УДК 517.956.25

М. В. Борсук, канд. физ.-мат. наук (Львов. ун-т)

Поведение решений задачи Дирихле для квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка общего вида вблизи угловой точки

В ограниченной плоской области рассматривается задача Дирихле для равномерно эллиптического уравнения

$$a_{ij}(x, u, u_x) u_{x_i x_j} + a(x, u, u_x) = 0.$$

Предполагается, что на границе области имеется угловая точка (начало координат), а коэффициенты уравнения удовлетворяют минимальным условиям гладкости и согласованного (не выше квадратичного) роста по градиенту. Для гладкого решения доказано, что в окрестности угловой точки

$$u(x) = O(|x|^{\pi/\omega}), \quad \nabla u(x) = O(|x|^{\pi/\omega - 1}),$$

где ω — угол, под которым пересекаются две дуги границы области в начале координат.

В обмеженій плоскій області розглядається задача Діріхле для рівномірного еліптичного рівняння

$$a_{ij}(x, u, u_x) u_{x_i x_j} + a(x, u, u_x) = 0.$$

Припускається, що на границі області є кутова точка (початок координат), а коефіцієнти рівняння задовольняють мінімальним умовам гладкості та узгодженого (не вище квадратичного) зростання за градієнтом. Для гладкого розв'язку доведено, що в околі кутової точки

$$u(x) = O(|x|^{\pi/\omega}), \quad \nabla u(x) = O(|x|^{\pi/\omega - 1}),$$

де ω — кут, під яким перетинаються дві дуги границі області в початку координат.

В работе [1] установлены точные оценки скорости убывания решения и модуля его градиента задачи Дирихле для квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка дивергентного вида вблизи угловой точки на границе области. В данной работе мы докажем аналогичные оценки для случая недивергентных уравнений. Подобные оценки вблизи регулярной граничной точки впервые получены в [2] Ниренбергом (см. также [3],§ 6, гл. IX). В случае линейного уравнения в работе [4, с. 144] (теорема 3) дана оценка скорости убывания решения задачи Дирихле в окрестности граничной точки при весьма общих предположениях относительно структуры границы области. В случае квазилинейного уравнения отметим работу [5], в которой исследована разрешимость задачи Дирихле в пространстве Соболева $W^{2,q}$ ($q > 2$ и достаточно близко к 2).

Будем пользоваться общепринятыми обозначениями [1, 3, 6]: G — ограниченная плоская область с границей $\partial G = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, Γ_i — достаточно гладкие жордановы кривые, которые пересекаются под углом ω_0 в точке $P_0 \in \partial G$, которую примем за начало координат прямоугольной системы. Без ограничения общности будем считать, что при некотором малом $d > 0$

$$G_0^d = G \cap \{(r, \omega) \mid 0 < r < d;\ 0 < \omega < \omega_0\}$$

((r, ω) — полярные координаты точки $x = (x_1, x_2)$) есть сектор с вершиной в начале координат. Для любых чисел $d > a \geqslant 0$ обозначим

$$G_a^d = G \cap \{(r, \omega) \mid a < r < d;\ 0 < \omega < \omega_0\},$$

$$\Gamma_{1,a}^d = \{(r, 0) \mid a < r < d\}; \qquad \Gamma_{2,a}^d = \{(r, \omega_0) \mid a < r < d\},$$

$$\Gamma_a^d = \Gamma_{1,a}^d \cup \Gamma_{2,a}^d.$$

Кроме стандартных обозначений функциональных пространств и норм элементов в них, введем пространства: $W^{2,p}(G)$ — пространство функций

$u(x)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{W^{2,p}(G)} = \Big[\iint_G (|u_{xx}|^p + |\nabla u|^p + |u|^p)\,dx\Big]^{1/p}, \quad p \geqslant 1,$$

$\|u\|_{p,G}$ — норма в пространстве $L_p(G)$, $p \geqslant 1$; $W^k(G)$ — соболевское пространство, состоящее из всех суммируемых с квадратом по G функций, имеющих суммируемые с квадратом по G производные до порядка k включительно; $W_0^k(G)$ — подпространство пространства $W^k(G)$, плотным множеством в котором является совокупность всех бесконечно дифференцируемых функций с носителем в G; $V_{p,\alpha}^k(G)$ — пространство функций $u(x)$, для которых конечна норма

$$\|u\|_{V_{p,\alpha}^k(G)} = \Big[\iint_G \sum_{|\beta|=0}^{k} r^{p(\alpha/2-k+|\beta|)} |D^\beta u|^p\,dx\Big]^{1/p}, \quad p \geqslant 1.$$

Если $p = 2$, то будем обозначать $\overset{0}{W}{}_\alpha^k(G) \equiv V_{2,\alpha}^k(G)$, $k \geqslant 0$. Если $X^k(G)$ — одно из определенных выше пространств, то через $X^{k-1/p}(G)$ обозначим пространство граничных значений на ∂G с конечной нормой

$$\|\varphi\|_{X^{k-1/p}(\partial G)} = \inf \|\Phi\|_{X^k(G)},$$

где инфимум берется по всем $\Phi \in X^k(G)$ таким, что $\Phi(x) = \varphi(x)$, $x \in \partial G$.

В области G рассматриваем задачу Дирихле

$$a_{ij}(x, u, u_x)\,u_{x_ix_j} + a(x, u, u_x) = 0, \quad x \in G, \quad u(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial G, \qquad (1)$$

при следующих предположениях:

а) функции $a_{ij}(x, u, p)$ $(i, j = 1, 2)$; $a(x, u, p)$ определены для почти всех $x \in G$ и для всех $u \in R$, $p \in R^2$; они измеримы по $x \in G$ для всех $u \in R$, $p \in R^2$ и непрерывны по u, p для почти всех $x \in G$;

б) выполняется условие равномерной эллиптичности

$$\nu\xi^2 \leqslant a_{ij}(x, u, p)\,\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2, \quad \forall \xi \in R^2,$$
$$\forall x \in G, \quad u \in R, \quad p \in R^2; \quad \nu, \mu = \mathrm{const} > 0;$$

$a_{ij}(0, 0, 0) = \delta_i^j$; $i, j = 1;\ 2$ — символ Кронекера;

в) выполняется неравенство

$$|a(x, u, p)| \leqslant \mu_1 |p|^2 + b(x)|p| + f(x),$$
$$\mu_1 = \mathrm{const} \geqslant 0; \qquad 0 \leqslant f(x); \qquad b^2(x) \in L_2(G).$$

Определение. *Решением задачи* (1) *будем называть функцию* $u \in W^2(G)$, *удовлетворяющую уравнению задачи почти для всех* $x \in G$ *и граничному условию* $u(x) - \Phi(x) \in W_0^2(G)$ *с любой такой* $\Phi(x)$, *причем* $\Phi(x) = \varphi(x)$, $x \in \partial G$.

Основной результат работы заключается в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $u(x) \in W^2(G)$ — *решение задачи* (1), *выполнены предположения а)—в) и заданы значения величин*

$$M_0 = \max_{x\in\bar G} |u(x)|; \qquad M_1 = \operatorname{vrai}\max_{x\in G} |\nabla u(x)|. \qquad (2)$$

Пусть функции $a_{ij}(x, u, p)$ $(i, j = 1; 2)$ *непрерывны по Дини в точке* $(0, 0, 0)$; $f(x)$, $b^2(x) \in V_{p,\alpha}^0(G \setminus G_0^\varepsilon)$,

$$\varphi(x) \in C^{\pi/\omega_0}(\partial G) \cap \overset{0}{W}{}_0^{3/2}(\partial G) \cap V_{p,\alpha}^{2-1/p}(\partial G \setminus \Gamma_0^\varepsilon),$$
$$\forall \varepsilon > 0; \qquad p > 2; \qquad \alpha = 2(1 - \pi/\omega_0); \qquad 0 < \omega_0 < \pi,$$

и существуют числа k_1, $k_2 > 0$; $s > \pi/\omega_0$ *такие, что выполняются нера-*

венства
$$\| b^2 \|_{2,G_0^\rho} + \| f \|_{2,G_0^\rho} + \| \varphi \|_{\overset{0}{W}{}^{3/2}(\Gamma_0^\rho)} \leqslant k_1 \rho^{s-1}; \tag{3}$$
$$\| b^2 \|_{V^0_{p,\alpha}(G^\rho_{\rho/2})} + \| f \|_{V^0_{p,\alpha}(G^\rho_{\rho/2})} + \| \varphi \|_{V^{2-1/p}_{p,\alpha}(\Gamma^\rho_{\rho/2})} \leqslant k_2 \rho^{2/p-1}. \tag{4}$$

Тогда существует такое $d > 0$, *что справедливы следующие утверждения:*

1) $u \in \overset{0}{W}{}^2_2(G)$ *и выполняется оценка*
$$\| u \|_{\overset{0}{W}{}^2_2(G_0^\rho)} \leqslant c\rho^{\pi/\omega_0}; \qquad 0 < \rho < d; \tag{5}$$
$$2)\ | u(x) | \leqslant c_1 | x |^{\pi/\omega_0}, \quad x \in G_0^\rho; \qquad 0 < \rho < d; \tag{6}$$
$$| \nabla u(x) | \leqslant c_2 | x |^{\pi/\omega_0 - 1}, \quad x \in G_0^\rho, \quad 0 < \rho < d; \tag{7}$$

3) *если* $2 < p < 2/(2 - \pi/\omega_0)$, $\pi/2 < \omega_0 < \pi$, *то* $u(x) \in V^2_{p,0}(G)$ *и при этом*
$$\| u \|_{V^2_{p,0}(G_0^\rho)} \leqslant c_3 \rho^{\pi/\omega_0 - 2 + 2/p}, \quad 0 < \rho < d; \tag{8}$$

4) *если* $p \geqslant 2/(2 - \pi/\omega_0)$, $\pi/2 < \omega_0 < \pi$, *то* $u(x) \in C^{\pi/\omega_0}(\overline{G}{}_0^d)$.

Оценка Ниренберга. Слабая гладкость. Пусть Φ — какое-либо продолжение граничной функции φ внутрь области G. Замена функции $v = u - \Phi$ сводит неоднородную задачу (1) к однородной:
$$a_{ij}(x, v + \Phi, v_x + \Phi_x) v_{x_i x_j} = F(x, v, v_x), \quad x \in G, \quad v(x) = 0, \quad x \in \partial G, \tag{1_0}$$
причем в силу предположений б)—в) выполняется неравенство

г) $| F(x, v, p) | \leqslant 2\mu_1 (| p |^2 + | \nabla \Phi |^2) + f(x) + b(x)(| p | + | \nabla \Phi |) + 2\mu | \Phi_{xx} |$.

По определению решение задачи (1_0) $v(x) \in W_0^2(G)$ и удовлетворяет уравнению задачи почти всюду в G. По теореме вложения Соболева такое решение непрерывно по Гельдеру в $\overline{G}$ и, кроме того, как доказано в [6] (следствие 2.1 к теореме 2.1), существует $\gamma_0 \in]0; 1[$, зависящее от ν^{-1}, μ, ω_0 такое, что справедлива оценка
$$| v(x) | \leqslant c_0 | x |^{\gamma_0} \tag{9}$$
с положительной постоянной c_0, зависящей от ν^{-1}, μ, μ_1, ω_0.

Вначале распространяем метод Ниренберга [2] оценки постоянной Гельдера первых производных от решений задачи (1) на области, граница которых содержит угловую точку, и на уравнения с неограниченной правой частью.

Теорема 2 (*ср.* [2], *см. также* [3], § 6, *гл.* IX). *Пусть* $u \in W^2(G)$ — *решение задачи* (1), *выполнены предположения а)—в) и известны величины* (2). *Тогда существует постоянная* γ, *определяемая величинами* ν, μ, μ_1, ω_0, c_0, γ_0, d *и удовлетворяющая неравенству*
$$0 < \gamma < 2 \min\left(\gamma_0; \ \frac{\pi}{\omega_0} - 1\right) = \gamma^* \tag{10}$$
такая, что если $f(x)$, $b^2(x) \in \overset{0}{W}{}^0_{-\gamma^*}(G)$, $\varphi(x) \in C^1(\partial G) \cap \overset{0}{W}{}^{3/2}_{-\gamma^*}(\partial G)$, *то найдется такое* $d > 0$, *что* $u \in \overset{0}{W}{}^2_{-\gamma}(G_0^d)$ *и справедлива оценка*
$$\| u \|_{\overset{0}{W}{}^2_{-\gamma}(G_0^{\rho/2})} \leqslant c(d), \quad 0 < \rho < d. \tag{11}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения теоремы 2, кроме конечности величины* M_1. *Если* f, $b^2 \in L_2(G)$, $\varphi \in \overset{0}{W}{}^{3/2}_0(\partial G)$, *то найдется* *такое $d>0$, что*

$$\iint\limits_{G_0^{\rho/2}} u_{xx}^2 dx \leqslant c(\nu, \mu, \mu_1, M_0, c_0, \gamma_0, \omega_0)\Big\{\rho^{-2}\iint\limits_{G_0^\rho} |\nabla u|^2 dx + \|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}^{3/2}_0(\Gamma_0^\rho)} +$$

$$+\iint\limits_{G_0^\rho}(b^4(x)+f^2(x))\,dx\Big\}, \quad 0<\rho<d. \tag{12}$$

Полученная в теореме 2 весовая L_2-оценка (11) вторых производных решения (мы ее называем оценкой Ниренберга) и теоремы вложения Соболева позволяют оценить [1] максимум модуля решения и его градиента, и тем самым установить степенную (пока с некоторым малым положительным показателем) скорость убывания решения в окрестности угловой точки.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и $\gamma>0$ — число, определяемое этой теоремой. Пусть, кроме того,*

$$f(x),\ b^2(x)\in V^0_{p,-\gamma}(G); \qquad \varphi(x)\in C^1(\partial G)\cap V^{2-1/p}_{p,-\gamma}(\partial G), \quad p>2,$$

и выполнено неравенство

$$\|f\|_{V^0_{p,-\gamma}(G^\rho_{\rho/2})}+\|b^2\|_{V^0_{p,-\gamma}(G^\rho_{\rho/2})}+\|\varphi\|_{V^{2-1/p}_{p,-\gamma}(\Gamma^\rho_{\rho/2})}\leqslant k_1\rho^{2/p-1}. \tag{13}$$

Тогда справедливы оценки

$$|v(x)|\leqslant c_1|x|^{1+\gamma/2}; \qquad |\nabla v(x)|\leqslant c_2|x|^{\gamma/2}; \qquad |x|<d. \tag{14}$$

Интегральная весовая оценка. На основе слабой гладкости решения, установленной в теореме 4, уточняем оценку Ниренберга и получаем весовую интегральную оценку с наилучшим весовым показателем. При этом, если для оценки Ниренберга достаточно было ограниченности старших коэффициентов уравнения, то улучшение этой оценки достигается за счет непрерывности этих коэффициентов.

Теорема 5. *Пусть $u\in W^2(G)$ — решение задачи (1) и выполнены условия теоремы 4. Пусть функции $a_{ij}(x,u,p)$ $(i,j=1,2)$ непрерывны в точке $(0,0,0)$. Если $b^2(x),\ f(x)\in \overset{0}{W}{}^0_\alpha(G)$, $\varphi(x)\in\overset{0}{W}{}^{3/2}_\alpha(\partial G)$, причем*

$$2-2\pi/\omega_0<\alpha\leqslant 2, \tag{15}$$

то $u(x)\in\overset{0}{W}{}^2_\alpha(G)$ и справедлива оценка

$$\|u\|_{\overset{0}{W}{}^2_\alpha(G)}\leqslant c(\|u\|_{2,G}+\|f\|_{\overset{0}{W}{}^0_\alpha(G)}+\|b^2\|_{\overset{0}{W}{}^0_\alpha(G)}+\|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}^{3/2}_\alpha(\partial G)}). \tag{16}$$

Доказательство. Определим функцию $r_\varepsilon(x)$ следующим образом. Пусть $\vec{l}=\{l_1,l_2\}=\{0;-1\}$ — единичный радиус-вектор, $\vec{r}$ — радиус-вектор точки $x\in G$. Пусть $d>0$ столь мало, что $G_0^d\subset\{x_2>0\}$ (это возможно, так как $0<\omega_0<\pi$). Тогда для $\forall\varepsilon>0$ вектор $\varepsilon\vec{l}\not\subset G_0^d$. Положим

$$r_\varepsilon(x)=|\vec{r}-\varepsilon\vec{l}|\neq 0, \quad \forall\varepsilon>0.$$

Отметим следующие свойства функции $r_\varepsilon(x)$:

1) $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} r_\varepsilon(x)=r$;

2) $r_\varepsilon\geqslant r \quad \forall\varepsilon>0, \quad x\in\overline{G_0^d}$;

3) $\varepsilon<r_\varepsilon<d+\varepsilon \quad \forall x\in\overline{G_0^d}, \quad \forall\varepsilon>0$;

4) $r_\varepsilon>d-\varepsilon, \quad x\in G\setminus G_0^d, \quad \forall\varepsilon>0$.

Умножим обе части уравнения (1_0) на $r_\varepsilon^{\alpha-2}v(x)$ и проинтегрируем по области G. Используя условие б) и формулу интегрирования по частям,

$$\iint_G r_\varepsilon^{\alpha-2} |\nabla v|^2 dx = \left(\frac{2-\alpha}{2}\right)^2 \iint_G r_\varepsilon^{\alpha-4} v^2 dx + \iint_G \{[a_{ij}(x, u, u_x) -$$

$$- a_{ij}(0, 0, 0)] v_{x_i x_j} - F(x, v, v_x)\} r_\varepsilon^{\alpha-2} v(x)\, dx. \qquad (17)$$

Разбивая область G на подобласти G_0^d и $G \setminus G_0^d$, оцениваем интегралы в (17) в каждой из подобластей разбиения на основании условий а), б), г) с использованием неравенства Коши $\forall \delta > 0$ и неравенств Харди и Виртингера [7] (теоремы 257, 330). При этом в силу предполагаемой непрерывности $a_{ij}(x, u, p)$ в точке $(0, 0, 0)$ имеем: для любого $\delta > 0$ существует $d_0(\delta) > 0$ такое, что

$$\left(\sum_{i,j=1}^{2} |a_{ij}(x, u, p) - a_{ij}(0, 0, 0)|^2 \right)^{1/2} < \delta,$$

если $|x| + |u(x)| + |p| < d_0$.

Предполагаемая теоремой 4 гладкость граничной функции $\varphi(x)$ позволяет заключить, что $\varphi(0) = |\nabla \Phi(0)| = 0$. Отсюда и в силу оценок (14) теоремы 4 $\forall x \in G_0^d$ имеем

$$|x| + |u(x)| + |\nabla u(x)| \leqslant |x| + |v(x)| + |\nabla v(x)| + |\Phi(x) - \varphi(0)| +$$

$$+ |\nabla \Phi(x) - \nabla \Phi(0)| \leqslant d + c_1 d^{1+\gamma/2} + c_2 d^{\gamma/2} + \frac{1}{2} d_0.$$

Для оценки интегралов, содержащих вторые производные, применяем известный метод С. Н. Бернштейна [3, § 19 гл. III]. Справедливы следующие леммы.

Лемма 1 (*ср. с леммой* 19.1 *гл.* III [3]). *Для любой* $v \in \overset{\circ}{W}{}_0^2(G)$ *выполняется неравенство*

$$\iint_G r^2 r_\varepsilon^{\alpha-2} (v_{x_1x_2}^2 - v_{x_1x_1} v_{x_2x_2})\, dx_1 dx_2 \leqslant \sigma \iint_{G_0^d} r^2 r_\varepsilon^{\alpha-2} v_{xx}^2 dx +$$

$$+ \frac{1 + (2-\alpha)^2}{2\sigma} \iint_{G_0^d} r_\varepsilon^{\alpha-2} |\nabla v|^2 dx + c(\alpha, d, \sigma, \operatorname{diam} G, \operatorname{mes} G) \iint_{G \setminus G_0^d} (v^2 + v_{xx}^2) dx,$$

$$\forall \sigma, \quad \varepsilon > 0; \qquad \forall \alpha.$$

Лемма 2. *Для любой* $v \in W_0^2(G)$ *выполняется неравенство*

$$\iint_G r^2 r_\varepsilon^{\alpha-2} |\nabla v|^4 dx \leqslant 4 (\max_{G_0^d} |v|)^2 \iint_{G_0^d} [r^2 r_\varepsilon^{\alpha-2} v_{xx}^2 + (2 + (\alpha-2)^2) r_\varepsilon^{\alpha-2} |\nabla v|^2] dx +$$

$$+ c(\alpha, d) (\max_G |v|)^2 \iint_{G \setminus G_0^d} (|\nabla v|^2 + v_{xx}^2)\, dx, \quad \forall \alpha, \ \varepsilon > 0.$$

Лемма 3. *В условиях теоремы* 5 *справедлива оценка*

$$\iint_{G \setminus G_0^d} v_{xx}^2 dx \leqslant c(\nu^{-1}, \mu, \mu_1, c_0, \gamma_0) \iint_{G \setminus G_0^{d/2}} (v^2 + b^4 + f^2 + \Phi_{xx}^2 + |\nabla \Phi|^2 + \Phi^2) dx;$$

$$d > 0.$$

Из равенства (17) на основании лемм 1—3, неравенства Харди—Виртингера в форме [8]

$$\iint_{G_0^d} r_\varepsilon^{\alpha-4} v^2 dx \leqslant \left[\left(\frac{2-\alpha}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{\omega_0^2} \right]^{-1} \iint_{G_0^d} r_\varepsilon^{\alpha-2} |\nabla v|^2 dx, \quad \alpha \leqslant 2;$$

$$\forall v \in W^1(G_0^d) \,|\, v(x) = 0, \quad x \in \Gamma_0^d, \qquad (18)$$

условий г) и (15) при подходящем выборе величин d, σ по теореме Фату обосновывается возможность предельного перехода по $\varepsilon \to +0$ и справедливость оценки (16).

Доказательство теоремы 1. Принадлежность $u(x)$ пространству $\overset{0}{W}{}_2^2(G)$ следует из теоремы 5 при $\alpha = 2$, так что для доказательства утверждения 1 теоремы требуется доказать оценку (5). Для этого умножим обе части уравнения (1_0) на $v(x)$ и проинтегрируем по области G_0^ρ, $0 < \rho < d$. Обозначая $\mathrm{v}(\rho) = \iint\limits_{G_0^\rho} |\nabla v|^2 dx$, получаем

$$\mathrm{v}(\rho) = \rho \int\limits_0^{\omega_0} v \frac{\partial v}{\partial r} d\omega + \iint\limits_{G_0^\rho} v(x)\{[a_{ij}(x, u, u_x) - a_{ij}(0, 0, 0)]\, v_{x_i x_j} - F(x, v, v_x)\}\, dx. \tag{19}$$

Для первого интеграла справа справедливо неравенство (13) [1]

$$\rho \int\limits_0^{\omega_0} v \frac{\partial v}{\partial r} d\omega \leqslant \frac{\rho\omega_0}{2\pi} \mathrm{v}'(\rho). \tag{20}$$

Условие (4) теоремы обеспечивает выполнение неравенства (13) и, следовательно, справедливость оценок (14) теоремы 4. На основании этих оценок, а также предполагаемой непрерывности по Дини функций $a_{ij}(x, u, p)$ в точке (0, 0, 0) и гладкости граничной функции $\varphi(x)$ нетрудно установить существование положительной монотонно возрастающей непрерывной на $[0, d]$ функции $\delta(\rho)$, удовлетворяющей в нуле условию Дини, такой, что выполняется неравенство

$$\Big(\sum_{i,j=1}^{2} |a_{ij}(x, u(x), u_x(x)) - a_{ij}(0, 0, 0)|^2\Big)^{1/2} \leqslant \delta(\rho), \quad |x| < \rho.$$

Поэтому, оценивая остальные интегралы справа в (19) по неравенству Коши с учетом гельдеровости $v(x)$ и условия г), окончательно получаем, что $\mathrm{v}(\rho)$ является решением дифференциального неравенства

$$\mathrm{v}(\rho) \leqslant \frac{\rho\omega_0}{2\pi} \mathrm{v}'(\rho) + \psi(\rho)\mathrm{v}(\rho) + c\delta(\rho)\mathrm{v}(2\rho) + k\rho^{2s-\varepsilon}, \quad 0 < \rho < d,$$

$$\mathrm{v}(d) = \mathrm{v}_0 \leqslant M_1^2 \operatorname{mes} G. \tag{21}$$

Здесь c, k, v_0 — положительные числа, $s > \pi/\omega_0$; $0 < \varepsilon < 2(s - \pi/\omega_0)$, $\psi(\rho)$, $\delta(\rho)$ — положительные монотонно возрастающие непрерывные на $[0, d]$ функции, удовлетворяющие условию Дини в нуле.

Лемма 4. *Пусть* $\mathrm{v}(\rho) \in C^1([0, 2d])$ — *решение дифференциального неравенства* (21). *Тогда существует постоянная* $C > 0$, *зависящая от* $\max\limits_{d \leqslant r \leqslant 2d} |v(r)|$, $\int\limits_0^d \frac{\psi(t)}{t} dt$, $\int\limits_0^d \frac{\delta(t)}{t} dt$, k, v_0, s, d, ε, *такая, что*

$$\mathrm{v}(\rho) \leqslant C\rho^{2\pi/\omega_0}, \quad 0 < \rho < d. \tag{22}$$

Из оценок (12) и (22) следует искомая оценка (5). Оценка (6) максимума модуля решения задачи выводится теперь аналогично [1, 8]. Остальные утверждения теоремы 1 доказываются методом колец Кондратьева с использованием L_p-оценок для решения эллиптического уравнения внутри области и вблизи гладкого куска границы и теорем вложения Соболева [1, 8].

Примеры. Приведем пример линейного уравнения, показывающий, что условие Дини на модуль непрерывности старших коэффициентов уравнения в точке P_0 является существенным для справедливости утверждений теоремы 1. Функция

$$u(r,\ \omega) = r^{\lambda}\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}} \sin\lambda\omega; \qquad \lambda = \frac{\pi}{\omega_0},\quad 0<\omega_0<\pi,$$

в угле G_0^{∞} удовлетворяет уравнению $a_{ij}(x_1, x_2)\,u_{x_ix_j} = 0$,

$$a_{ij}(x_1, x_2) = \begin{cases} \delta_i^j - \dfrac{2}{\lambda+1}\dfrac{\delta_i^j r^2 - x_i x_j}{r^2}, & r>0,\\ \delta_i^j, \quad r=0, \end{cases}$$

$(i, j = 1, 2)$ и граничному условию $u(r, 0) = u(r, \omega_0) = 0$. В области G_0^d, $d<e^{-2}$ уравнение равномерно эллиптично с постоянными эллиптичности $\nu = 1 - 2/\ln\dfrac{1}{d}$; $\mu = 1$. Кроме того, $\mu_1 = 0$, $b(x) = \varphi(x) = f(x) \equiv \equiv 0$; $\delta(r) = 2/(\lambda+1)\ln\dfrac{1}{r}$ и, следовательно, $\displaystyle\int_0^d \frac{\delta(r)}{r}\,dr = +\infty$, т. е. старшие коэффициенты уравнения не непрерывны по Дини в нуле (вместе с тем, они непрерывны в точке P_0). Из явного вида функции $u(x)$ имеем

$$|u(x)| \leqslant c\,|x|^{\lambda-\varepsilon}; \qquad \|u\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(G_0^{\rho})} \leqslant c\rho^{\lambda-\varepsilon} \quad \forall\varepsilon>0. \tag{23}$$

Этот пример показывает, что в оценках (23) заменить $\lambda - \varepsilon$ на $\lambda = \pi/\omega_0$ невозможно без дополнительного предположения о модуле непрерывности старших коэффициентов уравнения в точке P_0: он должен удовлетворять условию Дини. В оценках (5)—(8) теоремы 1 показатель π/ω_0 нельзя и увеличить, как показывают частные решения уравнения Лапласа в области с угловой точкой P_0. В этом смысле оценки теоремы 1 являются *неулучшаемыми*.

Функция $u(r, \omega) = r^{\lambda}\ln\dfrac{1}{r}\sin\lambda\omega$; $\lambda = \dfrac{\pi}{\omega_0}$, $0<\omega_0<\pi$, является решением в угле G_0^{∞} задачи

$$\Delta u = f(x) \equiv -2\lambda r^{\lambda-2}\sin\lambda\omega, \qquad u(r, 0) = u(r, \omega_0) = 0.$$

Для нее выполнены все условия теоремы 1, кроме (3), которое здесь выполняется при $s = \pi/\omega_0$. Этот пример показывает, что для справедливости утверждений теоремы 1 условие $s > \pi/\omega_0$ также существенно.

1. *Кондратьев В. А., Борсук М. В.* Поведение решений задачи Дирихле для квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка вблизи угловой точки // Дифференц. уравнения.— 1988.— 24, № 10.— С. 1778—1784.
2. *Ниренберг Л.* Нелинейные эллиптические дифференциальные уравнения в частных производных и непрерывность по Гельдеру // Сб. переводов : Математика.— М. : Изд-во иностр. лит., 1959.— 3 : 3.— С. 9—55.
3. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.— М. : Наука, 1973.— 576 с.
4. *Кондратьев В. А., Копачек И., Олейник О. А.* О поведении обобщенных решений эллиптических уравнений второго порядка и системы теории упругости в окрестности граничной точки // Тр. семинаров Петровского.— 1982.— 8.— С. 135—152.
5. *Данилюк И. И.* Задача Дирихле для двумерного квазилинейного дифференциального уравнения эллиптического типа // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1987.— № 12.— С. 3—7.
6. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Обзор результатов по разрешимости краевых задач для равномерно эллиптических и параболических квазилинейных уравнений второго порядка, имеющих неограниченные особенности // Успехи мат. наук.— 1986.— 41, № 5.— С. 59—83.
7. *Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства.— М. : Изд-во иностр. лит., 1948.— 456 с.
8. *Борсук М. В.* Поведение обобщенных решений задачи Дирихле для квазилинейных эллиптических дивергентных уравнений второго порядка вблизи конической точки // Сиб. мат. журн.— 1990.— 31, № 6.— С. 25—38.

Получено 09.10.91