УДК 517.5

А. С. Сердюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИМИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ПОЛІНОМАМИ У МЕТРИЦІ ПРОСТОРУ L

We establish asymptotic equalities for upper bounds of approximations by interpolational trigonometric polynomials in a metric of the space L on classes of convolutions of periodic functions that admit a regular extension in a fixed strip of the complex plane.

Встановлено асимптотичні рівності для верхніх меж наближень інтерполяційними тригонометричними поліномами у метриці простору L на класах згорток періодичних функцій, що допускають регулярне продовження у фіксовану смугу комплексної площини.

Нехай L — простір 2π-періодичних сумовних функцій $\varphi(\cdot)$ із стандартною нормою $\|\varphi\|_L = \|\varphi\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x)|\,dx$.

Через $C^{\psi}_{\beta,1}$ будемо позначати введені О. І. Степанцем [1] класи неперервних 2π-періодичних функцій f, що допускають зображення у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Psi_\beta(x-t)\varphi(t)\,dt,$$

де $a_0 \in R$, $\varphi \in U_1^0 \overset{\mathrm{df}}{=} \{\varphi \in L : \|\varphi\|_1 \le 1,\ \varphi \perp 1\}$, а $\Psi_\beta(t)$ — фіксовані сумовні ядра із рядом Фур'є вигляду

$$S[\Psi_\beta(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad \beta \in R, \quad \psi(k) > 0.$$

У даній роботі будемо вимагати, щоб коефіцієнти $\psi(k)$ ядра Ψ_β задовольняли умову $\mathfrak{D}_q$, $0 \le q < 1$ $(\psi \in \mathfrak{D}_q)$:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q.$$

У цьому випадку, як відомо (див., наприклад, [1, с. 32]), множини $C^{\psi}_{\beta,1}$ складаються із 2π-періодичних функцій $f(x)$, що допускають регулярне продовження у смугу $|\operatorname{Im} z| \le \ln 1/q$ комплексної площини.

Якщо $f(x)$ — довільна 2π-періодична функція $(f \in C)$, позначимо через $\tilde{S}_n(f, x)$ тригонометричний поліном порядку n, $n \in N$, що інтерполює $f(x)$ по рівномірно розподіленій системі вузлів $x_k^{(n)} = 2k\pi/(2n+1)$, $k \in Z$. Відомо [2, с. 10], що поліном $\tilde{S}_n(f, x)$ можна подати у вигляді

$$\tilde{S}_n(f, x) = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} f\left(x_k^{(n)}\right) D_n\left(x - x_k^{(n)}\right),$$

де

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos ku = \frac{\sin(n+1/2)u}{2\sin(u/2)}$$

— ядро Діріхле порядку n.

У даній роботі при довільних $\beta \in R$ і $\psi \in \mathfrak{D}_q$, $0 < q < 1$, встановлюються асимптотичні рівності для величин

$$\bar{\mathcal{E}}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_1 = \sup_{f \in C^{\psi}_{\beta,1}} \| f(\cdot) - \bar{S}_{n-1}(f, \cdot)\|_1.$$

Теорема 1. *Нехай $\psi \in \mathfrak{D}_q$, $0 < q < 1$, $\beta \in R$. Тоді при $n \to \infty$ має місце асимптотична рівність*

$$\bar{\mathcal{E}}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_1 = \frac{8}{\pi^2}\psi(n)A_q + O(1)\psi(n)\left(\frac{q}{n(1-q)} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right), \tag{1}$$

де

$$A_q = \frac{1}{\sqrt{q}}\ln\frac{1+\sqrt{q}}{1-\sqrt{q}}, \qquad \varepsilon_n = \sup_{k \ge n}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right|, \tag{2}$$

а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по n, q, β і ψ.

Доведення. В силу леми 1 роботи [3]

$$\bar{\rho}_n(f;x) = f(x) - \bar{S}_{n-1}(f;x) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\sin\frac{2n-1}{2}x \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t+x) \sum_{\nu=n}^{\infty} \psi(\nu)(\cos(\nu t + \gamma_n(x)) + r_n(t))dt \quad \forall x \in R, \tag{3}$$

де

$$\gamma_n(x) = \gamma_n(\beta, x) = \frac{(2n-1)x + \pi(\beta-1)}{2},$$

$$r_n(t) = r_n(\beta, x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty} \psi(\nu)\sin\left(\nu t + \left(k+\frac{1}{2}\right)(2n-1)x + \frac{\beta\pi}{2}\right). \tag{4}$$

Оскільки $\psi \in \mathfrak{D}_q$, $0 < q < 1$, то в силу формули (21) роботи [3]

$$|r_n(t)| \le \frac{\psi(n)}{1 - q - \varepsilon_{3n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} (q+\varepsilon_n)^{(2n-1)k} =$$

$$= \frac{\psi(n)(q+\varepsilon_n)^{2n-1}}{(1-q-\varepsilon_{3n-1})\left(1-(q+\varepsilon_n)^{2n-1}\right)} = o(1)\frac{q\psi(n)}{(1-q)n} \quad \forall x, t \in R. \tag{5}$$

Таким чином, в силу (3) і (5)

$$\|\bar{\rho}_n(f;x)\|_1 = \left\|\frac{2}{\pi}\sin\frac{2n-1}{2}x \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) H_n(t,x)dt\right\|_1 + o(1)\frac{q\psi(n)}{(1-q)n}, \tag{6}$$

де

$$H_n(t,x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{\nu=n}^{\infty} \psi(\nu)\cos(\nu(t-x) + \gamma_n(x)).$$

Розглянемо простір L_∞ 2π-періодичних вимірних і суттєво обмежених функцій $g = g(t)$ із нормою $\|g\|_{L_\infty} = \|g\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_t |g(t)|$. Переходячи до верхніх меж по класу $C^{\psi}_{\beta,1}$ в обох частинах рівності (6), одержуємо

$$\bar{\mathscr{E}}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_1 = \sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,1}} \|\bar\rho_n(f;x)\|_1 =$$

$$= \frac{2}{\pi}\sup_{\varphi\in U_1^0}\sup_{\|g\|_\infty\le 1}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin\frac{2n-1}{2}x\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)H_n(t,x)\,dt\,dx + o(1)\frac{q\psi(n)}{(1-q)n} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\sup_{\|g\|_\infty\le 1}\sup_{\varphi\in U_1^0}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin\frac{2n-1}{2}xH_n(t,x)\,dx\,dt + o(1)\frac{q\psi(n)}{(1-q)n}. \qquad (7)$$

У роботі [4] для величин

$$\mathfrak{C}_n \overset{\text{df}}{=} \frac{2}{\pi}\sup_{\|g\|_\infty\le 1}\sup_{\varphi\in U_1^0}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin\frac{2n-1}{2}xH_n(t,x)\,dx\,dt$$

знайдено такі нерівності:

$$\frac{1}{\pi}\max_t\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\left(2H_n(t,x)-\left(H_n\left(t+\frac{\pi}{n},x\right)+H_n(t,x)\right)\right)\right|dx \le$$

$$\le \mathfrak{C}_n \le \frac{2}{\pi}\max_t\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin\frac{2n-1}{2}xH_n(t,x)\right|dx \qquad (8)$$

(див. співвідношення (11) і (12) вказаної роботи). Подальший наш крок полягає у доведенні оцінки

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|H_n\left(t+\frac{\pi}{n},x\right)+H_n(t,x)\right|dx = O(1)\psi(n)\left(\frac{q}{(1-q)n}+\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right), \qquad (9)$$

у якій $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно параметрів n, t, β, q і ψ.

Згідно з лемою 1 роботи [5, с. 379]

$$H_n(t,x) = \sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\cos(k(t-x)+\gamma_n(x)) =$$

$$= \psi(n)\left(q^{-n}\sum_{k=n}^{\infty}q^k\cos(k(t-x)+\gamma_n(x)) + O(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right), \qquad (10)$$

тому, використовуючи рівність

$$\sum_{k=n}^{\infty}q^k\cos\left(ku+\frac{\theta\pi}{2}\right) = q^n\left(g(u)\cos\left(nu+\frac{\theta\pi}{2}\right)-h(u)\cos\left(nu+\frac{\theta\pi}{2}\right)\right), \quad u,\theta\in R, \qquad (11)$$

у якій

$$g(u) = \sum_{k=0}^{\infty}q^k\cos ku = \frac{1-q\cos u}{1-2q\cos u+q^2}, \qquad (12)$$

$$h(u) = \sum_{k=1}^{\infty}q^k\sin ku = \frac{q\sin u}{1-2q\cos u+q^2}, \qquad (12')$$

одержуємо

$$H_n\left(t+\frac{\pi}{n}, x\right)+H_n(t, x) = \psi(n)\left(q^{-n}\left\{\sum_{k=n}^{\infty} q^k \cos(k(t-x)+\gamma_n(x)) +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{k=n}^{\infty} q^k \cos\left(k\left(t+\frac{\pi}{n}-x\right)+\gamma_n(x)\right)\right\}+O(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right) =$$

$$= \psi(n)\left(\left(g(t-x)-g\left(t+\frac{\pi}{n}-x\right)\right)\cos(n(t-x)+\gamma_n(x)) -\right.$$

$$\left.-\left(h(t-x)-h\left(t+\frac{\pi}{n}-x\right)\right)\sin(n(t-x)+\gamma_n(x)) + O(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right). \tag{13}$$

Оскільки

$$\bigvee_{-\pi}^{\pi}(g) = \frac{4q}{(1+q)(1-q)} \le \frac{4q}{1-q}, \tag{14}$$

$$\bigvee_{-\pi}^{\pi}(h) \le \frac{4q}{1-q}, \tag{15}$$

то з формули (13) випливає

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|H_n\left(t+\frac{\pi}{n}, x\right)+H_n(t, x)\right|dx =$$

$$= \psi(n)\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|\Delta_{\pi/n}g(x)\cos(nx+\gamma_n(t-x))+\Delta_{\pi/n}h(x)\sin(nx+\gamma_n(t-x))\right|dx +\right.$$

$$\left.+O(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right) = \psi(n)\left(\sum_{k=-n+1}^{n}\int_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n}\left|\Delta_{\pi/n}g(x)\cos(nx+\gamma_n(t-x))+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\Delta_{\pi/n}h(x)\sin(nx+\gamma_n(t-x))\right|dx + O(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right) =$$

$$= O(1)\psi(n)\left(\sum_{k=-n+1}^{n}\frac{\bigvee_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n}(g)+\bigvee_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n}(h)}{n}+\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right) =$$

$$= O(1)\psi(n)\left(\frac{\bigvee_{-\pi}^{\pi}(g)+\bigvee_{-\pi}^{\pi}(h)}{n}+\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right) = O(1)\psi(n)\left(\frac{q}{(1-q)n}+\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right),$$

де

$$\Delta_{\pi/n}g(x) = g\left(x+\frac{\pi}{n}\right)-g(x), \qquad \Delta_{\pi/n}h(x) = h\left(x+\frac{\pi}{n}\right)-h(x).$$

Оцінку (9) доведено.

Співставляючи формули (7) – (9), одержуємо рівність

$$\bar{\mathscr{E}}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_1 = \frac{2}{\pi}\max_t\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin\frac{2n-1}{2}xH_n(t, x)\right|dx + O(1)\psi(n)\left(\frac{q}{n(1-q)}+\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right). \tag{16}$$

В силу (10) і (11)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin\frac{2n-1}{2}xH_n(t,x)\right|dx =$$

$$= \psi(n)\left(q^{-n}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\sum_{k=n}^{\infty}q^k\cos(k(t-x)+\gamma_n(x))\right|dx + O(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right) =$$

$$= \psi(n)\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin\left(\frac{2n-1}{2}(t-x)\right)(g(x)\cos(nx+\gamma_n(t-x))-h(x)\sin(nx+\gamma_n(t-x)))\right|dx + \right.$$

$$\left. + O(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right), \tag{17}$$

де функції $g(x)$ і $h(x)$ означені формулами (12) і (12′) відповідно.

Крім того, як неважко перевірити,

$$g(x)\cos(nx+\gamma_n(t-x))-h(x)\sin(nx+\gamma_n(t-x)) =$$

$$= \frac{1}{1-2q\cos x+q^2}\cos(nx+\gamma_n(t-x))-q\cos((n-1)x+\gamma_n(t-x)) =$$

$$= Z_q(x)\left(\sin\left(\frac{x}{2}+\left(n-\frac{1}{2}\right)t+\frac{\beta\pi}{2}\right) - q\sin\left(-\frac{x}{2}+\left(n-\frac{1}{2}\right)t+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right), \tag{18}$$

де

$$Z_q(x) \overset{\text{df}}{=} \frac{1}{1-2q\cos x+q^2}. \tag{19}$$

Позначаючи інтеграл, що знаходиться у правій частині формули (17), через $I_n(t)$ і покладаючи

$$\Phi_{q,n,\beta}(t,x) \overset{\text{df}}{=} Z_q(x)\left(\sin\left(\frac{x}{2}+\left(n-\frac{1}{2}\right)t+\frac{\beta\pi}{2}\right) + q\sin\left(\frac{x}{2}-\left(n-\frac{1}{2}\right)t-\frac{\beta\pi}{2}\right)\right), \tag{20}$$

із (18) – (20) одержуємо

$$I_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin\frac{2n-1}{2}(t-x)\Phi_{q,n,\beta}(t,x)\right|dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin n(t-x)\cos\frac{t-x}{2}\Phi_{q,n,\beta}(t,x)-\cos n(t-x)\sin\frac{t-x}{2}\Phi_{q,n,\beta}(t,x)\right|dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}|\sin n(t-x)P(t,x)-\cos n(t-x)Q(t,x)|dx, \tag{21}$$

де

$$P(t,x) = P_{q,n,\beta}(t,x) \overset{\text{df}}{=} \cos\frac{t-x}{2}\Phi_{q,n,\beta}(t,x), \tag{22}$$

$$Q(t,x) = Q_{q,n,\beta}(t,x) \overset{\text{df}}{=} \sin\frac{t-x}{2}\Phi_{q,n,\beta}(t,x). \tag{22′}$$

Далі нам буде потрібний результат, що є деякою видозміною відомої леми Фейєра [6], здійсненою С. Б. Стечкіним у [7].

Лема 1. *Нехай функції* $g(x)$ *і* $h(x)$ *мають період* 2π, $g, h \in V[-\pi, \pi]$, $\alpha \in R$ *і*

$$\varphi(x) = g(x)\cos(nx+\alpha) + h(x)\sin(nx+\alpha).$$

Тоді

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x)|dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{g^2(x)+h^2(x)}\,dx + O(1)\frac{\bigvee_{-\pi}^{\pi}(g)+\bigvee_{-\pi}^{\pi}(h)}{n}.$$

До правої частини формули (21) застосуємо лему 1, поклавши $g(x) = -Q(t,x)$, $h(x) = P(t,x)$, $\alpha = -nt$.

В результаті одержимо

$$I_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{P^2(x)+Q^2(x)}\,dx + O(1)\frac{\bigvee_{-\pi}^{\pi}(P(t,\cdot))+\bigvee_{-\pi}^{\pi}(Q(t,\cdot))}{n} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\Phi_{q,n,\beta}(t,x)\right|dx + O(1)\frac{\bigvee_{-\pi}^{\pi}\left(\Phi_{q,n,\beta}(t,\cdot)\right)}{n}. \tag{23}$$

Враховуючи (18) – (20), а також (14) і (15), маємо

$$\frac{\bigvee_{-\pi}^{\pi}\left(\Phi_{q,n,\beta}(t,\cdot)\right)}{n} = O(1)\frac{\bigvee_{-\pi}^{\pi}(g)+\bigvee_{-\pi}^{\pi}(h)}{n} = O(1)\frac{q}{(1-q)n}. \tag{24}$$

Таким чином, із (23), (24) випливають рівності

$$I_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left|\sin\left(\frac{x}{2}+\theta\right)+q\sin\left(\frac{x}{2}-\theta\right)\right|}{1-2q\cos x+q^2}dx + O(1)\frac{q}{(1-q)n} = \frac{4}{\pi}\mathcal{J}(\theta) + O(1)\frac{q}{(1-q)n}, \tag{25}$$

де

$$\mathcal{J}(\theta) \stackrel{\text{df}}{=} \int_0^{\pi}\frac{|\sin(u+\theta)+q\sin(u-\theta)|}{(1+q)^2-4q\cos^2 u}du,$$

$$\theta = \theta(n,\beta,t) \stackrel{\text{df}}{=} \left(n-\frac{1}{2}\right)t + \frac{\beta\pi}{2}.$$

У роботі [8, с. 248 – 249] показано, що для довільного $\theta \in [0, \pi/2]$

$$\mathcal{J}(\theta) = \frac{2}{\sqrt{q}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{k+1/2}}{2k+1}\cos((2k+1)u_0+\theta), \tag{26}$$

де

$$u_0 = -\operatorname{arctg}\frac{1-q}{1+q}\operatorname{tg}\theta, \qquad u_0 \in [-\pi/2, 0].$$

Оскільки $\mathcal{J}(\pi-\theta) = \mathcal{J}(\theta)$ і функція $\mathcal{J}(\theta)$ періодична з періодом π, то, виходячи із (26), неважко збагнути, що

$$\max_{\theta} \mathcal{J}(\theta) = \mathcal{J}(0) = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{2k+1} = \frac{2}{\sqrt{q}}\operatorname{Arth}\sqrt{q} = \frac{1}{\sqrt{q}}\ln\frac{1+\sqrt{q}}{1-\sqrt{q}} = A_q. \quad (27)$$

Співставляючи формули (16), (17), (25) і (27), одержуємо

$$\bar{\mathcal{E}}_n\left(C^{\psi}_{\beta,1}\right)_1 = \psi(n)\left(\frac{2}{\pi}\max_t I_n(t) + O(1)\left(\frac{q}{(1-q)n} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right) =$$

$$= \psi(n)\left(\frac{8}{\pi^2}\max_{\theta}\mathcal{J}(\theta) + O(1)\left(\frac{q}{(1-q)n} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right) =$$

$$= \psi(n)\left(\frac{8}{\pi^2}A_q + O(1)\left(\frac{q}{(1-q)n} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right).$$

Теорему доведено.

Важливим прикладом ядер, коефіцієнти $\psi(k)$ яких задовольняють умову $\mathcal{D}_q$, $0 < q < 1$, є ядра Пуассона

$$P_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad q \in (0,1), \quad \beta \in R.$$

Класи $C^{\psi}_{\beta,1}$ у випадку, коли $\psi(k) = q^k$, будемо позначати через $C^{q}_{\beta,1}$. Із теореми 1 випливає таке твердження.

Наслідок 1. *Нехай $0 < q < 1$, $\beta \in R$. Тоді має місце асимптотична рівність*

$$\bar{\mathcal{E}}_n\left(C^{q}_{\beta,1}\right)_1 = q^n\left(\frac{8}{\pi^2}A_q + O(1)\frac{q}{(1-q)n}\right), \quad (28)$$

у якій A_q означено у (2), а величина $O(1)$ рівномірно обмежена відносно параметрів n, q і β.

Формула (28) уточнює залишковий член асимптотичного розкладу величини $\bar{\mathcal{E}}_n\left(C^{q}_{\beta,1}\right)_1$, одержаного у роботі [8].

Умови теореми 1 задовольняють також коефіцієнти $\psi(k) = \left(1+(1-q^2)k/2\right)q^k$ бігармонічного ядра Пуассона

$$B_{q,\beta}(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1-q^2}{2}k\right)q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad 0 < q < 1, \quad \beta \in R,$$

а також коефіцієнти $\psi(k) = q^k/k$ ядра Неймана

$$N_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k}\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad 0 < q < 1, \quad \beta \in R.$$

Для коефіцієнтів $\psi(k)$ ядер $B_{q,\beta}(t)$ та $N_{q,\beta}(t)$, як неважко переконатись,

$$\varepsilon_n = \sup_{k \ge n}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right| = \left|\frac{\psi(n+1)}{\psi(n)} - q\right| \le \frac{q}{n}, \quad n \in N.$$

Тому із теореми 1 одержуємо наступне твердження.

Наслідок 2. *Нехай $\psi(k) = \left(1+(1-q^2)k/2\right)q^k$, $0 < q < 1$, $k \in N$, $\beta \in R$, тоді при $n \to \infty$*

$$\bar{\mathscr{E}}_n\left(C^{\psi}_{\beta,1}\right)_1 = \left(1+\frac{1-q^2}{2}n\right)q^n\left(\frac{8}{\pi^2}A_q + O(1)\frac{q}{n(1-q)^2}\right); \tag{29}$$

якщо ж $\psi(k)=q^k/k$, $0<q<1$, $k\in N$, $\beta\in R$, *то при* $n\to\infty$

$$\bar{\mathscr{E}}_n\left(C^{\psi}_{\beta,1}\right)_1 = \frac{q^n}{n}\left(\frac{8}{\pi^2}A_q + O(1)\frac{q}{n(1-q)^2}\right). \tag{30}$$

У рівностях (29) *і* (30) A_q *означено у* (2), *а величина* $O(1)$ *рівномірно обмежена відносно параметрів* n, q *і* β.

Із роботи [9, с. 994] випливає, що для довільних $\psi\in\mathfrak{D}_0$ і $\beta\in R$ має місце асимптотична рівність

$$\bar{\mathscr{E}}_n\left(C^{\psi}_{\beta,1}\right)_1 = \frac{16}{\pi^2}\psi(n) + O(1)\left(\frac{\psi(n)}{n} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\psi(k)\right), \tag{31}$$

в якій величина $O(1)$ рівномірно обмежена відносно усіх розглядуваних параметрів.

Оцінки (1) і (31) узгоджуються між собою, оскільки, як неважко переконатись,

$$\lim_{q\to 0+}\frac{1}{\sqrt{q}}\ln\frac{1+\sqrt{q}}{1-\sqrt{q}} = 2.$$

Іншими словами, як випливає із (31) і (32), асимптотична рівність (1) справедлива і у випадку $q=0$, якщо під A_0 розуміти $\lim_{q\to 0+}A_q$.

Зауважимо, що для деяких класів періодичних функцій скінченної гладкості, а також класів нескінченно диференційовних періодичних функцій асимптотичні рівності для верхніх меж наближень інтерполяційними тригонометричними поліномами у метриці простору L_1 отримано у роботах [10, 4].

1. *Степанец А. И.* Классификация и приближения периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
2. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 2. – 537 с.
3. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Приближение периодических аналитических функций интерполяционными тригонометрическими многочленами // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 12. – С. 1689 – 1701.
4. *Сердюк А. С.* Наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами нескінченно диференційовних періодичних функцій в інтегральній метриці // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 12. – С. 1654 – 1663.
5. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Приближение суммами Фурье и наилучшие приближения на классах аналитических функций // Там же. – 2000. – **52**, № 3. – С. 375 – 395.
6. *Fejer L.* Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihen // J. reine und angew. Math. – 1910. – **138**. – S. 22 – 53.
7. *Стечкин С. Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1980. – **145**. – С. 126 – 151.
8. *Сердюк А. С.* Наближення аналітичних функцій інтерполяційними тригонометричними поліномами в метриці L // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – Вип. 3. – С. 240 – 250.
9. *Сердюк А. С.* Наближення періодичних функцій високої гладкості інтерполяційними тригонометричними поліномами в метриці L_1 // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 7. – С. 994 – 998.
10. *Моторный В. П.* Приближение периодических аналитических функций интерполяционными многочленами L_1 // Там же. – 1990. – **42**, № 6. – С. 781 – 786.

Одержано 08.11.2001