha)_e$.

Паре (x, α) ($\varphi(\alpha) \ni x$) сопоставим число $\partial x / \partial \alpha$ следующим образом:

1) $\dfrac{\partial x}{\partial \alpha} = \rho\left(\sum\limits_{z \in \Gamma'(y, \alpha)} v(z)\right)$, если (x, α) — (v, f)-простая пара;

2) $\dfrac{\partial x}{\partial \alpha} = 2$ (т. е. $\rho(\infty)$), если $\alpha \notin \Gamma_L$ и (x, α) не (v, f)-простая пара;

3) $\dfrac{\partial x}{\partial \alpha} = 4$, если $\alpha \in \Gamma_L$.

Если x — вершина (v, f)-графа $\overline{\Gamma}$, то ее ρ-*кратность*

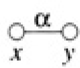
$$g_\rho(x) = \rho(v(x) - 1) + \sum_{\alpha \in \varphi^{-1}(x)} f(\alpha) \frac{\partial x}{\partial \alpha}.$$

Если $\overline{\Gamma} = (\Gamma, f)$ — f-граф, (или $v(x) = 1$), то слагаемое $\rho(v(x) - 1)$ исчезает.

Разумеется, определение ρ-кратности имеет смысл и тогда, когда v и f тождественно равны 1.

***Замечание* 4.** Для v-графа $\overline{\Gamma} = (\Gamma, v)$ можно построить граф G следующим образом. Для каждой $x \in \Gamma_v$ такой, что $1 < v(x) < \infty$, мы добавим точки $a_2^x, \ldots, a_m^x$, где $m = f(x)$, так, что $x — a_2^x — \ldots — a_m^x$ — простой подграф в G (и других ребер, инцидентных вершинам $a_2^x, \ldots, a_m^x$, в G нет), а для каждой y, если $f(y) = \infty$, добавим две точки b_1^y и b_2^y так, что $b_1^y — y — b_2^y$ (и других ребер, инцидентных вершинам b_1^y, b_2^y, в G нет) [9]. Из введенного нами определения ρ-кратности следует, что если $z \in \Gamma_v$, то ее ρ-кратности в v-графе (Γ, v) и графе G совпадают, а если $w \in G_v \setminus \Gamma_v$, то $g_\rho(w) < 4$.

***Пример* 2.**

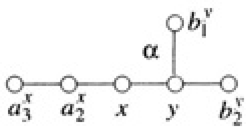
$\Gamma =$ 

;

$v(x) = 3$, $v(y) = \infty$ в v-графе $\overline{\Gamma}$,

$$g_\rho(x) = \rho(3 - 1) + \frac{\partial x}{\partial \alpha} = \rho(2) + \rho(\infty) = 3\frac{1}{3},$$

$$g_\rho(y) = \rho(\infty - 1) + \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \rho(\infty) + \rho(3) = 3\frac{1}{2}.$$

$G =$ 

$\dfrac{\partial x}{\partial \alpha} = 2$

(пара (x, α) не простая, так как хотя $G'(y, \alpha) \simeq A_3$, но $g(y) > 2$),

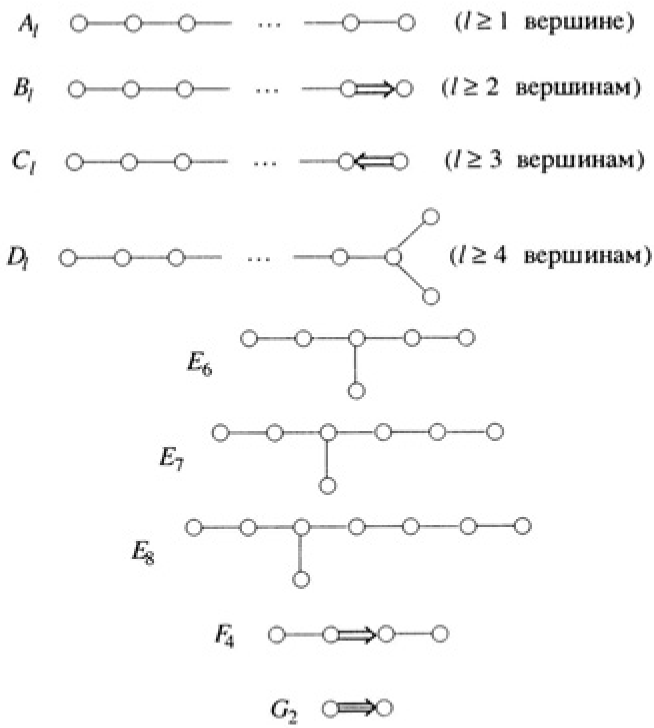
$$\frac{\partial x}{\partial (x, a_2^x)} = \rho(2) = 1\frac{1}{3}, \qquad g_\rho(x) = 3\frac{1}{3}, \qquad \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \rho(3) = 1\frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial y}{\partial (y, b_1^y)} = \frac{\partial y}{\partial (y, b_2^y)} = 1, \qquad g_\rho(y) = 3\frac{1}{2},$$

$$g_\rho\left(a_2^x\right) = \frac{\partial a_2^x}{\partial\left(a_2^x, a_3^x\right)} + \frac{\partial a_2^x}{\partial\left(a_2^x, x\right)} = 1 + 2 = 3,$$

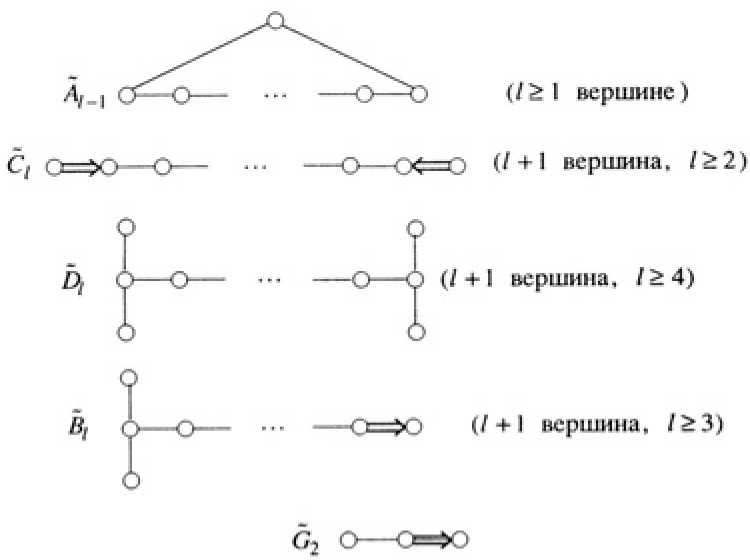
$$g_\rho\left(b_1^y\right) = g_\rho\left(b_2^y\right) = g_\rho\left(a_3^x\right) = 2.$$

Приведем списки схем Дынкина

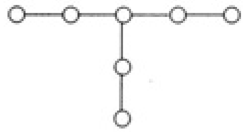


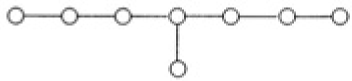
(I)

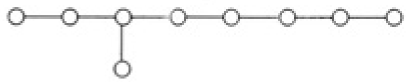
и расширенных схем Дынкина



(II)

$\tilde{E}_6$ 

$\tilde{E}_7$ 

$\tilde{E}_8$ 

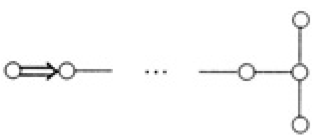
$\tilde{F}_4$ 

BA_2 

FE_6 

BA_{l+1}  ($l+1$ вершина, $l \geq 2$)

BD_l  ($l+1$ вершина, $l \geq 2$)

CA_l  ($l+1$ вершина, $l \geq 3$)

GD_4 .

Каждую схему (или расширенную схему) Дынкина можно рассматривать как целый f-граф, в котором на каждом ребре α с неединичным $f(\alpha)$ дополнительно нарисована стрелка (не единичное $f(\alpha)$ равно кратности соответствующей стрелки).

Содержательно ориентация стрелки существенна для схемы (переориентация меняет систему корней, алгебру Ли и т. д.). Однако из списков I, II видно, что при переориентации схема всегда остается в списках. Будем говорить, что f-граф G *порождает* схему (соответственно расширенную схему) Дынкина, если мы получаем схему (соответственно расширенную схему) Дынкина при некоторой (а значит, и любой другой) расстановке стрелок на ребрах α, для которых $f(\alpha) > 1$.

На рисунках мы иногда будем писать неединичное $f(\alpha)$ над ребром α или рядом с ним. f-Граф, соответствующий схеме X, будем обозначать $\underline{X}$ (например, $\underline{BA_2}$ есть $\circ\overset{4}{\text{—}}\circ$).

Списку I соответствует $\underline{\mathrm{I}} = \left\{ A_l, \underline{B_l}, D_l, E_6, E_7, E_8, \underline{F_4}, \underline{G_2} \right\}$ $\left(\underline{C_l} \sim \underline{B_l}\right)$, списку II — $\underline{\mathrm{II}} = \{ \tilde{A}_{l-1}, \underline{\tilde{C}_l}, \underline{\tilde{D}_l}, \underline{\tilde{B}_l}, \underline{\tilde{G}_2}, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8, \underline{\tilde{F}_4}, \underline{BA_2} \}$.

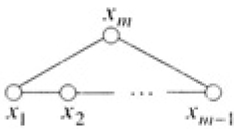
Предложение 3. *Целый связный f-граф $\overline{\Gamma}$ порождает схему Дынкина, если и только если ρ-кратность любой его точки меньше четырех; $\overline{\Gamma}$ порождает расширенную схему Дынкина, если и только если* $\max g_\rho(x) = 4$ $(x \in \Gamma_v)$.

Предположим сначала, что Γ содержит петлю. В списках I, II есть только один такой граф $\Gamma = \tilde{A}_0 : \Gamma_v = \{x\}$, $\Gamma_e = \{\alpha\}$, $\varphi(\alpha) = x$ $(f(\alpha) = 1)$. По приведенным формулам $\partial x / \partial\alpha = 4$, $g_\rho(x) = 4$, т. е. $\tilde{A}_0$ удовлетворяет условию предложения 2.

Пусть α — петля в вершине x и $\overline{\Gamma} \neq \tilde{A}_0$. Тогда либо x связана ребром с вершиной $y \neq x$, либо в x есть еще одна петля, либо $f(\alpha) \neq 1$. Во всех случаях $g_\rho(x) > 4$.

Следовательно, далее можно считать $\Gamma_L = \varnothing$.

Предположим, что Γ содержит цикл



$(m > 1)$.

В $\underline{\mathrm{I}}$, $\underline{\mathrm{II}}$ единственный такой граф $\tilde{A}_{l-1}$, $l > 1$. Для этого графа для любого $x \in \Gamma_v$ $\left|\varphi^{-1}(x)\right| = 2$, и оба ребра $\alpha, \beta \in \varphi^{-1}(x)$ цикличны. Далее,

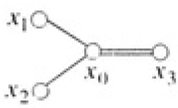
$$\frac{\partial x}{\partial\alpha} = 2, \qquad \frac{\partial x}{\partial\beta} = 2, \qquad g_\rho(x) = \frac{\partial x}{\partial\alpha} + \frac{\partial x}{\partial\beta} = 4.$$

Если $\overline{\Gamma}$ — „другой" (связный) целый f-граф, содержащий цикл, то этот цикл содержит такую точку x, что либо $g(x) > 2$, либо $\varphi(\alpha) \ni x$ и $f(\alpha) \neq 1$. В обоих случаях $g_\rho(x) > 4$.

Итак, можно считать, что граф Γ ацикличен (т. е. „дерево").

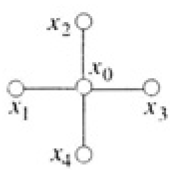
Положим $g_f(\overline{\Gamma}) = \max_{x \in \Gamma_v} g_f(x)$. В f-графах, соответствующих $\underline{\mathrm{I}}$, $\underline{\mathrm{II}}$, $g_f(\overline{\Gamma}) \leq 4$. Ясно, что если $g_f(x) > 4$, то $g_\rho(x) > 4$, т. е. такой f-граф не удовлетворяет условиям предложения.

1. Пусть $g_f(\overline{\Gamma}) = 4$. В $\underline{\mathrm{I}}$, $\underline{\mathrm{II}}$ этому соответствуют f-графы



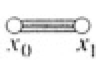
$(\underline{\tilde{B}_3})$

$(\underline{\tilde{C}_2})$



$(\tilde{D}_4)$

$(\underline{\tilde{G}_2})$



$(\underline{BA_2})$.

Везде $g_f(x_0) = 4$ (и, кроме того, $g_f(x_1) = 4$ в $\underline{BA_2}$). В этих случаях $\partial x_0 / \partial\alpha = 1$, $g_\rho(x_0) = g_f(x_0) = 4$ $(\varphi(\alpha) \ni x_0)$. Если $g_f(x) = 1$, то $g_\rho(x) \leq 2$ (x_1, x_2 в $\underline{\tilde{B}_3}$; x_1, x_2, x_3, x_4 в $\tilde{D}_4$; x_1 в $\underline{\tilde{G}_2}$). Если $g_f(x) = 2$, то $g_\rho(x) \leq 4$ (x_3 в $\underline{\tilde{B}_3}$; x_1, x_2 в $\underline{\tilde{C}_2}$). В $\underline{\tilde{G}_2}$ $g_\rho(x_2) = 3\rho(2)$, $\rho(2) = 1\frac{1}{3}$, $g_\rho(x_2) = 4$. Таким образом, перечисленные f-графы удовлетворяют условиям предложения.

Пусть теперь $\overline{\Gamma}$ — произвольный f-граф, удовлетворяющий условиям предложения, $\Gamma_v \ni x$, $g_f(x) = 4$. Тогда $g_\rho(x) = 4$ и $\partial x/\partial\alpha = 1$ для любого $\alpha \in \varphi^{-1}(x)$

$$\left(g_\rho(x) = \sum_{\alpha \in \varphi^{-1}(x)} f(\alpha)\frac{\partial x}{\partial \alpha} = g_f(x) = \sum_{\alpha \in \varphi^{-1}(x)} f(\alpha), \quad 1 \le \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right).$$

При $g(x) = 4$ получаем $\tilde{D}_4$, при $g(x) = 3$ — $\underline{\tilde{B}_3}$, при $g(x) = 2$ — $\underline{\underline{\tilde{C}_2}}$ или $\underline{\tilde{G}_2}$, при $g(x) = 1$ — $\underline{BA_2}$.

2. Пусть $g_f(\overline{\Gamma}) = 3$ и $\left|\left\{ x \in \Gamma_v \,\middle|\, g_f(x) = 3 \right\}\right| = 1$. В $\underline{\mathrm{I}}$, $\underline{\mathrm{II}}$ возможно $\underline{B_l}$ при $l > 2$, D_l, E_6, E_7, E_8, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$. Легко видеть, что при $y \ne x$ $\left(g_f(y) \le 2\right)$ $g_\rho(y) < 4$. Итак,

$$\underline{B_l} : g_\rho(x) = 2 + 1 + \frac{l-3}{l-1} < 4,$$

$$D_l : g_\rho(x) = 1 + 1 + 1 + \frac{l-4}{l-2} < 4,$$

$$E_6 : g_\rho(x) = 1 + 1 + 1 + 0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 3\frac{2}{3},$$

$$E_7 : g_\rho(x) = 1 + 1 + 1 + 0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 3\frac{5}{6},$$

$$E_8 : g_\rho(x) = 1 + 1 + 1 + 0 + \frac{1}{3} + \frac{3}{5} = 3\frac{14}{15},$$

$$\tilde{E}_6 : g_\rho(x) = 1 + 1 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 4,$$

$$\tilde{E}_7 : g_\rho(x) = 1 + 1 + 1 + 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4,$$

$$\tilde{E}_8 : g_\rho(x) = 1 + 1 + 1 + 0 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 4.$$

Если для $\overline{\Gamma}$ выполняются условия предложения и $\varphi(\alpha) \ni x$, то $f(\alpha) \le 2$. Если $f(\alpha) = 2$, то $\varphi(\alpha) = \{x, y\}$ и $g(y) = 1$ (иначе $g_f(y) = 3$), $\Gamma \setminus \{x, y\} = A_m$ (иначе найдется $z \in \Gamma_v \setminus x$, $g_f(z) \ge 3$), причем если $\varphi(\beta) = \{x, z\}$, то пара (x, β) — (v, f)-простая. Имеем $\underline{B_l}$. Если для всех $\alpha \in \Gamma_e$ $f(\alpha) = 1$, то

$$\Gamma \setminus x = A_{n_1} \sqcup A_{n_2} \sqcup A_{n_3}, \quad g_\rho(x) = 3 + \frac{n_1 - 1}{n_1 + 1} + \frac{n_2 - 1}{n_2 + 1} + \frac{n_3 - 1}{n_3 + 1}, \quad n_i \in \mathbb{N}.$$

Из условия $g_\rho(x) \le 4$ получаем E_6, E_7, E_8, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$ (см. лемму 6).

3. Пусть $g_f(\overline{\Gamma}) = 3$ $\left|\left\{ x \in \Gamma_v \,\middle|\, g_f(x) = 3 \right\}\right| = 2$, $g_f(x) = g_f(y) = 3$, и $\overline{\Gamma}$ удовлетворяет условию предложения. Пусть $g(x) = 3$. $\Gamma \setminus x$ распадается на 3 компоненты: Γ_1, Γ_2, Γ_3, и одна из них содержит y. Значит,

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_1} = 2, \quad \frac{\partial x}{\partial \alpha_2} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial \alpha_3} = 1, \quad \varphi(\alpha_i) \ni x.$$

Если $g(y)$ тоже равно 3, то получаем $\tilde{D}_l$ при $l \ge 5$ (с учетом того, что $g_f(z) \le 2$ при $z \notin x, y$). Если $g(y) = 2$, то получаем $\underline{\tilde{B}_l}$ при $l \ge 4$.

Если $g(x) = g(y) = 2$, то возможны два случая:

а) $\varphi(\alpha) = \{x, y\}$, $f(\alpha) = 2$;

b) $\varphi(\alpha) = \{x, u\}$, $\varphi(\beta) = \{y, v\}$, $f(\alpha) = f(\beta) = 2$ (и $f(\gamma) = 1$ при $\gamma \notin \{\alpha, \beta\}$).

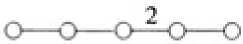
В обоих случаях $\Gamma = A_m$ (иначе есть $z \notin \{x, y\}$, $g_f(z) = 3$).

a) $x = a_t$, $y = a_{t+1}$, $t > 1$, $t + 1 < m$. Тогда

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_{t-1,t}} = \rho(t-1) \quad (\text{где} \quad \alpha_{t-1,t} \in \Gamma_e, \quad \varphi(\alpha_{t-1,t}) = \{a_{t-1}, a_t\}),$$

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \rho(m-t), \quad g_\rho(x) = \rho(t-1) + 2\rho(m-t) \le 4.$$

Согласно лемме 6 $g_\rho(x) \le 4$, если и только если $\mu(t-2, m-t-1, m-t-1) \le 4$. Если $t - 2 \ne 0$, $m - t - 1 \ne 0$, то $t - 2 = m - t - 1 = 1$, $t = 3$, $m = 5$.

$\overline{\Gamma}$ =  = $\underline{\tilde{F}_4}$.

Если $t - 2 = 0$, то $m - t - 1 \le 2$, имеем $t = 2$, $m \in \{4, 5\}$, т. е. $\underline{F_4}$ или $\underline{\tilde{F}_4}$. При $m - t - 1 = 0$ заменим x на y.

b) $x = a_2$, $y = a_{m-1}$ (иначе была бы вершина z такая, что $g_\rho(x) = 3$), имеем $\underline{\tilde{C}_l}$, $l > 2$.

Пусть $g(x) = 1$, тогда $\Gamma_v = \{x, y\}$, имеем $\underline{G_2}$.

Итак, мы получили все схемы случая 3. Ясно, что $g_\rho(y) \le 4$ и $g_\rho(z) \le 4$ при $z \notin (x, y)$.

4. $g_f(\overline{\Gamma}) = 3$, $\left|\left\{x \in \Gamma_v \,\middle|\, g_f(x) = 3\right\}\right| > 2$.

Таких схем в $\underline{\mathrm{I}}$, $\underline{\mathrm{II}}$ нет. Пусть $g_f(x) = g_f(y) = g_f(z) = 3$, и есть путь $x \cdots \overset{\alpha}{\text{---}}\, y \,\overset{\beta}{\text{---}} \cdots z$. Тогда

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{\partial y}{\partial \beta} = 2$$

и ввиду $g_f(y) = 3$ либо есть еще ребро γ, $\varphi(\gamma) \ni y$, либо $f(\alpha) \ne 1$, либо $f(\beta) \ne 1$. Во всех случаях $g_\rho(y) > 4$.

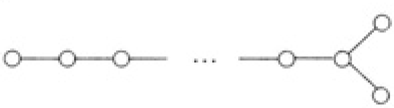
5. $g_f(\overline{\Gamma}) \le 2$. Имеем A_l, $\underline{B_2}$.

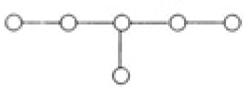
В доказательстве мы рассмотрели все схемы из $\underline{\mathrm{I}}$, $\underline{\mathrm{II}}$, значит, предложение 2 доказано в обе стороны.

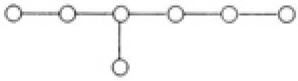
4. Характеризация графов Кокстера. В [6] доказано, что если (и только если) (W, S) — неприводимая конечная система Кокстера, то ее граф Кокстера изоморфен одному из f-графов списка

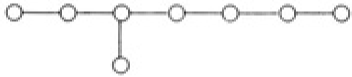
A_l  ($l \ge 1$ вершине)

B_l  ($l \ge 2$ вершинам)

D_l  ($l \ge 4$ вершинам)

E_6 

E_7 

E_8 

(III)

F_4 

G_2 

H_3 

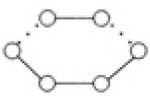
H_4 

$I_2(p)$ 

$(p = 5$ или $p \geq 7)$,

а если (W, S) — неприводимая система Кокстера с конечным множеством S, то для того чтобы ассоциированная квадратичная форма была положительной и вырожденной, необходимо и достаточно, чтобы граф Кокстера был изоморфен одному из f-графов списка

$\tilde{A}_1$ 

$\tilde{A}_l$ $(l \geq 2)$  (цикл с $l+1$ вершиной)

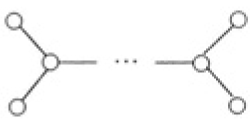
$\tilde{B}_2$ 

$\tilde{B}_l$ $(l \geq 3)$ 

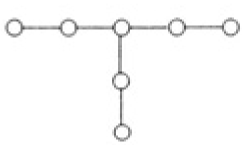
$(l+1$ вершина)

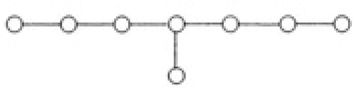
$\tilde{C}_l$ $(l \geq 3)$ 

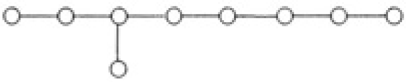
$(l+1$ вершина)

$\tilde{D}_l$ $(l \geq 4)$  $(l+1$ вершина)

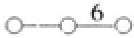
(IV)

$\tilde{E}_6$ 

$\tilde{E}_7$ 

$\tilde{E}_8$ 

$\tilde{F}_4$ 

$\tilde{G}_2$ 

.

Напомним, что для графов Кокстера $f(\alpha) \geq 3$, и если над ребром α не написано никакого числа, то это значит, что $f(\alpha) = 3$.

Для произвольного графа Кокстера $\overline{\Gamma} = (\Gamma, f)$ обозначим через $\hat{\Gamma}$ $\hat{f}$-граф $(\Gamma, \hat{f})$, где $\hat{f}(\alpha) = 4\cos^2(\pi / f(\alpha))$. $\hat{\Gamma}$, разумеется, не будет графом Кокстера и, вообще говоря, не будет целым $\hat{f}$-графом. При $f(\alpha) = \infty$ считаем $\hat{f}(\alpha) = 4\cos^2(0) = 4$. Через $\hat{g}_\rho$ обозначим ρ-кратность в $\hat{\Gamma}$ и через $\widehat{\partial v} / \partial\alpha$ — значение $\partial v / \partial\alpha$ в $\hat{\Gamma}$.

Предложение 4. *Связный граф Кокстера* $\overline{\Gamma}$ *принадлежит списку* III (*соответственно* IV), *если и только если для любой точки* x *графа* $\hat{\Gamma}$ ρ*-кратность* $\hat{g}_\rho(x)$ *меньше* 4 (*соответственно меньше или равна* 4 *и есть* y, *для которого* $\hat{g}_\rho(y) = 4$).

Если $\hat{\Gamma}$ — целый $\hat{f}$-граф (т. е. $f(\alpha) = \{3, 4, 6, \infty$ при $\alpha \in \Gamma_e\}$), то утверждение (в обе стороны) следует из предложения 2 и сравнения списков III с I и IV с II.

Предположим, что $\overline{\Gamma}$ — f-граф, удовлетворяющий условиям предложения, для которого $\hat{\Gamma}$ не целый. Заметим, что если $\hat{f}(\alpha) \neq 1$, то $\hat{f}(\alpha) \geq 2$.

Пусть $6 < f(\alpha) < \infty$, тогда $\hat{f}(\alpha) > 3$; из определения ρ-кратности следует, что $\varphi(\alpha) = \{x, y\}$, $g(x) = 1$, $g(y) = 1$, т. е. имеем $I_2(p)$ $(p > 6)$.

Итак, осталось рассмотреть случай

$$\alpha \in \Gamma_e, \qquad f(\alpha) = 5, \qquad \varphi(\alpha) = \{x, y\},$$

$$\hat{f}(\alpha) = 4\cos^2\frac{\pi}{5} = 4\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{4} = \hat{\alpha} > 2{,}5.$$

Из $\hat{g}_\rho(x) \leq 4$ следует $g(x) \leq 2$. Если $g(x) = g(y) = 1$, то $\overline{\Gamma} = I_2(5)$. Пусть

$$g(x) = 2, \qquad \varphi(\beta) = (z, x), \qquad \hat{f}(\beta) = \hat{\beta},$$

$$\hat{g}_\rho(x) = \hat{\beta}\frac{\widehat{\partial x}}{\partial\beta} + \hat{\alpha}\frac{\widehat{\partial x}}{\partial\alpha} \leq 4.$$

$\hat{\beta} = 1$ (если $\hat{\beta} > 1$, то $\hat{\beta} \geq 2$, $\hat{g}_\rho(x) > 4$), $\widehat{\partial x} / \partial\alpha = 1$, $\widehat{\partial x} / \partial\beta < 1{,}5 = \rho(3)$, пара (x, β) $\hat{f}$-простая, $|\Gamma'(x, \beta)| < 3$. Значит, возможно только H_3, H_4. С другой стороны, $\hat{\alpha} < 2\frac{2}{3}$, $\rho(2) = 1\frac{1}{3}$, значит, H_3, H_4 (и $I_2(p)$) удовлетворяют условиям предложения.

***Замечание* 5.** Как известно, список III характеризует конечные группы, порожденные отражениями.

Пусть G — группа, порожденная образующими $a_1, \ldots, a_t$ и соотношениями $a_i^2 = 1$, $(a_i a_j)^{n_{ij}} = 1$. Пара a_i, a_j — *особая*, если $n_{ij} > 3$. Через $g(a_i)$ обозначим число a_j, не коммутирующих с a_i. Подмножество $H \subset A = \{a_1, \ldots$ $\ldots, a_t\}$ — *компонента*, если H нельзя представить в виде $H_1 \cup H_2$ так, чтобы $a_i a_j = a_j a_i$ при $a_i \in H_1$, $a_j \in H_2$. Любое $X \subset A$ однозначно представляется в виде объединения непересекающихся компонент $X_1, \ldots, X_{c(X)}$ так, что если $a_i \in X_k, a_j \in X_l$ и $k \neq l$, то $a_i a_j = a_j a_i$. Будем считать, что $c(A) = 1$ (это соответствует связности графа Кокстера). Из списка III непосредственно следует, что группа G конечна, если и только если выполняется одно из следующих условий:

A) A не содержит особых пар, содержит a_r такой, что $g(a_r) = 1$, и содержит не более одного образующего a_i, для которого $g(a_i) > 2$. При этом если $g(a_i) > 2$, то $g(a_i) = c(X)$, где $X = A \setminus a_i$ и $\rho\left(|X_1|, \ldots, \left|X_{g(a_i)}\right|\right) < 4$;

B) A содержит в точности одну особую пару (a_i, a_j), $g(a_s) \leq 2$ при $i = \overline{1,t}$ и существует a_r, для которого $g(a_r) = 1$. Кроме того,

1) если $n_{ij} \geq 6$, то $t = 2$;

2) если $n_{ij} = 5$, то $t \leq 4$ и $\min\left\{g(a_i), g(a_j)\right\} = 1$;

3) если $n_{ij} = 4$, то либо $t \leq 4$, либо $\min\left\{g(a_i), g(a_j)\right\} = 1$.

5. Маркированные колчаны. Начиная с п. 5, главным объектом изучения становятся матричные задачи [11]. С наивной точки зрения — это задачи об эквивалентности матриц или наборов матриц относительно различных допустимых преобразований. Например, представления чум S — это матрицы, разделенные на n $(= |S|)$ вертикальных полос, заиндексированных элементами S, и разрешено столбцы из полосы s_i прибавлять к столбцам из s_j, если и только если $i \leq j$, а со строками (и столбцами из одной полосы) допустимы любые элементарные преобразования.

С другой стороны, такие задачи естественно формулируются в категорных терминах.

В этом пункте мы напомним некоторые известные факты и введем категорную терминологию, которой будем пользоваться в дальнейшем.

Отметим сразу два момента, в которых эта терминология отличается от общепринятой.

Во-первых, мы используем правую запись: если $\gamma: X \to Y$, $\delta: Y \to Z$, то произведение γ и δ мы обозначаем $\gamma\delta$ (а не $\delta\gamma$).

Во-вторых, мы будем рассматривать модули (см. [16]) и бимодули над категориями (обобщая их даже на не полуаддитивные категории), хотя, разумеется, вместо них всегда можно рассматривать функторы и бифункторы. Однако и в классической теории представлений (например, конечномерных алгебр) тоже можно было бы рассматривать вместо модулей сами представления, т. е. гомоморфизмы в алгебры матриц, но рассмотрение модулей предпочтительнее.

Категорией морфизмов K^Δ произвольной категории K называется [17] категория, в которой $\mathrm{Ob}\, K^\Delta = \mathrm{Mor}\, K$, и если $\varphi, \varphi' \in \mathrm{Mor}\, K$, $\varphi: A \to B$, $\varphi': A' \to B'$ $(A, B, A', B' \in \mathrm{Ob}\, K)$, то $K^\Delta(\varphi, \varphi') = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in K(A, A'),\ \beta \in K(B, B') / \varphi\beta = \alpha\varphi'\}$, т. е. коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \alpha\big\downarrow & & \big\downarrow\beta \\ A' & \xrightarrow{\varphi'} & B' \end{array} \qquad (*)$$

Естественным обобщением этого понятия есть *представления колчанов* [10].

Пусть Q — (конечный) *колчан* (т. е. ориентированный граф), Q_v — множество его вершин, а Q_a — стрелок. Через t_α обозначается начало, а через h_α — конец стрелки α.

Представление T колчана Q в категории K сопоставляет каждой $x \in Q_v$ объект $T(x) \in \mathrm{Ob}\, K$, а каждой $\alpha \in Q_a$ морфизм $T(\alpha): T(t_\alpha) \to T(h_\alpha)$.

Морфизм из представления T в представление T' в *категории* K^Q*-представлений колчана* Q есть набор морфизмов $\alpha_x: T(x) \to T'(x)$ по одному для каждой $x \in Q_v$ такой, что для любой $\alpha \in Q_a$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T(x) & \xrightarrow{T(\alpha)} & T(y) \\ {\scriptstyle \alpha_x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_y} \\ T'(x) & \xrightarrow{T'(\alpha)} & T'(y) \end{array} . \qquad (**)$$

Произведение морфизмов как в категории морфизмов, так и в категории представлений колчана определяется естественным образом. Таким образом, категорию морфизмов K^Δ можно рассматривать как категорию представлений колчана $\Delta: a \xrightarrow{\alpha} b$ $(T_v = \{a, b\},\ T_a = \{\alpha\},\ h_\alpha = b,\ t_\alpha = a)$.

Замечание 6. Обычно представления колчанов рассматриваются в категориях $\mathrm{mod}\, k$, где k — поле или коммутативное кольцо. Мы не требовали здесь аддитивности и даже полуаддитивности категории K. Приведем пример не аддитивной категории, в которой представления колчанов, по-видимому, представляют содержательный интерес. Пусть H — *категория гильбертовых пространств*, в которой $H(A, B) = \{\varphi \in \mathrm{Hom}_c(A, B) \mid \varphi\varphi^* = 1_A\}$. Представления колчанов и колчанов с соотношениями в H фактически рассматриваются в [18], причем на этот случай распространяются конструкции функторов Кокстера [19], что приводит к прогрессу в некоторых задачах функционального анализа.

Каждому колчану Q естественно сопоставляется (неориентированный) граф $\Gamma(Q)$. Критерий конечной представимости колчана получен в [10] (см. также [19]), критерий ручности (независимо) — в [20, 21] (см. также [16]). Связный колчан Q конечнопредставим (соответственно ручной), если и только если $\Gamma(Q)$ есть схема (соответственно расширенная схема) Дынкина без кратных связей, т. е. A_e, D_e, E_6, E_7, E_8 (соответственно $\tilde{A}_e$, $\tilde{D}_e$, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$).

Другим естественным обобщением категории морфизмов является замена категории K на бимодуль (над двумя категориями).

Будем говорить, что задан (правый) модулоид M_K над (необязательно полуаддитивной) категорией K, если любому $A \in \mathrm{Ob}\, K$ сопоставлено множество $M(A)$ и любому $\varphi \in K(A, B)$ — отображение из $M(A)$ в $M(B)$, т. е. для $a \in M(A)$ и $\varphi \in M(A, B)$ определено произведение $a\varphi \in M(B)$, причем:

1) $a 1_A = a$ $(a \in A,\ A \in \mathrm{Ob}\, K)$;

2) $a(\varphi\psi) = (a\varphi)\psi$, $(\varphi \in K(A, B),\ \psi \in K(B, C))$.

Если K — k-категория (k — поле или коммутативное кольцо) [16], то M_k — *k-линейный модуль* над K, если каждое $M(A)$ есть конечнопорожденный модуль над k, и кроме условий 1, 2 выполняется

3) $(\lambda a + \mu b)(\alpha\varphi + \beta\psi) = (\lambda\alpha)a\varphi + (\lambda\beta)a\psi + (\mu\alpha)b\varphi + (\mu\beta)b\psi$,

где $\lambda, \mu, \alpha, \beta \in k$; $a, b \in M(A)$; $\psi, \varphi \in K(A, B)$; $A, B \in \mathrm{Ob}\, K$.

Аналогичным образом определяется левый модулоид и левый k-линейный модуль ${}_K M$, а также бимодулоид и k-линейный бимодуль ${}_K M_L$ над двумя, вообще говоря, различными категориями K и L (в двух последних случаях задаются множества и конечнопорожденные k-модули $M(A, B)$, где $A \in \operatorname{Ob} K$, $B \in \operatorname{Ob} L$).

Элементы множеств $M(A)$ $(A \in \operatorname{Ob} K)$ (для левых и правых модулоидов и k-линейных модулей) и множеств $M(A, B)$ (для бимодулоидов и k-линейных бимодулей) будем называть *представителями* соответственно модулоида, k-линейного модуля, бимодулоида и k-линейного бимодуля.

Модулоид *точен*, если из $\{\varphi, \psi\} \subset K(A, B)$ следует $M(A) \ni a$, $a\varphi \neq a\psi$.

Категорией представителей M^{Δ} бимодулоида $M = {}_K M_L$ называется категория, объектами которой являются представители M, и если $\varphi \in M(A, B)$, $\varphi' \in M(A', B')$, то $M^{\Delta}(\varphi, \varphi') = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in K(A, A'),\ \beta \in L(B, B'),\ \varphi\beta = \alpha\varphi'\}$, т. е. диаграмма (*) коммутативна. Таким образом, определение дословно повторяет определение категории морфизмов.

Если K' — подкатегория произвольной категории K, то определен бимодулоид ${}_K M(K')_{K'}$ (над K и K'), где $M(K')(A, B) = \operatorname{Hom}_K(A, B)$ $(A \in \operatorname{Ob} K$, $B \in \operatorname{Ob} K')$.

Если K', K'' — две подкатегории категории K, то аналогично определяется бимодулоид ${}_{K'} M(K', K'')_{K''}$, где $M(A, B) = \operatorname{Hom}_K(A, B)$ $(A \in \operatorname{Ob} K'$, $B \in \operatorname{Ob} K'')$.

В дальнейшем будем считать, что $K = \operatorname{mod} k$, k — алгебраически замкнутое поле, K' — подагрегат K (т. е. аддитивная k-подкатегория, в которой идемпотенты расщепляемы [16]). В этих предположениях обозначим $M(K')^{\Delta}$ через $\operatorname{Rep} K'$. Произвольный точный k-линейный модуль над k-агрегатом можно идентифицировать с подагрегатом K. Под „агрегатом" далее будем подразумевать подагрегат в K.

Категория $\operatorname{Rep} K'$ введена в [22] и рассматривалась в [16, 23]. Эта категория играет важную роль в теории представлений. В частности, в [15] показано, что к ней может быть „сведена" категория представлений произвольной конечномерной алгебры.

Объединяя два приведенных обобщения категории морфизмов, приходим к понятию представлений маркированного колчана.

Будем говорить, что колчан Q *маркирован*, если каждой $a \in Q_v$ сопоставлена категория $K(a)$, а каждой $\alpha \in Q_a$ — бимодулоид ${}_{K(a)}M^{\alpha}{}_{K(b)}$, где $t_\alpha = a$, $h_\alpha = b$ (не исключено $a = b$).

Представление T маркированного колчана $\overline{Q}$ сопоставляет каждой $a \in Q_v$ объект $T(a) \in K(a)$ и каждой $\alpha \in Q_a$ — представителя $T(\alpha) \in M^{\alpha}(T(x), T(y))$, где $x = t_\alpha$, $y = h_\alpha$.

Морфизм из представления T в представление T' в *категории* $\operatorname{Rep}(\overline{Q})$ *представлений маркированного колчана* $\overline{Q}$ есть набор морфизмов $\alpha_x \in K(x)(T(x), T'(x))$, по одному для каждой $x \in Q_v$ такой, что для любой $\alpha \in Q_a$ диаграмма (**) (в бимодулоиде ${}_{K(x)}(M^{\alpha})_{K(y)}$!) коммутативна $(x = t_\alpha$, $y = h_\alpha)$.

Маркированный колчан $\overline{Q}$ (соответственно бимодуль M) *конечнопредставим*, если категория $\operatorname{Rep}\overline{Q}$ (соответственно M^{Δ}, которую можно рассматривать как частный случай $\operatorname{Rep}\overline{Q}$, считая $Q = \Delta$) имеет конечное число неразложимых изоклассов.

Будем считать, что колчан Q связен и $Q_a \neq \varnothing$. Будем считать также, что маркированный колчан $\overline{Q}$ *k-маркирован*, т. е. все $K(a)$ $(a \in Q_v)$ есть подагрегаты K, и каждый ${}_{K(x)}M^{\alpha}_{K(y)}$ $(\alpha \in Q_{\alpha},\ t_{\alpha} = x,\ h_{\alpha} = y)$ есть $M(K(x), K(y))$.

Большинство матричных задач может быть рассмотрено как представления k-маркированных колчанов. Однако для того чтобы фактически представить себе категории $\operatorname{Rep}\overline{Q}$, нам нужно выбрать удобный язык для рассмотрения подагрегатов категории $K = \operatorname{mod} k$. Важную роль среди них играют агрегаты, которые порождаются частично упорядоченными множествами, а также чум с отношением эквивалентности и „биэквивалентности".

Чум с эквивалентностью $\tilde{S}$ — это (конечное) множество S, на котором определено два (никак не связанных между собой) отношения: частичного порядка $\leq$ и эквивалентности $\sim$.

Биэквивалентностью на (конечном) чум S назовем отношение $\approx$ эквивалентности на $\{(s,t) |\ s,t \in S,\ s \leq t\}$ такое, что:

i) если $(s_1, t_1) \approx (s_2, t_2)$ и $(s_1, t_1) \neq (s_2, t_2)$, то $s_1 \neq s_2$, $t_1 \neq t_2$;

ii) если $(s_1, t_1) \approx (s_2, t_2)$ и $s_1 \leq x_1 \leq t_1$, то существует x_2 такое, что $s_2 \leq \leq x_2 \leq t_2$, $(s_1, x_1) \approx (s_2, x_2)$, $(x_1, t_1) \approx (x_2, t_2)$.

Из этих условий следует, что x_2 определяется однозначно, а также условия:

iii) если $(a, a) \approx (c, d)$, то $c = d$ (положив $a = x_1$, получаем из ii) $(a, a) \approx \approx (c, x_2) \approx (c, d)$, а из i) — $c = d$);

iv) если $(s_1, t_1) \approx (s_2, t_2)$, то $(s_1, s_1) \approx (s_2, s_2)$, $(t_1, t_1) \approx (t_2, t_2)$ (положив $x_1 = s_1$, имеем $(s_1, s_1) \approx (s_2, x_2)$, а из iii) — $x_2 = s_2$).

Чум S с биэквивалентностью будем обозначать через $\tilde{\tilde{S}}$. Отношение $\approx$ индуцирует отношение эквивалентности $\sim$ на самом S $(s \sim t$, если $(s, s) \approx (t, t))$. С другой стороны, $\tilde{S}$ можно считать частным случаем $\tilde{\tilde{S}}$, полагая при $a, b, c, d \in S$ $(a, b) \approx (c, d)$, если (и только если) $a = b$, $c = d$ и $a \sim c$.

Биэквивалентность *транзитна*, если из $(s_1, t_1) \approx (s_2, t_2)$ и $(t_1, u_1) \approx (t_2, u_2)$ следует $(s_1, u_1) \approx (s_2, u_2)$. Будем писать $s \not\lessgtr t$, если s и t $(\in (S, \leq))$ несравнимы.

Сопоставим $\tilde{\tilde{S}}$ подагрегат $K\left(\tilde{\tilde{S}}\right)$ в K.

Сначала построим для произвольного конечного множества X полную подкатегорию L_X *X-градуированных* пространств в K.

Объект $V \in L_X$ есть $\oplus_{x \in X} V_x$, где $V_x \in K$. Тогда если $\psi \in L_X(V, W)$, то $\psi = \sum_{x,y \in X} \psi_{x,y}$, где $\psi_{x,y} \in K(V_x, W_y)$.

Агрегат $K\left(\tilde{\tilde{S}}\right)$ есть подкатегория в L_S, задаваемая следующими условиями:

1) $V \in \operatorname{Ob} K\left(\tilde{\tilde{S}}\right)$, если из $x \sim y$ следует $V_x = V_y$ $(x, y \in S)$;

2) $\psi \in K\left(\tilde{\tilde{S}}\right)(V, W)$, если из $x \not\lessgtr y$ или $x > y$ следует $\psi_{x,y} = 0$, а из $(x, y) \approx \approx (u, v)$ — $\psi_{x,y} = \psi_{u,v}$ $(x, y, u, v \in S)$.

В частности, если $\approx$ тривиальна или нетривиальна только на парах (s, s) (т. е. фактически имеется эквивалентность $\sim$ на чум S), получаем агрегаты $K(S, \leq)$ и $K\left(\tilde{S}\right)$. Категория $K(S, \leq)^{\Delta}$ совпадает с $\operatorname{Rep}(S, \leq)$, введенной в [5],

$K(\tilde{S})$ — с категорией представлений чум с отношением эквивалентности [24]. Категории $K(\tilde{\tilde{S}})^{\Delta}$ и $K(\tilde{S})^{\Delta}$ будем обозначать также через $\operatorname{Rep}\tilde{\tilde{S}}$ и $\operatorname{Rep}\tilde{S}$, а множества неразложимых изоклассов этих категорий — соответственно через $\operatorname{ind}\tilde{\tilde{S}}$ и $\operatorname{ind}\tilde{S}$. Агрегат $K(\tilde{\tilde{S}})$ *транзитивен*, если транзитна биэквивалентность $\approx$.

С матричной точки зрения категория $\operatorname{Rep}\tilde{\tilde{S}}$ может быть (строго говоря, с точностью до эквивалентности) задана так. Каждый ее объект — это матрица T, разделенная на n $(=|S|)$ вертикальных полос T_s, $s \in S$. $\operatorname{Hom}(X, Y)$ состоит из пар матриц (A, B) таких, что $AX = YB$, и B разбита на блоки B_{st}, s $t \in S$, в соответствии с делениями матриц X и Y, причем $B_{st} \neq 0$, только если $s \leq t$ и $B_{st} = B_{uv}$ при $(s, t) \approx (u, v)$.

Заметим, что в одних случаях предпочтительнее категорный, а в других — матричный язык. Например, на матричном языке очевидно следующее утверждение.

Лемма 7. *Пусть* $S = U \bigcup V$, $U \bigcap V = \varnothing$ *и из* $(ab) \approx (cd)$ *следует, что либо* $a, b, c, d \in U$, *либо* $a, b, c, d \in V$, *а из* $x \not\approx y$ *следует, что либо* $x, y \in U$, *либо* $x, y \in V$. *Тогда* $\operatorname{ind}\tilde{\tilde{S}} = \operatorname{ind}\tilde{\tilde{U}} \sqcup \operatorname{ind}\tilde{\tilde{V}}$.

Чум с эквивалентностью (или биэквивалентностью) *цепное* (соответственно *антицепное*), если из $s \sim t$ следует, что s и t сравнимы (соответственно несравнимы).

Через $\dim s, s \in S$, обозначим порядок класса эквивалентности $\sim$, содержащего s. Размерность $\tilde{\tilde{S}}$ есть $\max \dim s$, $s \in S$. Размерностью $\dim K'$ подагрегата $K' \subset K$ назовем $\max \dim A$, где A — неразложимый объект K'. Если $K' = K(\tilde{\tilde{S}})$, то ясно, что $\dim K' = \dim \tilde{\tilde{S}}$. Естественным образом определяются конечная представимость и ручность для агрегатов, чум с отношениями эквивалентности и биэквивалентности и k-маркированных колчанов.

Представления k-маркированных колчанов содержат в себе представления чум и представления агрегатов $(\operatorname{Rep} K')$, а также, разумеется, представления (немаркированных) колчанов. Для представлений чум и колчанов известны критерии конечной представимости и ручности (см. пп. 2, 5). Получение аналогичных критериев для k-маркированных колчанов является, по-видимому, одной из главных проблем теории матричных задач. При этом основные трудности свойственны частному случаю представлений агрегатов.

Вопросу их конечностей представимости посвящены работы [1, 2, 25] (см. также [16, 26, 27]). Известно, что если агрегат $\mathcal{A}$ конечнопредставим, то $\dim \mathcal{A} \leq 3$, и если $\mathcal{A} = K(\tilde{\tilde{S}})$, то $\tilde{\tilde{S}}$ цепное, а если $\mathcal{A}$ ручной, то $\dim \mathcal{A} \leq 4$. Для размерности 2 критерий конечной представимости дан в [1], а для размерности 3 такой критерий сформулирован в [2], где доказана, однако, только необходимость приведенных условий.

Представление агрегата размерности 1 есть представление чум. Представления $K(\tilde{\tilde{S}})$ размерности 2 будут рассмотрены в п. 7, представления $K(\tilde{S})$ — в п. 6.

Для $\tilde{\tilde{S}}$ положим $S^2 = \{(x, y) \mid x, y \in S,\ x < y\}$. Из условия iii) следует, что отношение $\approx$ „распадается" на отношение $\sim$ на S и отношение эквивалентности на S^2. Если $x, y \in S^2$, то назовем *рангом* $\operatorname{rank}(x, y)$ пары (x, y) порядок класса эквивалентности $\approx$ в S^2, содержащего (x, y) и $\operatorname{rank}\tilde{\tilde{S}} =$

$= \max \operatorname{rank}(x, y)$. Если (и только если) $\operatorname{rank} \tilde{\tilde{S}} = 1$, то $\operatorname{Rep} \tilde{\tilde{S}} \simeq \operatorname{Rep} \tilde{S}$. Ясно, что $\operatorname{rank} \tilde{\tilde{S}} \le \dim \tilde{\tilde{S}}$.

Будем писать $x \lhd x$, если $\dim x = 1$, $x \lhd y$, если $\operatorname{rank}(x, y) = 1$, и $x \Rightarrow y$, если $\operatorname{rank}(x, y) > 1$. Из условий i), ii) следует, что если $a \le b \lhd c$ или $a \lhd b \le c$, то $a \lhd c$.

Биупорядоченным множеством (бум) $S^{\lhd}$ называется чум S с дополнительным отношением $\lhd$ таким, что:

1) из $a \lhd b$ следует $a \le b$;

2) из $a \lhd b \le c$ или $a \le b \lhd c$ следует $a \lhd c$.

Если $\dim \tilde{\tilde{S}} = 2$, то отношение $\simeq$ однозначно определяется отношениями $\lhd$ и $\sim$. Элементы S будем называть *точками*. Точка s *малая*, если $\dim s = 1$, и *большая*, если $\dim s > 1$. Малые точки будем обозначать $\circ$, а большие — $\bullet$; $\overset{\circ}{S}$ (соответственно $\overset{\bullet}{S}$) — множество малых (соответственно больших) точек S. Если $\dim s = 2$, то через s^* будем обозначать такую (однозначно определенную) точку, что $s^* \sim s$ и $s^* \ne s$. Если $U, V \subset S$, то $U \not\asymp V$ означает, что $u \not\asymp v$ для любых $u \in U$, $v \in V$. Если $X, Y \subset S$, то $X^{\not\asymp}(Y) = \{x \in X \mid \{x\} \not\asymp Y\}$ (если $y \in S$, то $X^{\not\asymp}(y) = X(\{y\})$).

1-*Цепью* в чум с отношением биэквивалентности $\tilde{\tilde{S}}$ (или бум $S^{\lhd}$) назовем $Z = \{s_1, \ldots, s_t\} \subset S$ $(t \ge 0)$, если $s_i \lhd s_j$ при $1 \le i < j \le t$. (Для $\tilde{S}$ любая цепь — 1-цепь.)

Введем понятие *нормальности* для больших точек. Точка t — 1-*нормальна*, если $S^{\not\asymp}(t)$ — цепь в $\overset{\circ}{S}$.

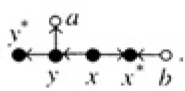
Далее, если уже определена j-нормальность для $j < i$, то точка t i-*нормальна*, если:

1) $S^{\not\asymp}(t)$ — 1-цепь;

2) если $x \in S^{\not\asymp}(t)$, то $\dim x \le 2$, и если $\dim x \ne 1$, то x^* j-нормальна для некоторого $j < t$.

Точка *нормальна*, если она i-нормальна для некоторого i. Точка y *конормальна*, если $\dim y = 2$ и y^* нормальна; при этом если y^* i-нормальна, то y i-*конормальна*. Заметим, что некоторые большие точки могут быть и нормальными, и конормальными, а другие — ни теми, ни другими. Точки размерности, большей 2, могут быть нормальными, но не могут быть конормальными.

Пример 3.

$\tilde{\tilde{S}} = \tilde{S} =$ 

Здесь x — 1-нормальная точка $\left(S^{\circledast}(x) = \{b\}\right)$, y — 2-нормальная точка $\left(S^{\circledast}(y) = \{b, x^*\}\right)$, x^*, y^* конормальны, но не нормальны $\left(S^{\circledast}(x^*) = \{y, y^*, a\},\ S^{\circledast}(y^*) = \{a, x^*, b\}\right)$.

Чум S назовем p-чумом (S, p), если задана функция p на S со значениями в $\mathbb{N}^{\infty}$. $\left(\tilde{\tilde{S}}, p\right)$ будет обозначать p-чум с отношением биэквивалентности. В этом случае для $Z \subset S$ положим $p(Z) = \sum_{z \in Z} p(Z)$, если Z — 1-цепь, и $p(Z) = \infty$, если Z — не 1-цепь.

Построим на $\tilde{\tilde{S}}$ функцию $\tilde{\tilde{p}}$, однозначно определяемую отношением $\approx$.

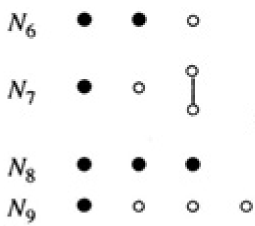
Заметим сначала, что если $x \in \tilde{\tilde{S}}$ — i-конормальная точка и $S^{\not\lessgtr}(x^*) = Y$, то Y — 1-цепь, и если $y \in Y$, то y — малая или j-конормальная точка, где $j < i$. Если $\dim s = 1$, то положим $\tilde{\tilde{p}}(s) = 1$. Если $\dim s > 1$ и s не конормальна, то положим $\tilde{\tilde{p}}(s) = \infty$. Далее будем определять $\tilde{\tilde{p}}$ для конормальных точек последовательно по степени их конормальности. Если функция $\tilde{\tilde{p}}$ уже определена для всех j-конормальных точек при $j < i$ и x i-конормальна, то положим $\tilde{\tilde{p}}(s) = 2 + \sum_{y \in Y} \tilde{\tilde{p}}(y)$ $\left(Y = S^{\not\lessgtr}(x^*)\right)$.

Для $\tilde{S}$ строится функция $\tilde{p}$, в определении которой 1-цепи есть обычные цепи.

В примере 3 $\tilde{p}(x^*) = 3$, $\tilde{p}(y^*) = 6$, $\tilde{p}(x) = \tilde{p}(y) = \infty$.

6. Представления чум с эквивалентностью. Представления чум с эквивалентностью $\tilde{S}$ рассматривались в [3, 24, 28] (в [3] под названием „представления слабо пополненных чум"). В [3] вопрос о конечной представимости $\tilde{S}$ и описание в этом случае их представлений был решен сведением к представлениям чум.

В [28] критерий ручности дан для антицепных (если $x \sim y$, то $x \not\lessgtr y$) чум с эквивалентностью. Именно, доказано: бесконечнопредставимое антицепное чум S ручное тогда и только тогда, когда оно не содержит следующих критических подмножеств: $N_0 - N_5$ (см. п. 2) в $\overset{*}{S}$ и



В [24] доказано, что $N_0 - N_9$[3] являются критическими для более широкого класса „квазиантицепных" чум с эквивалентностью (см. ниже). Что касается общего случая $\tilde{S}$, то в [24] не дан явный критерий их ручности, но показано, как этот вопрос сводится к указанному частному случаю.

В этом пункте мы дадим (в терминах ρ) явные критерии ручности и конечной представимости для произвольных $\tilde{S}$, а в п. 8 — для колчанов, k-маркированных подагрегатами вида $K(\tilde{S})$.

Отметим, что множествам $N_0 - N_5$ будет соответствовать функция ρ, определенная на $\mathbb{N}$, а множествам $N_6 - N_9$ — на $\mathbb{N}^{\infty}$.

Множество $\tilde{S}$ — *квазиантицепное*, если $\dim \tilde{S} = 2$ и $\tilde{S}$ не содержит нормальных точек (это равносильно тому, что оно не содержит 1-нормальных точек, т. е. каждая большая точка входит в $\bullet\ \bullet$ или $\bullet\ \circ\ \circ$). Из [3] следует, что квазиантицепное множество не может быть конечнопредставимым.

[3] Список $N_0 - N_9$ анонсирован Л. А. Назаровой как критерий ручности также для антицепных чум с отношением биэквивалентности и произвольных антицепных агрегатов (где в последнем случае точно формулируется, что значит „вхождение" N_i в агрегат) (см. [29]).

Прежде чем формулировать критерии конечности и ручности для $\tilde{S}$, вернемся к аналогичным вопросам для $(S, \leq)$, рассмотренным в п. 2, и переформулируем приведенные там критерии в форме, удобной для обобщения.

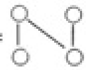
Соответствующие критерии формулировались в п. 2 в двух видах:

1. В форме отсутствия критических подмножеств K_i, N_i.

2. В виде $P(S) < 4$, $P(S) = 4$, где P — функция, определенная на чум, на базе которой и появилась числовая функция ρ.

Если S — примитивное чум $\bigsqcup_{i=1}^{t} L^i\big(w(L^i) = 1\big)$, то $P(S) = \rho\big(|L^1|\ldots|L^t|\big)$. Положим $\rho_1(S) = \max_{S' \subseteq S} P(S')$, где S' — примитивное чум.

Ясно, что $\rho_1(S) \leq P(S)$, но, например, для

$$S = \hat{N} = \langle 2, 2 \rangle =$$ 

$\rho_1(S) = 2\frac{1}{3} < P(S) = 2,4$. Чум S назовем *квазипримитивным*, если $S = \hat{N} \sqcup Z$, $w(Z) \leq 1$. $P(\hat{N} \sqcup Z) = 2,\ 4 + \rho(|Z|)$.

$P(\hat{N} \sqcup Z) < 4$ (соответственно $= 4$), если и только если $|Z| < 4$ (соответственно $= 4$), так как $\rho(4) = 1,6$.

Для квазипримитивного $S = \hat{N} \sqcup Z$ положим $\rho_2(S) = \max|Z|$. Для произвольного S положим $\rho_2(S) = \max_{S'' \subset S} \rho_2(S'')$, где S'' квазипримитивно. Положим, наконец, $\rho(S) = \max\{\rho_1(S), \rho_2(S)\}$.

Из критериев п. 2 и предложения 1 следует, что S конечнопредставимо (соответственно имеет ручной тип), если и только если $\rho(S) < 4$ (соответственно $\rho(S) = 4$).

Заметим, что $\rho(S) \leq P(S)$; строгое неравенство имеет место, в частности, если S — равномерный забор (п. 2), отличный от $\hat{N}$ (например, $\langle 3, 3 \rangle$).

Критерии в терминах P естественнее, но в терминах ρ (фактически эквивалентные отсутствию K_i, N_i) более удобны для применения.

Пусть (S, p) — p-чум. Для примитивного $S = \bigsqcup_{i=1}^{t} L^i$ положим $\rho'(S, p) = \sum_{i=1}^{t} \rho\big(p(L^i)\big)$; для квазипримитивного $S = \hat{N} \sqcup Z$ — $\rho'(S, p) = \sum_{z_i \in Z} p(z_i)$. Для произвольного S положим $\rho(S, p) = \max_{S' \subseteq S} \rho'(S', p)$, где максимум берется по всем примитивным и квазипримитивным подмножествам S' (не исключая $S' = S$).

Если $X \subset S$, то, разумеется, определено и $\rho(X, p)$. Положим $S_p = \{s \in S \mid p(s) < \infty\}$.

***Замечание* 7.** Если $\rho(S, p) < 4$ и A — антицепь в S, то $|A| + |A^{\infty}| < 4$, где $A^{\infty} = \{a \in A \mid a \notin S_p\}$. Если для любой антицепи $A \subset S$, $|A| + |A^{\infty}| < 4$ и $\rho(S_p, p) < 4$, то $\rho(S, p) < 4$.

Первое утверждение непосредственно следует из введенных нами определений, второе — из того, что если S' — примитивное или квазипримитивное подмножество S, $\rho'(S', p) \geq 4$ и $S' \ni a \notin S_p$, то для некоторой антицепи A $a \in A^{\infty}$ и $|A| + |A^{\infty}| \geq 4$.

Положим $\rho(\tilde{S}) = \rho(S, \tilde{p})$.

Пусть $W = \{d_1, \ldots, d_t\}$ — класс эквивалентности на S, $t > 2$. Положим $\mu(W) = \sum_{i=1}^{t} \rho\left(\tilde{p}\left(S^{\varkappa}(d_i)\right)+1\right)$ и $\mu(\tilde{S}) = \max_{W \subset S} \mu(W)$.

Предложение 5. $\tilde{S}$ *конечнопредставимо, если и только если:*

1) $\rho(\tilde{S}) < 4$;

2) $\mu(\tilde{S}) < 4$.

$\tilde{S}$ *имеет ручной тип, если и только если* $\max\left\{\rho(\tilde{S}), \mu(\tilde{S})\right\} = 4$.

Приведем схему доказательства того, как предложение следует из результатов [3, 24].

Отметим прежде всего, что для квазиантицепных множеств критерий ручности из предложения 5 совпадает с критерием в виде отсутствия $N_0 - N_9$, доказанным в [24].

В случае, когда $\tilde{S}$ квазиантицепное, $\tilde{p}(x) = 1$, если x — малая, и $\tilde{p}(y) = \infty$, если y — большая точка. Легко видеть, что $\rho(\tilde{S}) > 4$, если $S \supset N_i$, $0 \leq i \leq 9$. С другой стороны, легко видеть, что если S' — минимальное (примитивное или квазипримитивное) подмножество S, для которого $\rho'(S', \tilde{p}) > 4$, то S' имеет вид N_i, $0 \leq i \leq 9$.

Если множество не квазиантицепное, то суть проведенных построений в том, что если $\tilde{p}(x) = t < \infty$, то можно в некотором смысле заменить x на цепь из t малых точек (удалив при этом некоторые „несущественные" точки).

Если x — 1-нормальная точка, то построим $\tilde{S}'_x$ следующим образом: точка x исключается из S, а точка x^* заменяется на $t = \tilde{p}(x^*) = 2 + \tilde{p}\left(S^{\varkappa}(x)\right)$ малых точек: $x_1^* <' x_2^* <' \ldots <' x_t^*$. На „старых" точках отношения $\leq$ и $\sim$ сохраняются, $x_i^* <'$ (соответственно $>'$) $y \in S$, если $x^* <$ (соответственно $>$) y.

В примере 3

$\tilde{S}'_x =$ 

.

Точка y стала 1-нормальной.

Решающую роль в [3] и важную роль в [24] играет (легко доказывается на матричном языке) лемма [3].

Лемма. *Имеется естественное взаимно однозначное соответствие между* $\operatorname{ind} \tilde{S}$ *и* $\operatorname{ind} \tilde{S}'_x$.

Через $\tilde{p}'$ обозначим функцию, построенную на $\tilde{S}'_x$ аналогично $\tilde{p}$ для $\tilde{S}$.

Лемма 8. *Если* $\max\{\rho(S, \tilde{p}), \rho(S'_x, \tilde{p}')\} \geq 4$, *то* $\rho(S, \tilde{p}) = \rho\left(S'_x, \tilde{p}'\right)$.

$\tilde{p}(s) = \tilde{p}'(s)$ для любой точки $s \subset S \bigcap S'_x$. Точка x (1-нормальная) не входит в квазипримитивные подмножества и в примитивные $S' \subset S$ такие, что $\tilde{p}(S') \geq 4$; $\tilde{p}(x^*) = \tilde{p}'\left\{x_1^*, \ldots, x_t^*\right\} = t$.

Чум с эквивалентностью назовем *вполне цепным*, если:

1) из $\dim x = 2$ следует, что по крайней мере одна из точек $\left\{x, x^*\right\}$ нормальна;

2) если $\dim y = 3$, то по крайней мере две точки из класса эквивалентности $\left\{y, y', y''\right\}$ 1-нормальны.

В [3] доказано, что конечнопредставимое $\tilde{S}$ вполне цепное, и это же следует из условий 1, 2 предложения 5. Поэтому при $\dim S = 2$, последовательно применяя лемму [3], можно свести конечнопредставимое $\tilde{S}$ к некоторому чум, и утверждение о конечной представимости $\tilde{S}$ следует из лемм [3], 8 и переформулированного выше критерия конечной представимости для чум.

Как мы уже отмечали, критерий ручности для квазиантицепных чум с отношением эквивалентности совпадает с условием $\rho(\tilde{S}) = 4$. Поэтому наше условие ручности при $\dim S = 2$ следует из результата [24] и лемм [3] и 8, так как, применяя эти леммы несколько раз, произвольное $\tilde{S}$ можно свести к квазиантицепному.

Если $\dim y = 3$, $y \simeq u \simeq v$ и точки u, v 1-нормальны, то построим $(S_y'',$ $\leq'', -'')$, исключив из S точки u и v и заменив y на чум Y, состоящее из малых точек $Y = U \times V$ (декартово или *кардинальное* [12] произведение), $w(U) = w(V) = 1$, $|U| = 2 + \left|S^{\varkappa}(u)\right|$, $|V| = 2 + \left|S^{\varkappa}(v)\right|$. Если $\bar{y} \in Y$, а $z \in S_y'' \cap S$, то $\bar{y} \leq'' z$ (соответственно $\bar{y}\, '' > z$), если $y < z$ (соответственно $y > z$).

В этой ситуации в [3] доказываются утверждения, аналогичные леммам [3] и 8.

С их использованием произвольное конечнопредставимое $\tilde{S}$ (с учетом того, что $\dim S \leq 3$ и S вполне цепное) сводится к чум.

Аналогично доказывается при $\dim \tilde{S} = 3$ и критерий ручности. Заметим только, что условие 2 из определения вполне цепного чум с отношением эквивалентности в ручном случае, вообще говоря, не имеет места, как это утверждается в [24]. Однако это условие справедливо, если в $\tilde{S}$ нет нормальных точек размерности 2. Поэтому при $\dim \tilde{S} = 3$ нужно сначала „привести" все нормальные точки размерности 2 („сводя" $\tilde{S}$ к $\tilde{S}_x'$), а затем приводить точки размерности 3 (сводя $\tilde{S}$ к $\tilde{S}_y''$), в результате чего получается квазиантицепное множество.

Аналогично лемме 8 доказывается, что при „приведении" точки x размерности 2 или точки y размерности 3 множество $(S_x', \leq', -')$ или $(S_y'' \leq'', -'')$ удовлетворяет условию $\mu(\tilde{S}_x') < 4$ или $\mu(\tilde{S}_y'') < 4$ (соответственно $\mu(\tilde{S}_x') = 4$ или $\mu(\tilde{S}_y'') = 4$), если и только если $\mu(\tilde{S}_x) < 4$ (соответственно $\mu(\tilde{S}_y) = 4$). Для доказательства того, что $\rho(\tilde{S}_y'') < 4$ (соответственно $\rho(\tilde{S}_y'') = 4$), если и только если $\rho(\tilde{S}) = 4$, используется также следующее легко проверяемое комбинаторное утверждение (с учетом критериев конечной представимости и ручности, см. п. 2).

Лемма 9. *Если чум* $S = (u-1) \sqcup ((a+1) \times (b+1))$ $(u, a, b \in \mathbb{N})$, *то* S *конечнопредставимо (соответственно ручное), если и только если* $\rho(u, a, b) < 4$ (*соответственно* $\rho(u, a, b) = 4$).

Если $\dim s = 4$, то из ручности или условия $\mu(\tilde{S}) \leq 4$ следует, что $S^{\varkappa}(s) = \varnothing$, и этот случай может быть сведен к предыдущему, например, согласно лемме 7 (п. 5).

7. Конечнопредставимые диадические множества. Для $\tilde{\tilde{S}}$ определены две функции $\tilde{\tilde{p}}$ и $\tilde{p}$. Из их определения следует, что если $\tilde{\tilde{p}}(x) < \infty$, то $\tilde{p}(x) = \tilde{\tilde{p}}(x)$, но если $\tilde{\tilde{p}}(y) = \infty$, то возможно $\tilde{p}(y) < \infty$. Аналогично $\rho(\tilde{S})$ и $\mu(\tilde{S})$ определяются $\rho(\tilde{\tilde{S}})$ и $\mu(\tilde{\tilde{S}})$ (с заменой $\tilde{p}$ на $\tilde{\tilde{p}}$).

Предложение 6. *Если* $\tilde{\tilde{S}}$ *конечнопредставимо, то* $\rho\left(\tilde{\tilde{S}}\right) < 4$, $\mu\left(\tilde{\tilde{S}}\right) < 4$.

Если $\tilde{\tilde{S}}$ конечнопредставимо или $\mu\left(\tilde{\tilde{S}}\right) < 4$, то $\dim \tilde{\tilde{S}} \leq 3$. При $\dim = 1$ утверждение следует из [7], при $\dim = 2$ — из [1], при $\dim = 3$ — из [2] (при $\dim < 3$ остается только условие $\rho\left(\tilde{\tilde{S}}\right) < 4$).

Гипотеза 2. *Если* $\tilde{\tilde{S}}$ *ручное, то* $\rho\left(\tilde{\tilde{S}}\right) \leq 4$ *и* $\mu\left(\tilde{\tilde{S}}\right) \leq 4$.

Чум с отношением биэквивалентности $\tilde{\tilde{S}}$ будем называть *диадическим множеством* D, если $\dim \tilde{\tilde{S}} \leq 2$ и $\tilde{S}$ цепное (s и s^* сравнимы). Это определение равносильно определению из [1]. Положим $\tilde{D} = \tilde{S}$, $\rho(D) = \rho\left(\tilde{\tilde{S}}\right)$.

Агрегат $K(D)$ будем называть *диадическим*. Не всякий агрегат размерности 2 диадический, но это так (см. [16]), если агрегат конечнопредставим.

Положим $D_e = \{(x, y) \mid x, y \in D,\ x \Rightarrow y\}$. Элементы D_e будем называть ребрами. Из условий i), ii) следует, что $(x, x^*) \notin D_e$. Если $\alpha = (x, y) \in D_e$, то $(x, y) \approx (x^*, y^*)$ (i) и если $x < x^*$, то $y < y^*$ (если $y^* < y$, то $x \lhd x^* \leq y^* \lhd y$ и $x \lhd \lhd y$). Положим $\alpha^* = (x^*, y^*)$.

Множество D_e само является частично упорядоченным. $(x, y) \overset{e}{\leq} (\bar{x}, \bar{y})$, если $\bar{x} \leq x$, $\bar{y} \leq y$. Ребро *максимальное* (соответственно *короткое*), если оно максимально (соответственно минимально) в смысле этого отношения порядка. Ребро *длинное*, если оно не короткое (при этом оно не обязательно максимальное). Если $x < y$, то положим $\mathrm{Eq}(x, y) = D^{\aleph}\{x, y\}$, $\mathrm{eq}(x, y) = \tilde{p}(\mathrm{Eq}(x, y))$. $\alpha \in D_e$ *неоснащенное*, если $\mathrm{Eq}(\alpha) = \varnothing$, и *линейно оснащенное*, если $\mathrm{eq}(\alpha) < \infty$. D *линейно оснащенное*, если линейно оснащено каждое $\alpha \in D_e$.

D' — **-подмножество* диадического множества D, если из $a \in D'$ следует $a^* \in D'$. В этом случае $(D', \leq, \approx)$ — диадическое множество и $\mathrm{Rep}\, D' \subset \mathrm{Rep}\, D$. Представление $T \subset \mathrm{Rep}\, D$ *точное*, если T не содержится в $\mathrm{Rep}\, D'$ ни для какого *-подмножества D'.

D — *точное*, если оно имеет точное неразложимое представление. Если $\overline{D}$ — диадическое множество, получаемое из D усилением отношения $\leq$ или ослаблением отношения $\approx$ (отношение $\overline{R}$ *слабее* отношения R, если $\overline{R} \subset R$), то $\mathrm{ind}\, \overline{D} \subset \mathrm{ind}\, D$ (в частности, $\mathrm{ind}\, \tilde{D} \subset \mathrm{ind}\, D$). D — *критическое*, если $|\mathrm{ind}\, D| = \infty$, а для любого $\overline{D}$ и D' указанного выше вида $|\mathrm{ind}\, \overline{D}| < \infty$ и $|\mathrm{ind}\, D'| < \infty$.

Явный список критических диадических множеств был бы длинным и громоздким (см. [1]). Забегая вперед, отметим, что из результатов [1], которые мы переформулируем ниже, следует, что биэквивалентность в критическом множестве транзитна (из $a \Rightarrow b \Rightarrow c$ следует $a \Rightarrow c$, п. 5) — факт, для которого мы не располагаем априорным доказательством.

При переформулировке критерия конечной представимости [1] можно считать, что $|\mathrm{ind}\, \tilde{D}| < \infty$, поскольку $\mathrm{ind}\, \tilde{D} \subset \mathrm{ind}\, D$. $\tilde{D}$ есть чум с эквивалентностью, для которой критерий конечной представимости дан в предложении 5 $\left(\rho(\tilde{D}) < 4\right)$.

Лемма 10. *Если* $|\mathrm{ind}\, \tilde{D}| < \infty$ *и* $a, a^*, b, b^* \in D$, *то либо* a *и* b *сравнимы, либо* a^*, b^* *сравнимы.*

Если $a \asymp b$ и $a^* \asymp b^*$, то нетрудно видеть, что ни одна из точек $a, a^*, b,$
не может быть нормальна, $\tilde{p}(a) = \tilde{p}(b) = \tilde{p}(a^*) = \tilde{p}(b^*) = \infty$, $\rho(\tilde{D}) \geq 4$, что пр
тиворечит предложению 5.

Легко видеть, что $\rho(D) \geq \rho(\tilde{D})$. Из данных определений и [1] следует так
лемма.

Лемма 11. *Если* $|\operatorname{ind} \tilde{\tilde{D}}| < \infty$, *то* $\tilde{\tilde{D}}$ *линейно оснащено. Если* D *линей*
оснащено и $\rho(\tilde{D}) < 4$, *то* $\rho(D) < 4$.

Множество $\{ d_1 \Rightarrow d_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow d_t \}$ $(t \geq 1) \subset D$ назовем *полосой*, если кажд
ребро (d_i, d_{i+1}) короткое, в точку d_1 не входят (т. е. нет $x \Rightarrow d_1$), а из точ
d_t не выходят (нет $d_t \Rightarrow y$) ребра. (При $t = 1$ имеем *изолированную* точку d

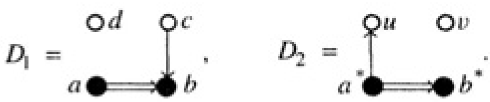
Лемма 12. *Если* $\rho(\tilde{D}) < 4$, *то ни в какую точку не входят и ни из как*
точки не выходят два коротких ребра.

Пусть $a \Rightarrow b$ и $a \Rightarrow c$ — короткие ребра. $(a, b) \approx (a^*, b^*)$, $(a, c) \approx (a^*, c$
Если $b < c$, то при $b \lhd c$ имеем $a \lhd c$; а при $b \Rightarrow c$ ребро (a, c) длинн
Аналогично исключаются случаи $b > c$, $b^* < c^*$, $b^* > c^*$. Значит, $b \asymp c$, b^*
$\asymp c^*$, и противоречие с леммой 10.

Следствие. *Если* $\rho(\tilde{D}) < 4$, *то* $\dot{D}$ *распадается в объединение непересек*
ющихся полос.

Множество D — *бикомпонентное*, если оно разлагается в ординальн
сумму D_1 и D_2 ($d_1 \lhd d_2$ при $d_1 \in D_1$, $d_2 \in D_2$), и каждое из D_1, D_2 соде
жит в точности одну полосу.

***Пример* 4.**



Это множество конечнопредставимо и имеет одно точное неразложимое пре
ставление.

Представления бикомпонентных множеств рассмотрены в [30]. К ним в
вестном смысле сводятся представления произвольных конечнопредставим
диадических множеств.

Бикомпонентное множество *нормально*, если нормальны все большие точ
одной из компонент D_1, D_2. В примере 4 бикомпонентное D не нормально.
[30] доказывается (и это по сути основной результат этой работы), ч
конечнопредставимое точное бикомпонентное множество либо нормально, ли
имеет вид, указанный в примере 4.

Для формулировки критерия конечной представимости диадических м
жеств нам понадобятся еще некоторые определения.

Напомним, что $\mu(n_1, n_2, n_3) = n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3 + n_1 n_2 n_3$ (где $0 \leq n_3$
$\leq n_2 \leq n_1$) (см. лемму 6). В этом пункте будем считать $\mu(\infty, 0, 0) = 4$ и $\mu($
$n_2, n_3) = \infty$ при $n_2 \neq 0$.

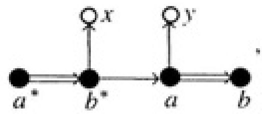
Пусть $\alpha = (x, y) \in D_c$. Положим $\langle \alpha \rangle = \{ z \in D \mid x < z < y \}$ (тогда (x, z),
$y) \in D_c$), $l(x, y) = l(\alpha) = |\langle \alpha \rangle|$. Если $\rho(D) < 4$, то по лемме 12 $\omega(\langle \alpha \rangle) = 1$.

Если $u \in \operatorname{Eq}(x, y)$, то $\{u\} \asymp \langle \alpha \rangle$. Положим $\operatorname{Eq}^-(\alpha) = \{ v \in D \mid \{v\}$
$\asymp (\{y\} \cup \langle \alpha \rangle) \}$, $\operatorname{Eq}^+(\alpha) = \{ v \in D \mid \{v\} \asymp (\{x\} \cup \langle \alpha \rangle) \}$.

Множество $X \subset D_{\tilde{\tilde{p}}}$ назовем *окаймляющим* ребро $\alpha = (x, y)$, если $X = Z^- \cup Z^+ \cup Z^e$, где Z^-, Z^+, Z^e — попарно несравнимые 1-цепи, $Z^- \subset \mathrm{Eq}^-(\alpha)$, $Z^+ \subset \mathrm{Eq}^+(\alpha)$, $Z^e \subset \mathrm{Eq}(\alpha)$, и при этом если $l(\alpha) \geq 2$, то $Z^- = Z^+ = \varnothing$ (окаймляющее множество X, вообще говоря, неоднозначно определяется ребром α).

Если X окаймляет ребро σ, то положим $\mathrm{eq}(\sigma, X) = \tilde{\tilde{p}}(Z^e)$, $\mathrm{eq}^*(\sigma, X) = \mathrm{eq}(\sigma^*) + \min\left\{\tilde{\tilde{p}}(Z^-), |2 - l(\sigma)|\right\} + \min\left\{\tilde{\tilde{p}}(Z^+), |2 - l(\sigma)|\right\}$[4], $\mu(\sigma, X) = \mu(\mathrm{eq}(\sigma, X), \mathrm{eq}^*(\sigma, X), l(\sigma))$.

***Пример* 5.**

$D =$  ,

$\sigma = (a, b)$, $X = \{x, y\}$, $\{x\} = Z^e$, $\{y\} = Z^-$, $Z^+ = \varnothing$, $\mathrm{eq}(\sigma, X) = 1$, $\mathrm{eq}(\sigma^*) = 0$, $\mathrm{eq}^*(\sigma, X) = 1$, $l(\sigma) = 0$, $\mu(\sigma, X) = 1$.

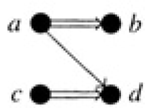
Основная теорема работы [1] (с учетом замечания 7) может быть переформулирована в следующем виде.

Предложение 7. *Если* $|\mathrm{ind}\,\tilde{D}| < \infty$, *т. е.* $\rho(\tilde{D}) < 4$ (*см. предложение* 5), *то* $|\mathrm{ind}\,D| < \infty$, *если и только если выполняются следующие условия*:

A. *Если* X *окаймляет* $\sigma \in D_e$, *то* $\mu(\sigma, X) < 4$.

B. *Если* $\sigma = (a, b) \in D_e$, $l(\sigma) = 1$, $\mathrm{eq}(\sigma) = 3$, *то* $D^{\text{ж}}(\{a\} \cup \mathrm{Eq}(\sigma)) = D^{\text{ж}}(\{b\} \cup \mathrm{Eq}(\sigma)) = \varnothing$.

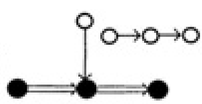
C. *Если*

 $\subset D$,

то $\mu(\mathrm{eq}(a, d), \mathrm{eq}(a^*, b^*), \mathrm{eq}(c^*, d^*)) = 0$.

(Линейная оснащенность следует из A, так как если $\mathrm{eq}(\sigma^*) = \infty$, то $\mu(\sigma, X) \geq 4$.)

***Пример* 6.**

$D \supset Y =$ 

Это (в некотором смысле единственный) пример невыполнения условия B. Рассмотрим этот случай более подробно. В условии B $\mathrm{eq}(\sigma) = 3$. При этом может быть $|\mathrm{Eq}(\sigma)| = 3$ (как в примере 6, где $\mathrm{Eq}(\sigma)$ состоит из малых точек),

[4] В работе [1] в этой формуле пропущены знаки модуля при $2 - l(\sigma)$.

или $|\mathrm{Eq}(\sigma)| = 2$ $(\mathrm{Eq}(\sigma) = \{s, t\},\ s \in \dot{D},\ t \in \mathring{D},\ D^{\varkappa}(s^*) = \varnothing)$ или $\mathrm{Eq}(\sigma) = y$ $(D^{\varkappa}(y^*) = z \in \mathring{D})$. Таким образом, условие В соответствует нескольким критическим множествам, которые сводятся одно к другому, поскольку лемма [3] (см. п. 6) очевидным образом обобщается на чум с биэквивалентностью, если x — изолированная (1-нормальная) точка.

Назовем критическое множество *первичным*, если оно не содержит изолированных 1-нормальных точек (остальные сводятся к ним с помощью этой леммы). Теперь можно сказать точно, что (с точностью до двойственности) каждое первичное множество, не удовлетворяющее условию В, содержит Y из примера 6.

Условие А, напротив, исключает много (первичных) критических множеств и может служить хорошим примером применения функции μ (можно, разумеется, использовать здесь ρ вместо μ). Предположим сначала, что $\bar{\bar{S}}$ линейно оснащено и выпишем все случаи $\mu = 4$ в условии А, считая для некоторого сокращения числа случаев (остальные аналогичны)

$$\mathrm{eq}^- = \min\left\{\bar{\bar{\rho}}(Z^-), |2 - l(\sigma)|\right\} \geq \mathrm{eq}^+ = \min\left\{\bar{\bar{\rho}}(Z^+), |2 - l(\sigma)|\right\}:$$

1) $l = 0,\ \mathrm{eq}(\sigma, X) = \mathrm{eq}(\sigma) = 1,\ \mathrm{eq}(\sigma^*) = 4$ (или $\mathrm{eq}(\sigma) = 4,\ \mathrm{eq}(\sigma^*) = 1$);

2) $l = 0,\ \mathrm{eq}(\sigma, X) = \mathrm{eq}(\sigma) = 2,\ \mathrm{eq}(\sigma^*) = 2$;

3) $l = 0,\ \mathrm{eq}(\sigma) = 1,\ \mathrm{eq}(\sigma^*) = 3,\ \mathrm{eq}^- = 1$;

4) $l = 0,\ \mathrm{eq}(\sigma) = 1,\ \mathrm{eq}(\sigma^*) = 2,\ \mathrm{eq}^- = 2$;

5) $l = 0,\ \mathrm{eq}(\sigma) = 1,\ \mathrm{eq}(\sigma^*) = 2,\ \mathrm{eq}^- = \mathrm{eq}^+ = 1$;

6) $l = 0,\ \mathrm{eq}(\sigma) = 2,\ \mathrm{eq}(\sigma^*) = 1,\ \mathrm{eq}^- = 1$;

7) $l = 0,\ \mathrm{eq}(\sigma) = 2,\ \mathrm{eq}(\sigma^*) = 0,\ \mathrm{eq}^- = 2$;

8) $l = 0,\ \mathrm{eq}(\sigma) = 2,\ \mathrm{eq}(\sigma^*) = 0,\ \mathrm{eq}^- = \mathrm{eq}^+ = 1$;

9) $l = 0,\ \mathrm{eq}(\sigma) = 4,\ \mathrm{eq}^- = 1$;

10) $l = 1,\ \mathrm{eq}(\sigma) = 0,\ \mathrm{eq}(\sigma^*) = 4$ (или $l = 1,\ \mathrm{eq}(\sigma) = 4,\ \mathrm{eq}(\sigma^*) = 0$);

11) $l = 1,\ \mathrm{eq}(\sigma) = 0,\ \mathrm{eq}(\sigma^*) = 3,\ \mathrm{eq}^- = 1$;

12) $l = 1,\ \mathrm{eq}(\sigma) = 0,\ \mathrm{eq}(\sigma^*) = 2,\ \mathrm{eq}^- = 1,\ \mathrm{eq}^+ = 1$;

13) $l = 1,\ \mathrm{eq}(\sigma) = 1,\ \mathrm{eq}(\sigma^*) = 1$;

14) $l = 1,\ \mathrm{eq}(\sigma) = 1,\ \mathrm{eq}^- = 1$;

15) $l = 2,\ \mathrm{eq}(\sigma) = 2,\ \mathrm{eq}(\sigma^*) = 0$ (или $l = 2,\ \mathrm{eq}(\sigma) = 0,\ \mathrm{eq}(\sigma^*) = 0$);

16) $l = 4,\ \mathrm{eq}(\sigma) = 1,\ \mathrm{eq}(\sigma^*) = 0$ (или $l = 4,\ \mathrm{eq}(\sigma) = 0,\ \mathrm{eq}(\sigma^*) = 1$);

17) $l = 0,\ \mathrm{eq}(\sigma) = \mathrm{eq}(\sigma^*) = 1,\ \mathrm{eq}^- = 2,\ \mathrm{eq}^+ = 1$.

В каждом из указанных случаев получим первичное критическое множество (см. [1]), за исключением случаев 7 и 14, в которых соответствующие $\bar{\bar{S}}$ не будут критическими (в обоих случаях множество остается бесконечнопредставимым при исключении пары эквивалентных точек, являющихся началами полос). Из каждого первичного можно получить несколько (иногда одно, но всегда конечное число) критических, аналогично условию В и примеру 6.

Случаю же нелинейно оснащенного $\tilde{\tilde{S}}$ $(\mathrm{eq}(\sigma^*) = \infty)$ соответствует бесконечно много критических. Бесконечно много критических получается и в случае $\tilde{S}$ (см. предложение 5).

Критические линейно оснащенные множества, полученные из A, B, содержат одну пару двойственных полос; полученные из C — две пары.

В других терминах критерий конечной представимости диадических множеств анонсирован в [16] и доказан в [1, 25].

Именно, каждому диадическому D сопоставляется чум $C(D)$ так, что $|\operatorname{ind} C(D)| < \infty$ равносильно $|\operatorname{ind} D| < \infty$. При этом „почти все" представления из $\operatorname{ind} D$ *мультиэлементарны* (см. [31]), т. е. соответствуют представлениям $\operatorname{ind} C(D)$. Примером немультиэлементарного представления является (единственное) точное неразложимое из примера 4. Остальные немультиэлементарные представления конечнопредставимых диадических множеств в некотором смысле получаются из этого представления и явно описаны в [26, 27].

Каждая из двух формулировок критерия конечной представимости диадических множеств (в терминах $C(D)$ и предложения 7), по-видимому, имеет свои преимущества и недостатки. Предложение 7 проще в применении, ближе к явному списку критических и позволяет судить о качественном строении конечнопредставимых диадических множеств (число полос, транзитность и т. д.).

Из [32] следует, что при $\dim \mathcal{A} = 3$ и $|\operatorname{ind} \mathcal{A}| < \infty$ представление агрегата $\mathcal{A}$ есть представление *триадического* множества [2, 32]. В [2] сформулирован и доказан в одну сторону критерий их конечной представимости, обобщающий предложение 7. При этом снова важную роль играет функция μ (или ρ), которая появляется там еще в одном случае, существенно отличающемся от рассмотренных в этой статье.

8. Критерии конечной представимости и ручности для полулинейно маркированных колчанов. В этом пункте, опираясь на результаты [9] и п. 3, дадим (в терминах функции ρ) критерии конечной представимости и ручности для некоторых типов маркированных колчанов, а также покажем, как вопрос о конечной представимости и ручности произвольных k-маркированных колчанов сводится к аналогичным вопросам для представлений агрегатов.

Агрегат $K(S)$ *линейный*, если $w(S) = 1$. Агрегат $K(\tilde{S})$ и чум с эквивалентностью $\tilde{S}$ *полулинейны*, если $\dim \tilde{S} \le 2$, каждый элемент $x \in S$ не сравним не более чем с одним элементом y, и если такой y существует, то $\dim x = 1$ (мы считаем здесь линейный агрегат частным случаем *полулинейного*). Колчан $\tilde{Q}$ — *полулинейно маркирован*, если для каждой $x \in Q_v$ подагрегат $K(x)$ полулинеен. Агрегат $K(S, \le)$ будем обозначать K^n, если $w(S) = 1$, $|S| = n$; K^0 будем считать „пустым" агрегатом $(\mathrm{Ob}\, K^0 = \varnothing)$.

Если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — два агрегата, то через $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ обозначим агрегат, в котором $\mathrm{Ob}\,(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) = \{\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \mid A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A},\ B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}\}$, $\mathrm{Hom}(A_1 \oplus B_1, A_2 \oplus B_2) = \mathcal{A}(A_1, A_2) \oplus \mathcal{B}(B_1, B_2)$.

Для агрегата $\mathcal{A}$ естественно определен двойственный агрегат $\mathcal{A}^\circ$: $\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}^\circ = \left\{ A^* = \mathrm{Hom}_k(A, k) \mid A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A} \right\}$, $\mathcal{A}^\circ(A^*, B^*) = \left\{ \varphi^* \mid \varphi \in \mathcal{A}(B, A) \right\}$.[5]

Сопоставим полулинейно маркированному колчану $\overline{Q}$ v-граф $\overline{\Gamma} = \overline{\Gamma}(Q)$ (см. п. 3), считая $v(x) = \dim K(x)$, если $K(x)$ линеен, и $v(x) = \infty$, если $K(x)$ не линеен.

---

[5] Как ни странно, мы не располагаем доказательством того факта, что агрегаты $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^\circ$ конечнопредставимы или ручны одновременно, хотя это кажется совершенно очевидным.

Из основной теоремы [9] и предложения 3 (с учетом замечания 4) следует такое утверждение.

Предложение 8. *Полулинейно маркированный колчан* $\overline{Q}$ *конечнопредставим (соответственно ручной), если и только если* ρ*-кратность каждой вершины* $\overline{\Gamma}(Q)$ *меньше* 4 (*соответственно* $\max g_{\rho}(x) = 4$, *где* $x \in Q_{v}$).

Если $\overline{Q}$ — произвольный маркированный колчан, то сохраним смысл $v(x)$, если $K(x)$ полулинейно маркирован, и будем писать $v(x) > \infty$ — в противном случае.

Лемма 13 [9]. *Если* $v(x) > \infty$, $x \in Q_v$, *то* Q *конечнопредставим (соответственно ручной), если и только если*:

1) *граф* $\Gamma(Q) = A_l$ $(l \geq 2)$, $x = a_1$;

2) $v(a_i) = 1$ *при* $1 < i < l$, $v(a_l) < \infty$;

3) *агрегат* $\mathcal{A} \oplus D$ *конечнопредставим (соответственно ручной), где* $\mathcal{A} = K(x)$ *или* $K(x)^{\circ}$, *в зависимости от того, является ли* x *концом или началом стрелки в колчане* Q, $\mathcal{D} = K^t$, $t = l + v(a_l) - 3$.

Критерии конечной представимости и ручности для неполулинейно маркированных колчанов, у которых $K(x)$ есть $K(\tilde{S})$ или $K(D)$, сводятся к представлениям самих $\tilde{S}$ и D по лемме 13. Выпишем эти критерии в явной форме.

Пусть $x \in Q$, $v(x) > \infty$, выполняются условия 1 и 2 из леммы 13, $t = |Q_v| + v(a_l) - 3$ и $K(x)$ есть $K(\tilde{S})$ или $K(D)$. Предположим сначала, что $\overline{Q}$ — маркированный колчан, где $K(x) = K(\tilde{S})$. Тогда $\overline{Q}$ конечнопредставим в следующих случаях:

1) $t = 1$; $\dim \tilde{S} \leq 2$, $\rho(\tilde{S}) < 3$;

2) $t \in \{2, 3, 4\}$; $\dim \tilde{S} \leq 2$, $\rho(\tilde{S}) < 3 - \dfrac{t-1}{t+1}$ (если $t = 4$, то $\rho(\tilde{S}) < 2,4$; $S \not\supset \hat{N}$, т. е. S есть ординальная сумма чум вида (1), (1,1) и (1, 2) (см. замечание 3), причем если $\dim S = 2$, то $s \notin \{1, 2\}$, а если $s \in (1)$, то $S^{\divideontimes}(s^{*}) = \varnothing$).

$\overline{Q}$ имеет ручной тип в следующих случаях:

1)′ $t = 1$; $\dim \tilde{S} \leq 3$, и если $\dim \tilde{S} < 3$, то $\rho(\tilde{S}) = 3$, а если $\dim s = 3$, $s \in S$, то $S^{\diamond}(s) = \varnothing$ и $\rho(S) \leq 3$;

2)′ $t \in \{2, 3, 4, 5\}$; $\dim \tilde{S} \leq 2$, $\rho(\tilde{S}) = 3 - \dfrac{t-1}{t+1}$ (если $t = 5$, то $\rho(\tilde{S}) = 2\dfrac{1}{3}$, и $\tilde{S}$ имеет тот же вид, что и в случае 2 при $t = 4$).

Пусть $Q(x) = K(D)$ и $D \neq \tilde{D}$. Соответствующий маркированный колчан конечнопредставим, если и только если $t = 1$, $\rho(D) < 3$, все ребра в D не оснащены и короткие, и если для некоторых (σ, X) $Z^{-} \neq \varnothing$ и $Z^{+} \neq \varnothing$, то $\tilde{\tilde{p}}(Z^{-}) = \tilde{\tilde{p}}(Z^{+}) = 1$. Колчан Q, маркированный триадическими множествами, может быть конечнопредставим только в случае, когда $Q = \Delta$ и одна из точек маркирована тривиально, т. е. $\operatorname{Rep} Q_M$ эквивалентна категории представлений триадического множества (маркирующего вторую вершину или двойственного).

Авторы выражают глубокую благодарность И. Р. Шафаревичу и участникам

его семинара за замечания, существенно использованные при написании этой статьи.

1. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Конечнопредставимые диадические множества // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 10. – С. 1363 – 1396.
2. *Belousov K. I., Nazarova L. A., Roiter A. V.* Finitely represented tryadic sets // Algebra and Analis. – 1997. – **9**, № 4. – P. 3 – 27.
3. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Представления и формы слабо пополненных частично упорядоченных множеств // Линейная алгебра и теория представлений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. – С. 19 – 55.
4. *Roiter A. V.* The norm of a relation / Representation Theory I. Finite Dimensional Algebras, Proc. Ottawa, 1984 // Lect. Notes Math. – 1984. – **1177**. – P. 269 – 272.
5. *Nazarova L. A., Roiter A. V.* Pepresentations of partially ordered sets // Zap. Nauchn. Semin. Leningr. Otd. Mat. Inst. Steklova. – 1972. – **28**. – P. 5 – 31 (English transl.: J. Sov. Math. – 1975. – **3**. – P. 585 – 606).
6. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. – М.: Мир, 1972. – 334 с.
7. *Kleiner M. M.* Partially ordered sets of finite type // Zap. Nauchn. Semin. Leningr. Otd. Math. Inst. Steklova. – 1972. – **281**. – P. 32 – 41.
8. *Nazarova L. A.* Partially ordered sets of infinite type // Izv. Akad. Nauk USSR. – 1975. – **39**, № 5. – P. 963 – 991.
9. *Roiter A. V.* Representations of marked quivers // Proc. ICRA 2000. Publ. House Beijing Normal Univ. – 2001. – **2**. – P. 417 – 433.
10. *Gabriel P.* Unzerlegbare Darstellungen I // Manuscr. math. – 1972. – **6**. – P. 71 – 103.
11. *Roiter A. V.* Matrix problems // Proc. Int. Congr. Math., Helsinki, 1978. – Helsinki: Finish Acad. Sci., 1979. – **1**. – P. 319 – 322.
12. *Биркгоф Г.* Теория структур. – М.: Изд-во иностр. лит., 1952. – 405 с.
13. *Freislish M.-R., Donovan P.* Some evidence for an extension of the Brauer – Thrall conjecture // Sonderforschung beraich Theor. Math. – Bonn, 1973. – 40 p.
14. *Drozd Ju. A.* Tame and wild matrix problems // Lect. Notes Math. – 1980. – **832**. – P. 242 – 258.
15. *Gabriel P., Nazarova L. A., Roiter A. V., Sergeichuk V. V., Vossieck V.* Tame and wild subspace problems // Ukr. Math. J. – 1993. – **45**, № 3. – P. 313 – 352.
16. *Gabriel P., Roiter A. V.* Representations of finite-dimensional algebras // Algebra. – 1992. – **8**. – 170 p.
17. *Bass H.* Algebraic K-theory. – New York: W. A. Benjamin, 1969. – 590 p.
18. *Кругляк С. А.* Функторы Кокстера для одного класса *-колчанов // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 6. – С. 789 – 797.
19. *Bernstein I. N., Gelfand I. M., Ponomarev V. A.* Coxeter functors and Gabriel's theorem // Izv. Mat. Nauk. – 1973. – **28**. – P. 19 – 33 (English transl.: Rus. Math. Surv. – 1973. – **28**. – P. 17 – 32).
20. *Donovan P., Freislish M.-R.* The representation theory of finite graphs and associated algebras // Carleton Math. Lect. Notes. – 1973. – № 5. – 83 p.
21. *Nazarova L. A.* Representations of quivers of infinite type // Izv. Akad. Nauk SSSR. – 1973. – **37**, № 4. – P. 752 – 791.
22. *Nazarova L. A., Roiter A. V.* Kategorielle matrizen-problems und Brauer – Thrall vermutung // Mitt. Aus dem. Math. Sem. Giessen. – 1975. – 112 p.
23. *Ringel C. M.* Tame algebras and integral quadratic form // Lect. Notes Math. –1984. – **1099**. – 378 p.
24. *Bondarenko V. M., Zavadskiij A. G.* Posets with an equivalence relation of tame type and finite growth // Can. Math. Soc. Conf. Proc. – 1991. – **11**. – P. 67 – 88.
25. *Roiter A. V., Belousov K. I., Nazarova L. A.* Representations of finitely represented dyadic sets // Algebras and Modules II, ICRA 1996. – CMS Conf. Proc., 1998. – **24**. – P. 61 – 77.
26. *Guidon T.* Representations of dyadic sets 2: Diss. Univ. Zurich, 1996. – P. 1 – 47.
27. *Hassler U.* Representations of dyadic sets 1: Diss. Univ. Zurich, 1996. – P. 1 – 62.
28. *Назарова Л. А., Бондаренко В. М., Ройтер А. В.* Ручные частично упорядоченные множества с инволюцией // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1980. – **183**.
29. *Roiter A. V.* Representations of posets and tame matrix problems // Proc. Durham Simp., 1985. – Cambridge, 1986. – P. 91 – 109.
30. *Nazarova L. A., Roiter A. V.* Representations of bipartite completed posets // Comment. math. helv. – 1988. – **63**. – P. 498 – 526.
31. *Belousov K. I., Nazarova L. A., Roiter A. V., Sergeichuk V. V.* Elementary and multielementary representations of vectroids // Ukr. Math. J. – 1995. – **47**, № 11. – P. 1451 – 1477.
32. *Ройтер А. В., Сергейчук В. В.* Существование мультипликативного базиса для конечнопредставимых модулей над агрегатами // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 5. – С. 567 – 580.

Получено 12.02.2002