УДК 517.53

В. В. Андриевский

Описание классов функций с заданной скоростью убывания их наилучших равномерных полиномиальных приближений

Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольный конечный континуум комплексной плоскости с односвязным дополнением $\Omega = C\mathfrak{M}$; $A(\mathfrak{M})$ — класс непрерывных на $\mathfrak{M}$ и аналитических в его внутренних точках функций; $\mathcal{P}_n$, $n = 0, 1, \ldots,$— множество всех полиномов степени не выше n, $E_n(f, \mathfrak{M}) = \inf\limits_{P_n \in \mathcal{P}_n} \sup\limits_{z \in \mathfrak{M}} |f(z) - P_n(z)|$, $f(z) \in A(\mathfrak{M})$.

В. К. Дзядыком была поставлена задача описать все функции f, для которых $E_n(f, \mathfrak{M}) \preccurlyeq n^{-s}$; $s > 0$, $n = 1, 2, \ldots,$ где под символом $a \preccurlyeq b$ понимается неравенство $a \leqslant cb$, $c = \text{const} > 0$. Обзор полученных при решении этой задачи результатов содержится в [1 — 3].

В настоящей работе обсуждаемая задача в более общей постановке решена для некоторых континуумов без внешних нулевых углов, граница которых не обязательно спрямляема и не обязательно кусочно жорданова. Частные случаи этих континуумов — области с квазиконформной границей (и, следовательно, рассмотренные в [2] области Радона без нулевых углов), множества типа B_k^*, введенные в [3, с. 440]. Результаты подобно [2] формулируются в терминах локальных модулей гладкости.

1. Основные определения и результаты. Введем понятие модуля гладкости [4, 5]. Пусть $f(z) \in A(\mathfrak{M})$, $z \in L = \partial\mathfrak{M}$, $\delta > 0$, $k \geqslant 0$ — целое число, $U(z, \delta) = \{\zeta : |\zeta - z| \leqslant \delta\}$. Локальным модулем гладкости порядка k назовем величину $\omega_{k,\mathfrak{M}}(f, z, \delta) \overset{\text{df}}{=} E_k(f, \mathfrak{M} \cap U(z, \delta))$.

В [2, 6] показано, что локальный модуль гладкости в такой интерпретации эквивалентен по порядку локальным равномерным модулям гладкости, определяемым в [4, 5] с помощью процедуры интерполирования функции по равнораспределенным узлам.

В данной работе рассматриваются функции, заданные на континуумах класса H^*. Приводимые ниже рассуждения, положенные в основу определения этого класса, обобщают соответствующие построения работы [7].

Через $w = \Phi(z)$ обозначим функцию, конформно и однолистно отображающую $\Omega = C\mathfrak{M}$ на $\Omega' = \{w : |w| > 1\}$ с нормировкой $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) > 0$.

Тем же символом Φ обозначим гомеоморфизм между компактификацией $\tilde{\Omega}$ области Ω простыми концами по Каратеодори и $\overline{\Omega}'$, совпадающий с $\Phi(z)$ в Ω. Пусть $\Psi = \Phi^{-1}$, $\tilde{L}$ — множество граничных простых концов.

Будем говорить, что $\mathfrak{M} \in H$, если любые точки z и $\zeta \in \mathfrak{M}$ можно соединить дугой $\gamma(z, \zeta) \subset \mathfrak{M}$, длина которой удовлетворяет условию

$$\operatorname{mes} \gamma(z, \zeta) \preccurlyeq |z - \zeta|. \tag{1}$$

Нетрудно показать, что если $\mathfrak{M} \in H$, то все простые концы $Z \in \tilde{L}$ первого рода, т. е. имеют одноточечные тела $|Z| = z \in L$.

Пусть $\mathfrak{M} \in H$, $z = |Z| \in L$ = тело простого конца $Z \in \tilde{L}$. Через $\gamma_z(r) \subset \Omega$, $r > 0$, обозначим дугу на окружности $\{\xi : |\xi - z| = r\}$, разбивающую Ω на две подобласти: неограниченную и ограниченную, к которой примыкает простой конец Z. Если $\gamma_z(r)$ определяется неоднозначно, то выбираем ее так, чтобы возникающая при этом неограниченная подобласть была максимально возможной при данных Z и r. Таким образом, если $0 < r < R < (\operatorname{diam} \mathfrak{M})/2$, то $\gamma_Z(r)$ и $\gamma_Z(R)$ — стороны некоторого четырехсторонника $Q_Z(r, R) \subset \Omega$, две другие стороны которого — части L. Через $m_Z(r, R)$ обозначим модуль этого четырехсторонника, а именно модуль семейства кривых, разделяющих в $Q_Z(r, R)$ стороны $\gamma_Z(r)$ и $\gamma_Z(R)$.

Пусть $\mathfrak{M} \in H$. Будем говорить, что $\mathfrak{M} \in H^*$, если существует такое число $0 < \varepsilon = \varepsilon(\mathfrak{M}) < (\operatorname{diam} \mathfrak{M})/2$, что для любых простых концов Z и $\mathfrak{Z}\in\tilde{L}$ со свойством $|z-\zeta|<\varepsilon$ $(z=|Z|,\ \zeta=|\mathfrak{Z}|)$ выполняется неравенство $|m_Z(|z-\zeta|,\ \varepsilon)-m_{\mathfrak{Z}}(|z-\zeta|,\ \varepsilon)|\leqslant 1$. Класс H^* достаточно широк [7]. Частные случаи континуумов класса H^* — области с квазиконформной границей, множества типа B_k^*, введенные в [3, с. 440].

Для $z\in L$ и $R>1$ положим $L_R=\{\zeta:|\Phi(\zeta)|=R\}$, $\rho_R(z)=\inf\limits_{\zeta\in L_R}|\zeta-z|$, $r(z,\delta)$, $\delta>0$, определим из равенства $\rho_{1+r(z,\delta)}(z)=\delta$.

Следуя [5, с. 58], нормальной мажорантой будем называть всякую функцию $\mu(\delta)$, заданную, положительную и неубывающую на полуоси $\delta>0$, для которой $\mu(+0)=0$ и при некоторых фиксированных $C\geqslant 1$ и $\alpha>0$ выполняется неравенство $\mu(t\delta)\leqslant Ct^\alpha\mu(\delta)$; $\delta>0$, $t>1$.

Через $B^\mu(\mathfrak{M})$ обозначим класс функций $f\in A(\mathfrak{M})$, для которых

$$E_n(f,\mathfrak{M})\leqslant\mu(1/n),\qquad n=1,2,\ldots. \tag{2}$$

Основной результат данной работы — следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $\mathfrak{M}\in H^*$, $\mu(\delta)$ — *произвольная нормальная мажоранта. Для того чтобы* $f\in B^\mu(\mathfrak{M})$, *необходимо и достаточно, чтобы при некотором* $k\geqslant 0$ *для всех* $z\in L$ *и* $\delta>0$ *имело место неравенство*

$$\omega_{k,\mathfrak{M}}(f,z,\delta)\leqslant\mu[r(z,\delta)]. \tag{3}$$

2. Геометрия континуумов класса H*. В этом пункте приведем некоторые свойства отображающей функции $\Phi(z)$ при $\mathfrak{M}\in H^*$, доказательство которых аналогично построениям работы [7].

Лемма 1. *Пусть* $\mathfrak{M}\in H$. *Для того чтобы* $\mathfrak{M}\in H^*$, *необходимо и достаточно, чтобы для любых* $R>1$, Z, $\mathfrak{Z}\in\tilde{L}$, $|z-\zeta|\leqslant|z-\tilde{z}_R|$ *выполнялось соотношение* $|\zeta-\tilde{\zeta}_R|\asymp|z-\tilde{z}_R|$, *где* $z=|Z|$, $\zeta=|\mathfrak{Z}|$, $\tilde{z}_R=\Psi[R\Phi(Z)]$, $\tilde{\zeta}_R=\Psi[R\Phi(\mathfrak{Z})]$.

Лемма 1 дает удобный для работы с отображающими функциями Φ и Ψ критерий принадлежности произвольного континуума классу H^*.

Лемма 2. *Пусть* $\mathfrak{M}\in H^*$. *Точки* z, $\zeta_L\in L$ *и* $\zeta\in\overline{\Omega}$ — *тела простых концов* $Z\in\tilde{L}$, $\mathfrak{Z}_L=\Psi[\Phi(\mathfrak{Z})|\Phi(\mathfrak{Z})|^{-1}]\in\tilde{L}$ *и* $\mathfrak{Z}\in\tilde{\Omega}$, $|\Phi(\mathfrak{Z})|\leqslant 1$; $R>1$. *Тогда существуют такие положительные константы* α, β *и* γ, *зависящие только от* $\mathfrak{M}$, *что* $\rho_R(z)\asymp|z-\tilde{z}_R|$; $d(\zeta,L)\overset{\mathrm{df}}{=}\inf\limits_{z\in L}|\zeta-z|\asymp|\zeta-\zeta_L|$;

$$\left|\frac{\tilde{\zeta}_R-\zeta}{\tilde{\zeta}_R-z}\right|\leqslant\left|\frac{\tilde{z}_R-z}{\tilde{\zeta}_R-z}\right|^\alpha;\qquad\left(\frac{u}{v}\right)^\beta\leqslant\frac{\rho_{1+u}(z)}{\rho_{1+v}(z)}\leqslant\left(\frac{u}{v}\right)^\gamma,\qquad u>v>0,$$

В процессе построения аппроксимационных полиномов, как правило, возникает задача приближения ядра Коши $1/(\zeta-z)$ многочленными ядрами вида $\sum\limits_{k=0}^{n}a_k(\zeta)z^k$. Один из наиболее общих типов таких ядер — функции $K_{r,m,k,n}(\zeta,z)$ (см., например, [3, с. 429]).

Рассуждая так же, как в [3, с. 428—439], нетрудно убедиться в справедливости следующей леммы, описывающей аппроксимационные свойства ядер $K_{1,m,k,n}(\zeta,z)$ в случае континуумов класса H^*.

Лемма 3. *Пусть* $\mathfrak{M}\in H^*$, $m>0$ *и* $R>1$ — *произвольные фиксированные числа. Тогда существует такое натуральное число* $k=k(\mathfrak{M},m,R)$, *при котором для всех* $z\in\mathfrak{M}$ *и* $\zeta\in\Omega_R=\{\zeta:|\Phi(\zeta)|<R\}$ *справедливы соотношения*

$$|1/(\zeta-z)-K_{1,m,k,n}(\zeta,z)|\leqslant\rho^m_{1+1/n}(z)/(|\zeta-z|+\rho_{1+1/n}(z))^m;$$

$$|K_{1,m,k,n}(\zeta,z)|\leqslant 1/(|\zeta-z|+\rho_{1+1/n}(z)).$$

3. Построение вспомогательной функции. Пусть $\mathfrak{M}\in H^*$ $f(z)\in A(\mathfrak{M})$. Полином $\pi_k(\zeta,z,r)$, $z\in L$, $r>0$, определим из равенства

$\omega_{k,\mathfrak{M}}(f, z, r) = \sup\limits_{\zeta\in\mathfrak{M}\cap U(z,r)} |f(\zeta) - \pi_k(\zeta, z, r)|$. Положим далее

$$F(\zeta) = \begin{cases} \int\limits_{\gamma(z_0,\zeta)} f(\xi)\,d\xi, & \zeta\in\mathfrak{M}; \\ \int\limits_{\gamma(z_0,\zeta_L)} f(\xi)\,d\xi + \int\limits_{\zeta_L}^{\zeta} \pi_{k,\zeta}(\xi)\,d\xi, & \zeta\,\overline{\in}\,\mathfrak{M}; \end{cases}$$

где $z_0\in\mathfrak{M}$ — некоторая фиксированная точка; $\gamma(z_0, \zeta)$, $\gamma(z_0, \zeta_L)$ — дуги, соединяющие в $\mathfrak{M}$ соответственно точки z_0 и ζ, z_0 и ζ_L и обладающие свойством (1); $\pi_{k,\zeta}(\xi) = \pi_k(\xi, \zeta_L, |\zeta - \zeta_L|)$.

Отметим некоторые несложно доказываемые с учетом геометрии континуумов класса H^* свойства функции $F(\zeta)$. Пусть $z\in\Omega$, $h_z(\zeta) = \int\limits_{\gamma(z_0,z_L)} f(\xi)\,d\xi + \int\limits_{z_L}^{\zeta} \pi_{k,z}(\xi)\,d\xi$; $g_z(\zeta) = F(\zeta) - h_z(\zeta)$. Тогда при $|\zeta - z| \leqslant |z - z_L|$ выполняется неравенство

$$|g_z(\zeta)| \leqslant \omega_{k,\mathfrak{M}}(f, z_L, C|z - z_L|)\,|z - z_L|. \tag{4}$$

Здесь и в дальнейшем $C > 0$ — константы, зависящие только от $\mathfrak{M}$ и в разных соотношениях, вообще говоря, разные.

Пусть $z\in L$, $0 < r \leqslant 1$,

$$u_z(\zeta) = \int\limits_{\gamma(z_0,z)} f(\xi)\,d\xi + \int\limits_{z}^{\zeta} \pi_k(\xi, z, r)\,d\xi, \qquad v_z(\zeta) = F(\zeta) - u_z(\zeta). \tag{5}$$

Тогда в точках ζ со свойством $|\zeta - z| \leqslant r$ справедливо неравенство

$$|v_z(\zeta)| \leqslant \omega_{k,\mathfrak{M}}(f, z, Cr)\,r. \tag{6}$$

Усредним функцию $F(z)$, полагая

$$F^*(z) = \begin{cases} F(z), & z\in\mathfrak{M}; \\ \dfrac{1}{\pi d_z^2} \iint\limits_{U(z,d_z)} F(\xi)\,d\sigma_\xi, & z\,\overline{\in}\,\mathfrak{M}; \end{cases} \tag{7}$$

где $d_z = d(z, \mathfrak{M}) = \inf\limits_{\zeta\in\mathfrak{M}} |\zeta - z|$. Полученная функция $F^*(z)$ непрерывна в конечной комплексной плоскости и абсолютно непрерывна на линиях в конечной комплексной плоскости. Более того, из вида усреднения (7), свойств (4), (6) функции $F(\zeta)$ и очевидного при z, $\zeta\in\Omega$ неравенства $|d_z - d_\zeta| \leqslant |z - \zeta|$ вытекают следующие соотношения.

Пусть $z\in L$, $0 < r \leqslant 1$, $u_z(\zeta)$ задается формулой (5), $v_z^*(\zeta) = F^*(\zeta) - u_z(\zeta)$. Тогда при $|z - \zeta| \leqslant r$

$$|v_z^*(\zeta)| \leqslant \omega_{k,\mathfrak{M}}(f, z, Cr)\,r. \tag{8}$$

Пусть далее $\zeta\in\Omega$, $|\zeta| \leqslant 1$, тогда справедливо неравенство

$$|\partial F^*(\zeta)/\partial\bar{\zeta}| \leqslant \omega_{k,\mathfrak{M}}(f, \zeta_L, Cd_\zeta). \tag{9}$$

4. Доказательство теоремы. Пусть функция $f(z)\in A(\mathfrak{M})$ удовлетворяет условию (3). Укажем конкретный вид полиномов $P_n(z)$, для которых справедлива оценка $|f(z) - P_n(z)| \leqslant \mu(1/n)$, $z\in\mathfrak{M}$. С этой целью положим

$$P_n(z) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L} F^*(\zeta) K_n^2(\zeta, z)\,d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Omega} \frac{\partial F^*(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}} K_n^2(\zeta, z)\,d\sigma_\zeta,$$

где функция $F^*(\zeta) = F^*(f, \zeta)$ задается соотношением (7), $K_n(\zeta, z) =$

$= K_{1,m,k,[Cn]}(\zeta, z)$ — многочленное ядро из леммы 3 (n — достаточно большое, константа $C = C(m, k) > 0$ выбрана так, чтобы при фиксированных ζ $K_n^2(\zeta, z) \in \mathcal{P}_n$). Пусть $U_0 = \{\zeta : |\zeta - z| \leqslant \rho_{1+1/n}(z)\}$, $\sigma = \partial U_0$. В силу формулы Грина

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{F^*(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{F^*(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta =$$

$$= \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega_2 \setminus U_0} \frac{\partial F^*(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\sigma_\zeta}{(\zeta - z)^2}.$$

Следовательно,

$$f(z) - P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} F^*(\zeta) \left[\frac{1}{(\zeta - z)^2} - K_n^2(\zeta, z) \right] d\zeta +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega_2 \setminus U_0} \frac{\partial F^*(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \left[K_n^2(\zeta, z) - \frac{1}{(\zeta - z^2)} \right] d\sigma_\zeta +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \iint_{U_0} \frac{\partial F^*(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} K_n^2(\zeta, z)\, d\sigma_\zeta + f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{F^*(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta. \qquad (10)$$

Первые три интеграла соотношения (10) с помощью лемм 2, 3 и неравенства (9) несложно оцениваются сверху величиной $C\mu(1/n)$. Остается заметить, что в силу соотношений (5) и (8)

$$\left| f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{F^*(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{|v_z^*(\zeta)|}{|\zeta - z|^2} |d\zeta| +$$

$$+ |f(z) - \pi_k(z, z, \rho_{1+1/n}(z))| \leqslant \mu\left(\frac{1}{n}\right).$$

Доказательство необходимости условия (3) опирается на следующую оценку локального модуля гладкости, вытекающую из условия (2) (см. [8, неравенство (7)]):

$$\omega_{k,\mathfrak{M}}(f, z, \delta) \leqslant \delta^k \int_{\delta}^{2d} (\mu[r(z, t)]/t^{k+1})\, dt, \qquad 0 < \delta \leqslant d,$$

где $d = \operatorname{diam} \mathfrak{M}$. Таким образом, пользуясь определением нормальной мажоранты и леммой 2, получим при $\delta \in (0, d]$

$$\omega_{k,\mathfrak{M}}(f, z, \delta) \leqslant \delta^k \int_{\delta}^{2d} \mu[r(z, \delta)(t/\delta)^{\beta-1}]\, t^{-k-1}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \delta^k \mu[r(z, \delta)] \int_{\delta}^{2d} t^{\alpha\beta-1} dt/\delta^{\alpha\beta-1} t^{k+1} \leqslant \mu[r(z, \delta)],$$

как только $k > \alpha\beta^{-1}$. Теорема доказана.

1. *Дзядык В. К., Алибеков Г. А.* О равномерном приближении функций комплексного переменного на замкнутых множествах с углами.— Мат. сб., 1968, **75**, № 4, с. 502—557.
2. *Дынькин Е. М.* О равномерном приближении функций в жордановых областях.— Сиб. мат. журн., 1977, **18**, № 4, с. 775—786.
3. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. — М.: Наука, 1977.— 512 с.
4. *Воробьев Н. Н., Поляков Р. В.* О конструктивной характеристике непрерывных функций, заданных на гладких дугах.— Укр. мат. журн., 1968, **20**, № 6, с. 786—792.

5. *Тамразов П. М.* Гладкости и полиномиальные приближения.— Киев : Наук. думка, 1975.— 271 с.
6. *Шевчук И. А.* Конструктивная характеристика непрерывных на множестве $\mathfrak{M} \subset C$ функций для k-го модуля непрерывности.— Мат. заметки, 1979, 25, № 2, с. 225—249.
7. *Андриевский В. В.* Геометрические свойства областей В. К. Дзядыка.—Укр. мат. журн., 1981, 33, № 6, с. 723—727.
8. *Бардзинский В. В., Тамразов П. М.* О комплексных конечно-разностных гладкостях и полиномиальных приближениях.— В кн. : Современные проблемы теории функций : Материалы Всесоюз. школы по теории функций. Баку : Азерб. ун-т, 1980, с. 82—87.

Ин-т прикл. мат. и мех. АН УССР, г. Донецк Поступила 23.06.83