УДК 517.5

В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов (Днепропетр. нац. ун-т)

НЕРАВЕНСТВА ТИПА КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИЕЙ ПЕРВОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

We obtain a new best possible Kolmogorov-type inequality

$$\|x'\|_q \le K(q,p)\|x\|_p^\alpha \left(\bigvee_0^{2\pi}(x')\right)^{1-\alpha}$$

for differentiable 2π-periodic functions x such that a variation of the derivative x' is bounded. Here, $q \in (0,\infty)$, $p \in [1,\infty]$, and $\alpha = \min\{1/2, p/q(p+1)\}$.

Одержано нову непокращувану нерівність типу Колмогорова

$$\|x'\|_q \le K(q,p)\|x\|_p^\alpha \left(\bigvee_0^{2\pi}(x')\right)^{1-\alpha}$$

для диференційовних 2π-періодичних функцій x, що мають обмежену варіацію похідної x', де $q \in (0,\infty)$, $p \in [1,\infty]$, $\alpha = \min\{1/2, p/q(p+1)\}$.

1. Введение. Пусть $L_p(G)$ — пространство измеримых на $G \subset R$ функций $x: G \to R$ таких, что $\|x\|_{L_p(G)} < \infty$, где

$$\|x\|_{L_p(G)} := \begin{cases} \left(\int_G |x(t)|^p dt\right)^{1/p}, & \text{если } 1 \le p < \infty; \\ \operatorname{vrai\,sup}_{t\in G} |x(t)|, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

Обозначение $\|x\|_{L_p(G)}$ будем использовать для величины $\left(\int_G |x(t)|^p dt\right)^{1/p}$ и в случае $0 < p < 1$. В случае, когда G является единичной окружностью T, реализованной как отрезок $[0, 2\pi]$ с отождествленными концами, пространство $L_p(T)$ состоит из 2π-периодических функций. В этом случае норму обозначаем $\|x\|_p$.

Через $L^1_{p,\vee}(G)$ обозначим множество локально абсолютно непрерывных функций $x \in L_p(G)$ таких, что x' имеет ограниченную вариацию на G; $L^1_{p,\vee} := L^1_{p,\vee}(T)$.

Для функций $x \in L^1_{p,\vee}(G)$ будем рассматривать неравенства вида

$$\|x'\|_{L_q(G)} \le K\|x\|^\alpha_{L_p(G)}\left(\bigvee_G(x')\right)^{1-\alpha} \tag{1}$$

с точной константой $K = K(q,p,G)$, т. е.

$$K(q,p,G) = \sup_{\substack{x\in L^1_{p,\vee}(G)\\ x\ne 0}} K(x), \quad K(x) = \frac{\|x'\|_{L_q(G)}}{\|x\|^\alpha_{L_p(G)}(\bigvee_G(x'))^{1-\alpha}}.$$

Как известно [1], в случае $G = R$ или $G = R_+$ неравенство (1) на классе $L^1_{p,\vee}(G)$ возможно, если и только если $1 + 1/p \ge 2/q$, и при выполнении этого условия показатель α в (1) необходимо равен $\alpha = p/(q(p+1))$. Точные неравенства (1) для $G = R, R_+$ исследовались в [2], где, в частности, найдено точное значение $K = K(q, p, G)$ при $q = 2p/(p+1)$ и $p \geq 1$. Если $G = T$, то из [3] следует, что при любых $q, p \geq 1$ неравенство (1) выполняется, если и только если $\alpha \leq \alpha_{cr}$, где

$$\alpha_{cr} := \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{p}{q(p+1)}\right\}.$$

Мы будем исследовать неравенства (1) для $G = T$ с максимально возможным показателем $\alpha = \alpha_{cr}$, поскольку именно такие неравенства представляют наибольший интерес. Результаты данной работы анонсированы в [4].

В случае $q = p = 1$ точное неравенство (1) известно и является частным случаем неравенства Стейна [5]. Ряд точных неравенств для промежуточных производных функций с ограниченной вариацией старшей производной можно найти в работах [6, 7].

Для формулировки результатов напомним определение несимметричных эйлеровых сплайнов [8]. Пусть $\gamma, \delta > 0$ и

$$\varphi_0(t;\gamma,\delta) := \begin{cases} \gamma, & \text{если } t \in \left[0, \dfrac{2\pi\delta}{\gamma+\delta}\right); \\ -\delta, & \text{если } t \in \left[\dfrac{2\pi\delta}{\gamma+\delta}, 2\pi\right). \end{cases}$$

$$\varphi_0(t+2\pi;\gamma,\delta) = \varphi_0(t;\gamma,\delta).$$

Для $r \in N$ через $\varphi_r(t;\gamma,\delta)$ обозначим r-ю периодическую первообразную функции $\varphi_0(t;\gamma,\delta)$. Для $\gamma > 0$ положим

$$\varphi_{\lambda,r}(t;\gamma,\delta) := \lambda^{-r}\varphi_r(\lambda t;\gamma,\delta).$$

Пусть далее

$$\varphi_r(t) := \varphi_r(t;1,1), \quad r = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$g_r(t) := \frac{1}{4}\varphi_{r-1}(t), \quad r = 1, 2, \ldots,$$

т. е. $g_r(t) := \varphi_{r-1}(t; 1/4, 1/4)$.

Теорема 1. *Пусть* $p \in [1, \infty)$. *Тогда для функций* $L^1_{p,\bigvee}$ *имеют место следующие неулучшаемые неравенства:*

a) *если* $q \in \left[\dfrac{2p}{p+1}, \infty\right)$, *то при* $\alpha = \dfrac{p}{q(p+1)}$

$$\|x'\|_q \leq \left(\max_{\gamma+\delta=\frac{1}{2}} \frac{\|\varphi_0(\cdot;\gamma,\delta)\|_q}{\|\varphi_1(\cdot;\gamma,\delta)\|_p^\alpha}\right) \|x\|_p^\alpha \left(\bigvee_0^{2\pi}(x')\right)^{1-\alpha}; \tag{2}$$

b) *если* $q \in \left(0, \dfrac{2p}{p+1}\right)$, *то*

$$\|x'\|_q \leq \frac{\|g_1\|_q}{\|g_2\|_p^{1/2}} \|x\|_p^{\frac{1}{2}} \left(\bigvee_0^{2\pi}(x')\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Замечание. В случае $q \in [1, 2]$ при всех $p \geq 1$ и $\alpha \in (-\infty, 1/q]$

$$\max_{\gamma+\delta=\frac{1}{2}} \frac{\| \varphi_0(\cdot;\gamma,\delta) \|_q}{\| \varphi_1(\cdot;\gamma,\delta) \|_p^\alpha} = \frac{\| g_1 \|_q}{\| g_2 \|_p^\alpha}, \tag{4}$$

а если $q > \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p+9}{p+1}}$, то

$$\max_{\gamma+\delta=\frac{1}{2}} \frac{\| \varphi_0(\cdot;\gamma,\delta) \|_q}{\| \varphi_1(\cdot;\gamma,\delta) \|_p^{p/(q(p+1))}} > \frac{\| g_1 \|_q}{\| g_2 \|_p^{p/(q(p+1))}}. \tag{5}$$

Доказательство теоремы. Пусть Λ — множество всех функций $x \in L^1_{p,\vee}$ таких, что их графиком является ломаная с конечным числом звеньев, причем каждое звено пересекает ось аргументов во внутренней точке звена и соседние звенья имеют угловые коэффициенты разных знаков.

Лемма 1. *При вычислении точной константы в неравенстве* (1) *в случаях* $G = R, R_+, T$ *и* $q, p \geq 1$ *достаточно ограничиться классом функций* Λ, *т. е.*

$$K(q,p,G) = \sup_{x \in \Lambda} K(x).$$

В случаях $G = R$ или $G = R_+$ это утверждение доказано в [2], однако из доказательства в [2] видно, что оно остается в силе и для $G = T$.

Пусть $x \in \Lambda$. Без ограничения общности считаем $x(0) = 0$. Пусть, далее, $0 = z_1 < z_2 < \ldots < z_N < z_{N+1} = 2\pi$ — все нули x на $[0, 2\pi]$, $\Delta_k = [z_k, z_{k+1}]$, $(x)_k$ — сужение функции x на отрезок Δ_k. График $(x)_k$ состоит из двух отрезков. Обозначим их угловые коэффициенты через γ_k и δ_k. Продолжим $(x)_k$ на отрезок $[z_{k+1}, 2z_{k+1} - z_k]$ нечетным образом относительно точки z_{k+1}. Тогда полученная функция на $[z_k, 2z_{k+1} - z_k]$ совпадает с функцией $\pm\varphi_{1,\lambda_k}(t + \tau_k; \gamma_k, \delta_k)$ при подходящем выборе знака и параметров λ_k, τ_k. Следовательно,

$$\| x \|_p^p = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_k}^{z_{k+1}} |x(t)|^p dt = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \lambda_k^{-(p+1)} \| \varphi_1(\cdot;\gamma_k,\delta_k) \|_p^p, \tag{6}$$

$$\| x' \|_q^q = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_k}^{z_{k+1}} |x'(t)|^q dt = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \lambda_k^{-1} \| \varphi_0(\cdot;\gamma_k,\delta_k) \|_q^q. \tag{7}$$

Пусть теперь $q \in \left[\frac{2p}{p+1}, \infty\right)$, $\alpha = \frac{p}{q(p+1)}$. Оценим сверху $\| x' \|_q^q$:

$$\| x' \|_q^q = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\| \varphi_0(\cdot,\gamma_k,\delta_k) \|_q^q}{\| \varphi_1(\cdot,\gamma_k,\delta_k) \|_p^{q\alpha} (2\gamma_k + 2\delta_k)^{q-q\alpha}} \right) \lambda_k^{-1} \| \varphi_1(\cdot,\gamma_k,\delta_k) \|_p^{q\alpha} (2\gamma_k + 2\delta_k)^{q-q\alpha} \leq$$

$$\leq \left(\max_{\gamma+\delta=\frac{1}{2}} \frac{\| \varphi_0(\cdot;\gamma,\delta) \|_q}{\| \varphi_1(\cdot;\gamma,\delta) \|_p^\alpha} \right)^q \cdot \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \left(\lambda_k^{-1} \| \varphi_1(\cdot,\gamma_k,\delta_k) \|_p^{q\alpha} \right) (2\gamma_k + 2\delta_k)^{q-q\alpha}. \tag{8}$$

К последней сумме применим неравенство Гельдера с показателями $(p+1, (p+1)/p)$. Принимая во внимание равенство (6) и учитывая, что $q\alpha(p+1) = p$, $1/(p+1) = q\alpha/p$, $(q - q\alpha)(p+1)/p = (1-\alpha)/\alpha$, получаем

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\lambda_k^{-1}\|\varphi_1(\cdot,\gamma_k,\delta_k)\|_p^{q\alpha}\right)(2\gamma_k+2\delta_k)^{q-q\alpha} \le$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{N}\left(\lambda_k^{-(p+1)}\|\varphi_1(\cdot,\gamma_k,\delta_k)\|_p^{q\alpha(p+1)}\right)\right)^{\frac{1}{p+1}} \left(\sum_{k=1}^{N}(2\gamma_k+2\delta_k)^{(q-q\alpha)\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{p}{p+1}} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{N}\lambda_k^{-(p+1)}\|\varphi_1(\cdot,\gamma_k,\delta_k)\|_p^{p}\right)^{\frac{q\alpha}{p}} \left(\sum_{k=1}^{N}(2\gamma_k+2\delta_k)^{(1-\alpha)/\alpha}\right)^{q\alpha} =$$

$$= \left(2\|x\|_p^p\right)^{\frac{q\alpha}{p}}\cdot 2^{q(1-\alpha)}\left(\sum_{k=1}^{N}\left(\gamma_k+\delta_k\right)^{(1-\alpha)/\alpha}\right)^{q\alpha}. \tag{9}$$

Теперь из (8) и (9) следует

$$\|x'\|_q \le \max_{\gamma+\delta=\frac{1}{2}}\frac{\|\varphi_0(\cdot;\gamma,\delta)\|_q}{\|\varphi_1(\cdot;\gamma,\delta)\|_p^{\alpha}}\,\|x\|_p^{\alpha}\left(\sum_{k=1}^{N}(\gamma_k+\delta_k)^{(1-\alpha)/\alpha}\right)^{\alpha}\cdot 2^{-\frac{1}{q}+\frac{\alpha}{p}+1-\alpha}.$$

Поскольку $\bigvee_0^{2\pi}(x') = \sum_{k=1}^{N}\bigvee_{z_k}^{z_{k+1}}((x')_k) = \sum_{k=1}^{N}\left(\gamma_k+\delta_k\right)$ и $-1/q+\alpha/p+1-\alpha = 1-2\alpha$, то

$$K(x) \le \max_{\gamma+\delta=\frac{1}{2}}\frac{\|\varphi_0(\cdot;\gamma,\delta)\|_q}{\|\varphi_1(\cdot;\gamma,\delta)\|_p^{\alpha}}\;\frac{\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\gamma_k+\delta_k\right)^{(1-\alpha)/\alpha}\right)^{\alpha}}{\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\gamma_k+\delta_k\right)\right)^{1-\alpha}}. \tag{10}$$

Из (10) будет следовать (2), если мы покажем,что при любом $\alpha\in(0,1/2]$

$$\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\gamma_k+\delta_k\right)^{(1-\alpha)/\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \le \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\gamma_k+\delta_k\right). \tag{11}$$

Пусть без ограничения общности $\gamma_2+\delta_2=\max_k(\gamma_k+\delta_k)$. Заметим, что в слагаемом $\gamma_1+\delta_1$ значение δ_1 равно γ_2, а в слагаемом $\gamma_3+\delta_3$ значение γ_3 равно δ_2.

Ввиду периодичности x число N четное. При $N=2$ неравенство (11) очевидно. Поэтому пусть $N\ge 4$. Тогда

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\gamma_k+\delta_k\right)^{(1-\alpha)/\alpha} =$$

$$= (\gamma_2+\delta_2)^{(1-\alpha)/\alpha}\cdot\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{\gamma_1+\gamma_2}{\gamma_2+\delta_2}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}+\left(\frac{\delta_2+\delta_3}{\gamma_2+\delta_2}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}+\sum_{k=4}^{N}\left(\frac{\gamma_k+\delta_k}{\gamma_2+\delta_2}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right). \tag{12}$$

При $\varepsilon>0$ и $b\in(1,2)$ функция $x^{\varepsilon}+(b-x)^{\varepsilon}$ для $x\in(b/2,1]$ монотонно возрастает, а значит,

$$x^{\varepsilon}+(b-x)^{\varepsilon} \le 1+(b-1)^{\varepsilon}.$$

Полагая $\varepsilon=(1-\alpha)/\alpha$, $x=\dfrac{\gamma_1+\gamma_2}{\gamma_2+\delta_2}$, $b=\dfrac{\gamma_1+\delta_3}{\gamma_2+\delta_2}+1$, получаем

$$\left(\frac{\gamma_1+\gamma_2}{\gamma_2+\delta_2}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}+\left(\frac{\delta_2+\delta_3}{\gamma_2+\delta_2}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \le 1+\left(\frac{\gamma_1+\delta_3}{\gamma_2+\delta_2}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}.$$

Используем это неравенство в (12):

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\gamma_k+\delta_k\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \le \left(\gamma_2+\delta_2\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\cdot\frac{1}{2}\left(2+\left(\frac{\gamma_1+\delta_3}{\gamma_2+\delta_2}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}+\sum_{k=4}^{N}\left(\frac{\gamma_k+\delta_k}{\gamma_2+\delta_2}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right)=$$

$$=\left(\gamma_2+\delta_2\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\left(1+\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{N}a_k^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right),$$

где $a_k=\dfrac{\gamma_k+\delta_k}{\gamma_2+\delta_2}$ при $k\ge 4$ и $a_3=\dfrac{\gamma_1+\delta_3}{\gamma_2+\delta_2}$. Далее, легко видеть, что

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(\gamma_k+\delta_k)=(\gamma_2+\delta_2)\left(1+\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{N}a_k\right).$$

Поэтому

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\gamma_k+\delta_k\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(\gamma_k+\delta_k)} \le \frac{\left(1+\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{N}a_k^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{1+\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{N}a_k}. \tag{13}$$

Поскольку $a_k\in(0,1]$, то функция $\Phi_\alpha(\varepsilon)=\left(1+\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{N}a_k^{\varepsilon}\right)^{1/\varepsilon}$, $\varepsilon>0$, с ростом ε убывает. Это следут из того, что

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left(\ln\Phi_\alpha(\varepsilon)\right)=-\frac{1}{\varepsilon^2}\ln\left(1+\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{N}a_k^{\varepsilon}\right)+\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{N}a_k^{\varepsilon}\ln a_k}{1+\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{N}a_k^{\varepsilon}} \le 0.$$

Поэтому

$$\left(1+\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{N}a_k^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \le 1+\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{N}a_k,$$

и из (13) следует (11).

Неравенство (2) доказано.

Ниже мы докажем (4), а сейчас используем его для доказательства (3).

Из (4) и доказанного неравенства (2) при $q=2p/(p+1)$ следует

$$\|x'\|_{\frac{2p}{p+1}} \le \frac{\|g_1\|_{2p/(p+1)}}{\|g_2\|_p^{1/2}}\|x\|_p^{\frac{1}{2}}\left(\bigvee_0^{2\pi}(x')\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть $q \in (0, 2p/(p+1))$. Поскольку $\|g_1\|_s = 4^{-1}(2\pi)^{1/s}$, то

$$\|x'\|_q \le (2\pi)^{\frac{1}{q}-\frac{p+1}{2p}} \|x'\|_{\frac{2p}{p+1}} \le (2\pi)^{\frac{1}{q}-\frac{p+1}{2p}} \frac{\|g_1\|_{2p/(p+1)}}{\|g_2\|_p^{1/2}} \|x\|_p^{\frac{1}{2}} \left(\bigvee_0^{2\pi}(x') \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{4^{-1}(2\pi)^{1/q}}{\|g_2\|_p^{1/2}} \|x\|_p^{\frac{1}{2}} \left(\bigvee_0^{2\pi}(x') \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\|g_1\|_q}{\|g_2\|_p^{1/2}} \|x\|_p^{\frac{1}{2}} \left(\bigvee_0^{2\pi}(x') \right)^{\frac{1}{2}},$$

и неравенство (3) доказано.

Теперь исследуем величину

$$I(p,q) = \max_{\gamma+\delta=\frac{1}{2}} \frac{\|\varphi_0(\cdot;\gamma,\delta)\|_q}{\|\varphi_1(\cdot;\gamma,\delta)\|_p^{\alpha}}.$$

Для произвольных пока $q \in (0, \infty)$, $p \in [1, \infty)$, $\alpha \in (-\infty, 1/2]$ имеем

$$\|\varphi_0(\cdot;\gamma,\delta)\|_q^q = \gamma^q \frac{2\pi\delta}{\gamma+\delta} + \delta^q \left(2\pi - \frac{2\pi\delta}{\gamma+\delta} \right) = \frac{2\pi}{\gamma+\delta} \gamma\delta \left(\gamma^{q-1} + \delta^{q-1} \right),$$

$$\|\varphi_1(\cdot;\gamma,\delta)\|_p^p = \frac{1}{p+1} \left(\gamma^p \left(\frac{2\pi\delta}{\gamma+\delta} \right)^{p+1} + \delta^p \left(2\pi - \frac{2\pi\delta}{\gamma+\delta} \right)^{p+1} \right) = \frac{(2\pi)^{p+1}}{p+1} \left(\frac{\gamma\delta}{\gamma+\delta} \right)^p.$$

Поэтому

$$\frac{\|\varphi_0(\cdot;\gamma,\delta)\|_q}{\|\varphi_1(\cdot;\gamma,\delta)\|_p^{\alpha}} = \frac{\left(\frac{2\pi}{\gamma+\delta} \gamma\delta \left(\gamma^{q-1} + \delta^{q-1} \right) \right)^{1/q}}{\left(\frac{(2\pi)^{p+1}}{p+1} \left(\frac{\gamma\delta}{\gamma+\delta} \right)^p \right)^{\alpha/p}} =$$

$$= (p+1)^{\frac{\alpha}{p}} (2\pi)^{\frac{1}{q}-\frac{\alpha(p+1)}{p}} (\gamma+\delta)^{\alpha-\frac{1}{q}} (\gamma\delta)^{\frac{1}{q}-\alpha} \left(\gamma^{q-1} + \delta^{q-1} \right)^{\frac{1}{q}}$$

и

$$I(p,q) = C(q,p,\alpha) \max_{\gamma+\delta=1/2} F(\gamma,\delta), \tag{14}$$

где

$$C(q,p,\alpha) = (p+1)^{\frac{\alpha}{p}} (2\pi)^{\frac{1}{q}-\frac{\alpha(p+1)}{p}} \cdot 2^{\frac{1}{q}-\alpha},$$

$$F(\gamma,\delta) = (\gamma\delta)^{\frac{1}{q}-\alpha} \left(\gamma^{q-1} + \delta^{q-1} \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{15}$$

Докажем (4). Пусть $q \in [1, 2]$. Тогда функция x^{q-1} является вогнутой, поэтому

$$\gamma^{q-1} + \delta^{q-1} \le 2^{2-q} (\gamma+\delta)^{q-1}$$

и для $\gamma + \delta = 1/2$ имеем

$$F(\gamma,\delta) \le (\gamma\delta)^{\frac{1}{q}-\alpha} \left(2^{2-q} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{q-1} \right)^{\frac{1}{q}} = (\gamma\delta)^{\frac{1}{q}-\alpha} \cdot 2^{\frac{3-2q}{q}}.$$

Отсюда видно, что если $\alpha \le 1/q$, то при $\gamma + \delta = 1/2$

$$F(\gamma, \delta) \le F(1/4, 1/4) = 2^{-\frac{1}{q}+4\alpha-2} \tag{16}$$

и из (14) – (16) следует (4).

Докажем (5). Точка $\gamma = 1/4$ всегда является точкой локального экстремума функции $F\left(\gamma, \frac{1}{2} - \gamma\right)$. Однако она заведомо не будет точкой максимума, если

$$\left(\frac{d^2}{d\gamma^2} F\right)\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) > 0. \tag{17}$$

После очевидных вычислений получаем, что неравенство (17) эквивалентно следующему:

$$q + 2\alpha - 3 > 0. \tag{18}$$

Положим $\alpha = p/(q(p+1))$, тогда (18) означает, что

$$q > \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p+9}{p+1}}.$$

Отсюда следует (5).

Неравенство (3) обращается в равенство для функции $x(t) = g_2(t)$, а неравенство (2) — для функции $x(t) = \varphi_1\left(t; \bar{\gamma}, \bar{\delta}\right)$, где $\bar{\gamma}, \bar{\delta}$ — те значения γ, δ, для которых достигается максимум в (4).

Теорема доказана.

Заметим, что при $p = \infty$ полностью описаны все значения $q \in [1, \infty]$, при которых экстремали в (2) и (3) — симметричные эйлеровы сплайны: это так только в случае $q \le 2$.

1. *Габушин В. Н.* Неравенства для норм функции и ее производных в метриках L_p // Мат. заметки. – 1967. – № 3. – С. 291 – 298.
2. *Арестов В. В., Бердышев В. И.* Неравенства для дифференцируемых функций // Тр. ИММ УНЦ АН СССР. – 1975. – Вып. 17. Методы решения условно-корректных задач. – С. 108 – 138.
3. *Клоц Б. Е.* Приближение дифференцируемых функций функциями большей гладкости // Мат. заметки. – 1977. – **21**, № 1. – С. 21 – 32.
4. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* О точных неравенствах типа Колмогорова в случае малых гладкостей // Допов. НАН України. – 1998. – № 6. – С. 11 – 15.
5. *Stein E. M.* Functions of exponential type // Ann. Math. – 1957. – **65**, № 3. – P. 582 – 592.
6. *Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г.* Аппроксимация с ограничениями. – Киев: Наук. думка, 1982. – 250 с.
7. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* Inequalities for norms of intermediate derivatives of periodic functions and their applications // East J. Approxim. – 1997. – **3**, № 3. – P. 351 – 376.
8. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – Киев: Наук. думка, 1992. – 304 с.

Получено 15.05.2001