УДК 519.41/47

Т. І. Мельник (Херсон. пед. ун-т)

МНОГОВИДИ ГРУП З ІНВАРІАНТНИМИ ЦЕНТРАЛІЗАТОРАМИ ПІДГРУП

We present the structural description of free groups and some critical groups of a given manifold.

Наведено структурний опис вільних груп і деяких критичних груп вказаного многовиду.

Вступ. Многовид Δ_k всіх нільпотентних груп класу k, $k = 2, 3$, і його решітка підмноговидів $R\Delta_k$ є предметом численних досліджень [1 – 8]. Так, у роботі [1] фактично наведено повний опис підгруп вільної групи з Δ_2. У роботі [4] доводиться, що будь-яка характеристична підгрупа вільної групи з многовиду Δ_2 є цілком характеристичною. Відомо [6], що решітка підмноговидів $R\Delta_3$ многовиду Δ_3 дистрибутивна. Крім того, у роботі [4] знайдено екваціональну характеристику для кожного підмноговиду $\gamma \subset \Delta_3$. Леві [7] довів, що для многовиду 2-енгелевих груп δ виконуються строгі включення $\Delta_2 \subset \delta \subset \Delta_3$, і третій член нижнього центрального ряду групи G із δ має експоненту 3. Незважаючи на ці результати, многовид δ і його решітка підмноговидів $R\delta$ ще недостатньо вивчені. Як відомо [9], при вивченні кожного многовиду груп α і його підмноговидів важливе значення мають властивості його вільних і критичних груп. Це пояснюється тим, що кожна група із многовиду α є фактор-групою деякої вільної групи $F(X)$. Однак відомо, що існують такі многовиди груп, які не породжуються ніякою своєю групою скінченного рангу [10]. У зв'язку з цим важливого значення набуває питання про визначення найменшого рангу вільної групи та про конструктивний опис таких груп $F(X)$, що породжує даний многовид.

У даній роботі наведено опис вільних груп довільного рангу многовиду δ (теорема 1). Встановлено, що клас δ породжується кожною своєю вільною групою рангу 3 з нецентральним комутантом (теорема 2). Крім того доведено, що многовид Δ_2 всіх груп з центральним комутантом є єдиним максимальним елементом решітки підмноговидів $R\delta$ (теорема 3). Встановлено, що кожна група G із $\delta \backslash \Delta_2$, всі власні підгрупи якої належать Δ_2, є скінченною 3-породженою 3-групою. Наведено повний опис одного підкласу груп такого роду (теорема 4). У лемі 2 виділено ряд еквівалентних умов, що визначають многовид δ.

Всі невизначені поняття і позначення можна знайти у роботах [9, 11 – 13].

За означенням, група D належить класу δ тоді і тільки тоді, коли централізатор $C_D(H)$ кожної підгрупи $H \leq D$ є нормальною підгрупою в D. Очевидно, ця умова рівносильна тому, що для довільного елемента $a \in D$ централізатор $C_D(A) \lhd D$.

Лема 1. *Для групи G наступні тотожності рівносильні:*

1) $[x, y, x] = 1$;	5) $[x, x^{-1}yx] = [x, y]$;	9) $[x, y^{-1}] = [x, y]^{-1}$;
2) $[x, y, y] = 1$;	6) $[x, yx] = [x, y]$;	10) $[x^{-1}, y] = [x, y^{-1}]$;
3) $[x, y, x^{-1}] = 1$;	7) $[yx, x] = [y, x]$;	11) $[x, y, z] = [y, z, x]$;
4) $[x, y, y^{-1}] = 1$;	8) $[x^{-1}, y] = [x, y]^{-1}$;	12) $[x^2, y] = [x, y]^2$;

13) $[x, y^2] = [x, y]^2$; 15) $[xy, yx] = 1$; 17) $[xyz, zxy] = 1$.

14) $[x^2, y] = [x, y^2]$; 16) $[xyz, yzx] = 1$;

Доведення. Рівносильність 1) $\leftrightarrow$ 2) відома. Слід відмітити, що доведення цієї рівносильності можна знайти у роботі [13, с. 348]. Використовуючи відомі комутаторні співвідношення 33.34 із [9], безпосередньо одержуємо рівносильність тотожностей 1), 3), 4), 5), 6) і 7). У роботі [8] встановлено рівносильність 2) $\leftrightarrow$ 15). Очевидно, що 15) $\leftrightarrow$ 16) і 15) $\leftrightarrow$ 17). Із рівності $[x^{-1}, y] = [y, x]\cdot[y, x, x^{-1}]$ випливає еквівалентність 4) $\leftrightarrow$ 8), а з рівності $[x, y^{-1}] = [y, x]\cdot[y, x, y^{-1}]$ маємо рівносильність 3) $\leftrightarrow$ 9). Враховуючи, що 3) $\leftrightarrow$ 4), маємо еквівалентність 3) $\leftrightarrow$ 10). Якщо у тотожності 11) покласти $x = y$, то одержимо 1), яка рівносильна 10). Доведемо, що на групі G, на якій виконується тотожність 9) або 10), потрійний комутатор не залежить від циклічної перестановки змінних. Маємо $[y^{-1}, x\cdot z] = [x\cdot z, y] \leftrightarrow [y^{-1}, x\cdot z] = [(x\cdot z)^{-1}, y^{-1}] \leftrightarrow y\cdot z^{-1}\cdot x^{-1}\cdot y^{-1}\cdot x\cdot z = x\cdot z\cdot y\cdot z^{-1}\cdot x^{-1}\cdot y^{-1} \leftrightarrow x^{-1}\cdot y\cdot z^{-1}\cdot x^{-1}\cdot y^{-1}\cdot x = z\cdot y\cdot z^{-1}\cdot x^{-1}\cdot y^{-1}\cdot z^{-1} \leftrightarrow x\cdot y^{-1}\cdot x^{-1}\cdot y\cdot z^{-1}\cdot x^{-1}\cdot y^{-1}\cdot x\cdot y\cdot z = x\cdot y^{-1}\cdot z\cdot y\cdot z^{-1}\cdot x^{-1}\cdot y^{-1}\cdot z^{-1}\cdot y\cdot z \leftrightarrow [x^{-1}, y]\cdot z^{-1}\cdot[x, y]\cdot z = x\cdot[x, z^{-1}]\cdot x^{-1}\cdot[y, z] \leftrightarrow [x, y, z] = [x^{-1}, [y, z]] \leftrightarrow [x, y, z] = [y, z, x]$. Таким чином, 10) $\leftrightarrow$ 11). Із відомих комутаторних співвідношень [13, с. 171]

$$[x^2, y] = [x, y]\cdot[x, y, x]\cdot[x, y], \quad [x, y^2] = [x, y]^2\cdot[x, y, y] \tag{1}$$

випливає, що 1) $\leftrightarrow$ 12) і 2) $\leftrightarrow$ 13). Залишилось довести, що 1) $\leftrightarrow$ 14). Якщо виконується тотожність 1), то маємо і тотожність 2), а тому з наведених співвідношень (1) випливає імплікація 1) $\to$ 14). Припустимо, що на групі G виконується тотожність 14), тобто $[x^2, y] = [x, y^2]$ для всіх x, $y \in G$. Тоді $x^{-2}\cdot y^{-1}\cdot x^2\cdot y = x^{-1}\cdot y^{-2}\cdot x\cdot y^2 \to x^{-1}\cdot y^{-1}\cdot x^2 = y^{-2}\cdot x\cdot y \to y\cdot x^{-1}\cdot y^{-1}\cdot x = y^{-1}\cdot x\cdot y\cdot x^{-1} \leftrightarrow [y^{-1}, x] = [y, x^{-1}] \leftrightarrow$ 10) $\leftrightarrow$ 1). Одержуємо 1) $\leftrightarrow$ 14). Лему доведено.

Лема 2. *Для групи G наступні твердження еквівалентні між собою:*

1) *в групі G нормальні централізатори всіх підгруп;*

2) *в групі G нормальні централізатори всіх абелевих підгруп;*

3) *в групі G нормальні централізатори всіх циклічних підгруп;*

4) *в групі G нормальні централізатори централізаторів всіх циклічних підгруп;*

5) *для всіх елементів $x, y \in G$ виконується рівність $[x^2, y] = [x, y]^2$;*

6) *потрійний комутатор довільних елементів $x, y, z \in G$ не залежить від їх циклічної перестановки, тобто $[x, y, z] = [y, z, x]$;*

7) *на групі G виконується тотожність $[x, y, x] = 1$;*

8) *для будь-яких елементів $x, y \in G$ комутатор $[x, y]$ належить центру підгрупи $\langle x, y\rangle$.*

Доведення. Очевидно, що перші три твердження еквівалентні між собою. Еквівалентність тверджень 5), 6) і 7) випливає з леми 1. Еквівалентність 7) $\leftrightarrow$ 8) очевидна. Покажемо, що твердження 4) еквівалентне твердженню 3). Нехай у групі G нормальні централізатори централізаторів всіх циклічних підгруп. Доведемо, що для довільного елемента $x \in G$ централізатор $C_G(x) \lhd G$. За умовою $C_G(C_G(x)) \lhd G$. А оскільки $C_G(x) = C_G(C_G(C_G(x)))$, то підгрупа $C_G(x) \lhd G$. Навпаки, якщо $C_G(x) \lhd G$, то і $C_G(C_G(x)) \lhd G$. Залишилося показати, що 1) $\leftrightarrow$ 7). Нехай у групі G централізатори всіх підгруп нормальні. Розглянемо довільні елементи $x, y \in G$. Оскільки централізатор $C_G(x) \lhd G$, то комутатор $[y, x] \in C_G(x)$. Звідси випливає, що на G виконується тотожність $[y, x, x] = 1$. Доведемо тепер обернене твердження. Нехай на групі G виконується тотожність $[x, y, x] = 1$. Тоді на основі роботи [7] група G є нільпотентною групою класу 3 і на ній виконується тотожність $[x, y, z]^3 = 1$. Звідси випливає, що комутант G' — абелева підгрупа. Нехай $z, x, y \in G$ і $x \cdot y = y \cdot x$. Тоді маємо $a = \left[z^{-1} \cdot y \cdot z, x\right] = \left[z^{-1} \cdot y, x\right] \cdot \left[z^{-1} \cdot y, x, z\right] \cdot [z, x]$, $\left[z^{-1} \cdot y, x\right] = \left[z^{-1}, x\right] \cdot$ $\cdot \left[z^{-1}, x, y\right] \cdot [y, x] = \left[z^{-1}, x\right] \cdot \left[z^{-1}, x, y\right] = t$. Використовуючи лему 1, одержуємо $t =$ $= [x, z] \cdot \left[x, y, z^{-1}\right] = [x, z]$ і $a = [x, z] \cdot [x, z, z] \cdot [z, x] = [x, z] \cdot [z, x] = 1$. Таким чином, $z^{-1} \cdot y \cdot z$ належить централізатору $C_G(x)$. Враховуючи, що z — довільний елемент групи G, маємо $C_G(x) \lhd G$, тобто $G \in \delta$. Лему доведено.

Нехай α — довільний многовид груп. Група $F(X) \in \alpha$ називається вільною групою многовиду α, а X — системою вільних твірних, якщо кожне відображення $\varphi \colon X \to D$, де $D \in \alpha$, можна продовжити до гомоморфізму $\varphi^* \colon F(X) \to D$ [12]. Позначимо через Δ_k многовид всіх нільпотентних груп класу $\leq k$.

Наслідок 1. *Клас δ всіх груп D з нормальними централізаторами підгруп є многовидом, що визначається кожною із тотожностей* 5) – 7) *леми* 2.

Зауваження. Група D, на якій виконується тотожність 2) леми 1, називається 2-енгелевою групою [12, с. 540]. Характеристику 2-енгелевих груп за допомогою тотожностей 1) – 4) леми 1 можна знайти у роботі [7]. За результатами цієї роботи будь-яка група експоненти 3 належить многовиду δ, а група Бернсайда $B(3, 3) \in \delta$ і має нецентральний комутант, причому $|B(3, 3)| = 3^7$.

Наслідок 2. *Нехай D — група, що не належить многовиду δ, тоді існують два елементи $x, y \in D$ такі, що $\left[x^{-1}, y\right] \neq [x, y]^{-1}$, $\left[x^2, y\right] \neq [x, y]^2$ і $[x, y, x] \neq 1$.*

Доведення. Нехай група $D \notin \delta$, тоді існують елементи $x, y \in D$ такі, що $[x, y, x] \neq 1$. Припустимо, що $\left[x^2, y\right] = [x, y]^2$, тоді $\left[x^2, y\right] = [x, y] \cdot [x, y, x] \cdot [x, y] =$ $= [x, y]^2$, звідки $[x, y, x] = 1$, що неможливо. Нехай $\left[x^{-1}, y\right] = [x, y]^{-1}$, тоді $x \cdot y^{-1} \cdot x^{-1} \cdot y = y^{-1} \cdot x^{-1} \cdot y \cdot x \leftrightarrow y^{-1} \cdot x^{-1} \cdot y \cdot x \cdot y^{-1} \cdot x \cdot y \cdot x^{-1} = 1 \leftrightarrow [x, y]^{-1} \cdot x \cdot [x, y] \cdot$ $\cdot x^{-1} = 1 \leftrightarrow \left[x, y, x^{-1}\right] = 1 \leftrightarrow [x, y, x] = 1$, що за умовою неможливо. Наслідок доведено.

Наслідок 3. *Нехай група $G \in \delta$. Тоді $G'' = \{1\}$, $\left[G, G'\right] = Z \leq Z(G)$, $Z^3 =$ $= \{1\}$ і $\left(G'\right)^3 \leq Z(G)$.*

Доведення безпосередньо випливає із теореми 1 і теореми Леві [7, с. 92].

Лема 3. *Нехай I — деяка цілком впорядкована множина індексів потужності $\rho = |I| > 2$; $\{\langle x_i \rangle \mid i \in I\}$ — множина нескінченних циклічних груп $\langle x_i \rangle$; $\left\{\langle u_{ij} \rangle \mid i < j;\ i, j \in I\right\}$ — множина нескінченних циклічних груп $\langle u_{ij} \rangle$; $\left\{\langle z_{ijk} \rangle \mid i < j < k;\ i, j, k \in I\right\}$ — множина циклічних груп порядку 3; $X = \left\{x_i \mid i \in I\right\}$, $U =$ $= \prod_{i<j} \langle u_{ij} \rangle$, $Z = \prod_{i<j<k} \langle z_{ijk} \rangle$, $K = Z \times U$. Тоді K — абелева група, U — вільна абелева група рангу C_ρ^2; Z — елементарна абелева група рангу C_ρ^3 (у випадку нескінченного ρ покладемо $C_\rho^k = \infty$) і справедливі наступні твердження:*

1) *для кожного* $l \in I$ *існує група* $X_l = K \leftthreetimes \langle x_l \rangle$, *де* $[Z, \langle x_l \rangle] = \{1\}$; *якщо* $l \in \{i, j\}$, *то комутатор* $[u_{ij}, x_l] = 1$; *якщо* $l < i$, *то* $[u_{ij}, x_l] = z_{lij}$; *якщо* $l > j$, *то* $[u_{ij}, x_l] = z_{ijl}$; *якщо* $i < l < j$, *то* $[u_{ij}, x_l] = z_{ilj}$;

2) *для будь-яких різних індексів* $l, t \in I$ *існує група* $X_{lt} = X_l \leftthreetimes \langle x_t \rangle = X_t \leftthreetimes \langle x_l \rangle$, *де* X_l, X_t *— групи із п.* 1; *якщо* $l < t$, *то комутатор* $[x_l, x_t] = u_{lt}$; *якщо* $l > t$, *то* $[x_l, x_t] = u_{lt}^{-1}$;

3) *для будь-яких попарно різних індексів* $l, t, s \in I$ *існує група* $X_{lts} = X_{lt} \leftthreetimes \langle x_s \rangle = X_{ls} \leftthreetimes \langle x_t \rangle = X_{ts} \leftthreetimes \langle x_l \rangle$, *де* X_{lt}, X_{ls} *і* X_{ts} *— групи із п.* 2; *якщо* $l < t < s$, *то комутатор* $[x_l, x_t, x_s] = [x_t, x_s, x_l] = [x_s, x_l, x_t] = z_{lts}$;

4) *існує група* $F = F(X) = \left(\bigcup_{i \in I} F_i\right) = \{\langle X_i \rangle \mid i \in I\}$; $F_1 = X_1$, *де* 1 *— найменший елемент із* I; *якщо* i *— граничне число в* I, *то* $F_i = \left(\bigcup_{j<i} F_j\right)$; *якщо* i *— неграничне число, то* $F_i = F_{i-1} \leftthreetimes \langle x_i \rangle$; *комутант* $F' = K$; $F'' = \{1\}$, K/Z *і* F/K *— вільні абелеві групи;* U^3 *міститься в центрі групи* F; $[F', F] = Z$.

Доведення. Нехай I, X, U, Z і K визначаються за умовою леми 3. Очевидно, $K' = \{1\}$; Z — елементарна абелева група рангу C_ρ^3; U — вільна абелева група рангу C_ρ^2. Зрозуміло, що комутаторні співвідношення з п. 1 задають взаємно однозначне відображення абелевої групи K на K, яке, очевидно, є автоморфізмом, а тому існує група $X_l = K \leftthreetimes \langle x_l \rangle$, і тим самим твердження п. 1 доведено. Комутаторні співвідношення з п. 2 задають взаємно однозначне відображення групи X_l на X_l. Легко перевірити, що це відображення є автоморфізмом. Звідси випливає існування групи $X_{lt} = X_l \leftthreetimes \langle x_t \rangle$ і твердження п. 2 встановлено. Аналогічно, комутаторні співвідношення з п. 3 задають автоморфізм групи X_{lt}. Звідси випливає існування групи $X_{lts} = X_{lt} \leftthreetimes \langle x_s \rangle$ і твердження п. 3 доведено. Нехай 1 — найменший елемент множини I. Покладемо $F_1 = X_1$. Припустимо, що існують групи F_ν, де $\nu < l$, і для всіх $\beta \le \nu$ група $F_\beta \le F_\nu$. Якщо l — граничне число множини I, то покладемо $F_l = \left(\bigcup_{\nu < l} F_\nu\right)$. Нехай l не є граничним числом. Тоді існує група F_{l-1}. Комутаторні співвідношення пп. 1 – 3 визначають взаємно однозначне відображення групи F_{l-1} на F_{l-1}, яке, очевидно, є автоморфізмом групи F_{l-1}. Звідси випливає існування групи $F_l = F_{l-1} \leftthreetimes \langle x_l \rangle$. Легко бачити, що $F' = K$, $F'' = \{1\}$, $Z \le Z(F)$, $Z = [F', F]$ і ранг групи Z дорівнює C_ρ^3. Зрозуміло, що $K/Z \cong U$ — вільна абелева група рангу C_ρ^2. Далі, підгрупа $X_l \lhd F = \{\langle X_i \rangle \mid i \in I\}$ і фактор-група $F/K = \prod_{i \in I} (X_i/K)$ — вільна абелева група рангу ρ. Оскільки $[K, F] = Z \le Z(F)$ і $Z^3 = \{1\}$, то за відомими комутаторними співвідношеннями [13, с. 171] одержуємо, що взаємний комутант $[U^3, F] = \{1\}$, тобто U^3 міститься у центрі $Z(F)$ групи F. Лему 3 доведено.

Теорема 1. *Група* $F(X)$ *із леми* 3 *є вільною групою рангу* $\rho > 2$ *многовиду* δ, *з множиною вільних твірних* X *і нецентральним комутантом. При цьому має місце розклад* $F(X) = \overline{F}_{ijk} \leftthreetimes F_3$, *де* $\overline{F}_{ijk} = \langle X_1 \rangle$, $X_1 = X \setminus \{x_i, x_j, x_k\}$, *а* $F_3 = F(x_i, x_j, x_k)$ *— група з п.* 3 *леми* 3 *і вона є вільною групою рангу* 3 *з* $\delta \setminus \Delta_2$.

Доведення. Нехай $F = F(X)$ — група, яка визначена згідно з лемою 3.

Оскільки $\rho > 2$, то Z — елементарна абелева 3-група рангу ρ. Звідси випливає, що $F \notin \Delta_2$. Доведемо, що $F \in \delta$. Покладемо $M = \bigcap_{i \in I} \langle x_i \rangle$. З твердження п. 3 леми 3 випливає, що на множині M справджуються всі тотожності леми 1. Нехай a, b — довільні елементи групи F. Покажемо, що $\left[a^{-1}, b\right] = [a, b]^{-1}$. Зрозуміло, що $a = z_1 \cdot u_1 \cdot g_1$, $b = z_2 \cdot u_2 \cdot g_2$, $z_r \in Z$, $u_r \in U$, $g_r = v_{r1} \cdot v_{r2} \ldots v_{rh} \ldots \ldots v_{rn_r}$, де $v_{rh} \in M$. Оскільки $z_r \in Z(F)$, то $[a, b] = [u_1 \cdot g_1, u_2 \cdot g_2]$. Далі маємо $[a, b] = [u_1, g_2] \cdot [g_1, g_2] \cdot [g_1, u_2]$, $\left[a^{-1}, b\right] = \left[g_1^{-1}, g_2\right] \cdot [g_1, u_2]^{-1} \cdot [u_1, g_2]^{-1}$, оскільки $u_i \in G'$ і F' — абелева підгрупа. Залишається лише показати, що $\left[g_1^{-1}, g_2\right] = [g_1, g_2]^{-1}$. Якщо $g_1, g_2 \in M$, то твердження випливає з того факту, що на M виконуються всі тотожності леми 1. А тому покладемо $n_{r_1} + n_{r_2} > 2$. Припустимо, що шукана рівність справедлива для елементів g_1, g_2 таких, що $t = n_1 + n_2 > 2$. Покажемо, що вона має місце і для числа $t + 1 = n_1 + n_2$. Без порушення загальності можна вважати, що $n_1 > 1$. Тоді $g_1 = c \cdot d$, де $d = v_{1n_1}$, $c = v_{11} \cdot v_{12} \ldots v_{1(n_1 - 1)}$. Далі $[g_1, g_2] = [c, g_2] \cdot [c, g_2, d] \cdot [d, g_2]$; $\left[g_1^{-1}, g_2\right] = \left[d^{-1}, g_2\right] \cdot \left[d^{-1}, g_2, c^{-1}\right] \cdot \left[c^{-1}, g_2\right]$. Оскільки $[d, g_2, c] \in Z(F)$, то $\left[d^{-1}, g_2, c^{-1}\right] = [d, g_2, c]$. За індукційним припущенням $\left[c^{-1}, g_2\right] = [g_2, c]$ і $\left[d^{-1}, g_2\right] = [g_2, d]$. Крім того, $[d, g_2, c] = \prod_h [g_2, d, v_{lh}]$. Оскільки $[g_2, d] = \left[v_{21} \ldots v_{2n_2}, d\right] = \left(\prod_{j=1}^{n_2} \left[v_{2j}, d\right]\right) \cdot g$, де g — добуток потрійних комутаторів і $g \in Z(F)$, то $[d, g_2, c] = \prod_h \left[\left(\prod_{j=1}^{n_2} \left[v_{2j}, d\right]\right) \cdot g, v_{lh}\right] = \prod_h \left[\left(\prod_{j=1}^{n_2} \left[v_{2j}, d\right]\right), v_{lh}\right] = \prod_{h,j} \left[v_{2j}, d, v_{lh}\right] = \prod_{h,j} \left[d, v_{lh}, v_{2j}\right]$, тому що елементи $v_{2j}, d, v_{lh} \in M$ і для елементів множини M виконується тотожність $[x, y, z] = [y, z, x]$. Одержали, що група $F \in \delta$. Відомо [9, с. 28], що у многовиді δ міститься вільна група з нецентральним комутантом $V = V(Y)$ рангу ρ, причому існує гомоморфізм φ із V на F, для якого звуження на Y є взаємно однозначним відображенням Y на X. Звідси $Y = \{y_i \mid i \in I\}$, $\varphi(y_i) = x_i$ і $|y_i| = \infty$. За наслідком 3 $V'' = \{1\}$, $\left[V, V'\right] \subset Z(V)$ і $\left[V, V'\right]^3 = \{1\}$. Звідси $\varphi\left(\left[V'', V\right]\right) = Z \neq \{1\}$. Зрозуміло, що $\left[y_i, y_j\right] = v_{ij}$ і $\varphi(v_{ij}) = u_{ij}$, а значить, $\left|v_{ij}\right| = \infty$ і V' містить підгрупу $V_1 = \prod_{i<j} \langle v_{ij} \rangle$, при цьому звуження гомоморфізму φ на V_1 є ізоморфізмом із V_1 на підгрупу U. Нехай $Z_1 = \prod_{i<j<k} \langle t_{ijk} \rangle$, де $t_{ijk} = \left[y_i, y_j, y_k\right]$, тоді $\varphi(t_{ijk}) = z_{ijk}$. Покладемо $K_1 = Z_1 \times V_1$, тоді в V існують підгрупи $Y_l = K_1 \leftthreetimes \langle y_l \rangle$, $l \in I$ і $V = \langle Y_l \mid l \in I \rangle$. Звідси $V' = Z_1 \times V_1$ і звуження φ на V' є ізоморфізмом комутанта V' на F' і $(\operatorname{Ker}\varphi) \cap V' = \{1\}$. Оскільки F/F' — вільна абелева група рангу ρ, то і V/V' — вільна абелева група рангу ρ, при цьому гомоморфізм φ індукує ізоморфізм групи V/V' на F/F', а тому $\operatorname{Ker}\varphi = \{1\}$, тобто φ — ізоморфізм V на F. Оскільки F' не міститься в $Z(F)$, то F — вільна група рангу ρ із многовиду δ з нецентральним комутантом.

Розглянемо довільні три попарно різні індекси $l, t, s \in I$. Тоді в групі F існує підгрупа $F_3 = F(x_l, x_t, x_s) = \left(\left(K_1 \leftthreetimes \langle x_l \rangle\right) \leftthreetimes \langle x_t \rangle\right) \leftthreetimes \langle x_s \rangle$, де без порушення загальності вважаємо $l < t < s$. Крім того, $K_1 = \langle z_{lts} \rangle \times \langle u_{lt} \rangle \times \langle u_{ls} \rangle \times \langle u_{st} \rangle$. За лемою 3 і попереднім F_3 — вільна група рангу 3 з класу $\delta \backslash \Delta_2$. Покладемо $Z_1 = \prod_{i<j<k} \langle z_{ijk} \rangle$, де $(i, j, k) \neq (l, t, s)$, $U_1 = \prod_{i<j} \langle u_{ij} \rangle$, де $(i, j) \notin \{(l, t), (l, s), (t, s)\}$. Далі, нехай $K_2 = Z_1 \times U_1$, тоді $F' = K_2 \times K_1$. За комутаторними спів-

відношеннями леми 3 випливає існування групи $\overline{X}_i = K_2 \leftthreetimes \langle x_i \rangle$, $i \in I_1 = I \setminus \{l, t, s\}$. Очевидно, що $\overline{X}_i \lhd F$, а тому підгрупа $\overline{F}_{lts} = \langle \overline{X}_i | i \in I_1 \rangle$ нормальна в F і $\overline{F}_{lts} = F$. Зрозуміло, що $\overline{F}_{lts} = \langle X_1 \rangle$, де $X_1 = \{x_i | i \in I_1\}$. Оскільки F/F' — абелева група, то $F_3 \cap \overline{F}_{lts} = K_1 \cap K_2 = \{1\}$, а тому $F = \overline{F}_{lts} \leftthreetimes F_3$. Теорему доведено.

Згідно з [9, с. 33] група A породжує многовид α, якщо α є найменшим многовидом груп, що містить групу A.

Теорема 2. *Многовид δ породжується кожною своєю вільною групою F_3 рангу 3 з нецентральним комутантом.*

Доведення. За наслідком 1 многовид δ задається тотожністю $[x, y, z] = [y, z, x]$. За теоремою 1 будь-яка вільна група $F(X)$ із δ з системою вільних твірних X і нецентральним комутантом має вигляд $F(X) = \overline{F}_{ijk} \leftthreetimes F(x_i, x_j, x_k)$, де $i \neq j$, $i \neq k$, $j \neq k$ і $F(x_i, x_j, x_k) = F_3$ — вільна група рангу 3 із многовиду δ з нецентральним комутантом, $\overline{F}_{ijk} = \langle X_1 \rangle$, де $X_1 = X \setminus \{x_i, x_j, x_k\}$. Очевидно, що $\bigcap_{i,j,k} \overline{F}_{ijk} = \{1\}$. Звідси випливає, що група $F(X)$ ізоморфна підгрупі декартового добутку вільних груп типу F_3 рангу 3 із $\delta \setminus \Delta_2$. Зрозуміло, що $F_3 = F(a, b, c)$ містить вільну групу F_2 рангу 2 із $\Delta_2 \setminus \Delta_1$. Нехай група $G \in \delta \setminus \Delta_2$, M — система твірних групи G і $|M| = \rho$. Група G ізоморфна фактор-групі деякої вільної групи $F(X)$ із $\delta \setminus \Delta_2$. За попереднім $F(X)$ — підгрупа декартового добутку груп типу F_3. Це і означає, що многовид δ породжується групою типу F_3, оскільки будь-які дві вільні групи одного і того ж рангу ізоморфні між собою. Теорему доведено.

Наслідок 4. *Нехай $F = F(a, b, c)$ — вільна група рангу 3 многовиду δ з нецентральним комутантом. Тоді $F = ((F' \leftthreetimes \langle a \rangle) \leftthreetimes \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle c \rangle$, де $|a| = |b| = |c| = \infty$, підгрупа $F' = \langle z \rangle \times \langle u \rangle \times \langle v \rangle \times \langle w \rangle$, $|z| = 3$, $z \in Z(F)$, $|u| = |v| = |w| = \infty$, $z = [a, b, c] = [b, c, a] = [c, a, b]$, $u = [a, b]$, $v = [a, c]$, $w = [b, c]$ і $F' \cap Z(F) = \langle z \rangle \times \langle u^3 \rangle \times \langle v^3 \rangle \times \langle w^3 \rangle$.*

Доведення. За лемою 3 $|I| = 3$, а тому $Z = \langle z_{123} \rangle = \langle z \rangle$, $U = \langle u \rangle \times \langle v \rangle \times \langle w \rangle$ і $F' = K = \langle z \rangle \times U$. Покладемо $T = F' \cap Z(F)$, тоді за наслідком 3 підгрупа $L = \langle z \rangle \times U^3 \subset T$. Доведемо, що $L = T$. Нехай $h \in T \setminus L$. Тоді $h = z^l \cdot u^i \cdot v^j \cdot w^k$, $l \in \{0, 1, 2\}$, і принаймні одне з чисел i, j або k не ділиться на 3. Не порушуючи загальності, вважаємо, що k не ділиться на 3. За лемою 2 на F справедливі всі тотожності леми 1. Зрозуміло, що F/L — нільпотентна група з центральним комутантом F'/L порядку 27. За роботою [14, с. 296] кожний елемент комутанта групи F/L є комутатором елементів із F/L. З цього випливає, без порушення загальності, що елемент $h = w$. Тоді $h \in Z(F)$, що суперечить умові $w \notin Z(G)$. Таким чином, $T = L$. Наслідок доведено.

Наслідок 5. *Нехай $F(x)$ — вільна група з нецентральним комутантом рангу $\rho > 2$. Тоді комутант $F' = Z \times U$ і $Z(F) \cap F' = Z \times U^3$.*

Доведення. Твердження випливає з теореми 2 і наслідку 4.

Теорема 3. *Многовид Δ_2 — єдиний максимальний підмноговид многовиду δ і будь-яка група $G \in \delta \setminus \Delta_2$, всі власні підгрупи якої належать Δ_2, є скінченною 3-породженою групою.*

Доведення. Оскільки решітка $R\delta$ всіх підмноговидів многовиду δ міститься у решітці $R\Delta_3$, і остання, згідно з [4], дистрибутивна, то і $R\delta$ — дистрибутивна решітка. Доведемо, що многовид δ покриває Δ_2. З опису решітки

$R\Delta_3$ [4] і леми 1 випливає, що базис тотожностей многовиду $\gamma \subset \delta$ задається системою $\Sigma(\gamma) = \left\{x^k = 1, [x, y]^l = 1, [x, y, z]^m = 1\right\}$, де $k \,\vdots\, l$ і $m \in \{0, 1\}$. Припустимо, що $\Delta_2 \subset \gamma \subset \delta$. Оскільки група матриць $UT_3(Z)$ — вільна група многовиду Δ_2 [15] і при $k > 0$ або $l > 0$ тотожності з $\Sigma(\gamma)$ на ній не виконуються, то обов'язково $k = 0$ і $l = 0$. Звідси і випливає, що многовид δ покриває многовид Δ_2.

Розглянемо тепер довільний многовид $\beta \subset \delta$, який не міститься у Δ_2, і покажемо, що β не є максимальним елементом у решітці $R\delta$. Припустимо, що δ покриває β, тоді $\beta \vee \Delta_2 = \delta$. Оскільки $R\delta$ — дистрибутивна решітка, то структурний інтервал $I(\beta, \delta)$ перспективний інтервалу $I(\beta \cap \Delta_2, \Delta_2)$ [13, с. 138]. Звідси випливає, що $\beta \cap \Delta_2$ — максимальний підмноговид в Δ_2, що неможливо. Таким чином, Δ_2 — єдиний максимальний елемент решітки $R\delta$.

Розглянемо тепер групу G із δ з нецентральним комутантом, всі власні підгрупи якої належать многовиду Δ_2. Покажемо, що G — скінченна 3-породжена 3-група. Оскільки $G \notin \Delta_2$, то знайдуться елементи $a, b, c \in G$ такі, що $z = [a, b, c] \neq 1$. Тоді підгрупа $H = \langle a, b, c\rangle \in \delta \setminus \Delta_2$, а тому можна вважати, що $H = G$. Таким чином, G є 3-породженою групою, на якій виконується тотожність $[x, y, x] = 1$. За теоремою 1 існує вільна група $F = F(x, y, t)$ рангу 3 із δ і гомоморфізм φ групи F на G. Якщо a, b, c — елементи скінченного порядку, то $|G| < \infty$. Нехай, наприклад, $|c| = \infty$. Без порушення загальності можна вважати, що $\varphi(t) = c$. Тоді група $G = \varphi(\langle x, y\rangle) \leftthreetimes \varphi(\langle t\rangle)$. Група G містить власну підгрупу $H = \langle a, b\rangle \leftthreetimes \varphi\langle c^4\rangle$, яка не збігається з G. Оскільки $\left[a, b, c^4\right] = z \neq 1$, то одержуємо суперечність з умовою. З цього випливає, що G — скінченна група. Із нільпотентності групи G випливає розклад $G = T \times D$, де T — силовська 3-підгрупа, а D — її холівське доповнення. Оскільки $[a, b, c] = z$ і $|z| = 3$, то підгрупа $T \notin \Delta_2$, тоді за умовою $D = \{1\}$ і $G = T$. Теорему доведено.

Означення. *Група* $G \in \delta \setminus \Delta_2$ *така, що всі власні підгрупи і фактор-групи належать* Δ_2, *називається* δ*-критичною групою.*

Лема 4. *Нехай* G — δ*-критична група. Тоді* $G = \langle a, b, c\rangle$ — *скінченна 3-породжена 3-група; комутант* $G' = \langle d\rangle \times D$, *де* $|d| = 3^\nu$, $\nu > 0$; D — *елементарна абелева 3-група і* $|D| \in \{9, 27\}$; $[a, b, c] = z \in Z(G)$, $\langle z\rangle = \Omega(\langle d\rangle) = \left[G', G\right]$. *Крім цього, якщо* $\nu = 1$, *то* $|D| = 27$; *якщо* $\nu > 1$, *то* $|D| = 9$, $|d| = [a, b]$, $\langle d\rangle \lhd G$.

Доведення. Нехай G задовольняє умову леми, тоді за теоремою 3 $G = \langle a, b, c\rangle$ — скінченна 3-породжена 3-група. За наслідком 3 $G'' = \{1\}$, взаємний комутант $\left[G', G\right] \subset Z(G)$ і $\left[G', G\right]^3 \subset \{1\}$. Зрозуміло, що G' — скінченна абелева група, а тому в G' існує максимальна циклічна підгрупа $\langle d\rangle$ така, що $[a, b, c] = z \in \langle d\rangle$ і $G' = \langle d\rangle \times D$ для деякої підгрупи D. Оскільки $G \notin \Delta_2$, то $z \neq 1$ і $\langle z\rangle = \Omega(\langle d\rangle)$, $|d| = 3^\nu$, $\nu > 0$. За наслідком 3 $D^3 \subset Z(G)$ і $d^3 \in Z(G)$. Зрозуміло, що фактор-група $G/D^3 \in \delta \setminus \Delta_2$. За умовою леми $D^3 = \{1\}$. За теоремою 2 існує вільна група F рангу 3 така, що G ізоморфна деякій фактор-групі F/N, де $N \cap \left[F', F\right] = \{1\}$ і $\left[F', F\right] = Z$, $|Z| = 3$, $Z \leq Z(F)$. Можна вважати, що $\left[G', G\right] = Z = \langle z\rangle$, $|z| = 3$ і $[a, b, c] = z$. За теоремою 1 комутант $G' = \langle z, u, v, w\rangle$, $u = [a, b]$, $v = [a, c]$, $w = [b, c]$. За наслідком 4 $T = Z(F) \cap K$, де $K = F'$ і K/T — група порядку 27. Звідси випливає, що D — елементарна абелева група, для якої $|D| \in \{9, 27\}$. Зрозуміло, що $|D| = 27$ тоді і тільки тоді, коли $\nu = 1$, G' — елементарна абелева підгрупа порядку 81.

Нехай $\nu > 1$. Тоді $T = \langle d^3 \rangle$, а отже, $|D| = 9$. Оскільки $\nu > 1$, то в G знайдуться елементи x і y такі, що $|[x, y]| = 3^\nu$. Без порушення загальності можна вважати, що $[a, b] = d = u$. Оскільки $\left[G', G\right] = \langle z \rangle \le \langle d \rangle$, то $\langle d \rangle = \langle u \rangle \lhd G$. Лему доведено.

Теорема 4. *δ-Критичні групи G з елементарним абелевим комутантом вичерпуються групами типів:*

I. $G = ((((\langle z \rangle \times \langle u \rangle \times \langle v \rangle \times \langle w \rangle) \rightthreetimes \langle a \rangle) \rightthreetimes \langle b \rangle) \rightthreetimes \langle c \rangle$, *де* $|z| = |u| = |v| = |w| = |a| = |b| = |c| = 3$; $[a, b, c] = z \in Z(G)$; $[a, b] = u$, $[a, c] = v$, $[b, c] = w$, $[u, a] = [u, b] = [v, a] = [v, c] = [w, b] = [w, c] = 1$, $[u, c] = [w, a] = z$.

II. $G = ((\langle a \rangle \rightthreetimes D) \rightthreetimes \langle b \rangle) \rightthreetimes \langle c \rangle$, $|a| = 3^\alpha$, $\alpha > 1$; $|b| = |c| = 3$, D — *абелева група типу* (3, 3, 3), $[\langle a \rangle, D] = \langle z \rangle = \Omega(\langle a \rangle) \subset Z(G)$; $G' = \langle z \rangle \times D$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — група з умови теореми. Тоді за теоремою 3 і лемою 4 $G' = \langle z \rangle \times D$, $G = \langle a, b, c \rangle$, $[a, b, c] = z$, $|z| = 3$, $z \in Z(G)$, $D = \langle u \rangle \times \langle v \rangle \times \langle w \rangle$, $[a, b] = u$, $[a, c] = v$, $[b, c] = w$, $[u, a] = [u, b] = [v, a] = [v, c] = [w, b] = [w, c] = 1$, $[u, c] = [w, a] = z$. Зрозуміло, що $|a| = 3^\alpha$, $|b| = 3^\beta$, $|c| = 3^\gamma$. Без порушення загальності будемо вважати, що $\alpha \ge \beta \ge \gamma > 0$. Нехай $\alpha = 1$, тоді G — група типу I. Розглянемо випадок $\alpha > 1$. Оскільки $G \in \delta$, то G — нільпотентна група класу 3, а тому $\left[a^3, b\right] = [a, b]^3 \cdot [a, b, a]^3 = [a, b]^3 = u^3 = 1$ і, аналогічно, $\left[a^3, c\right] = 1$. Звідси $a^3 \in Z(G)$. Припустимо, що $\langle a \rangle \cap \langle z \rangle = \{1\}$, тоді $G/\langle a^3 \rangle$ — власна фактор-група групи G з нецентральним комутантом, що суперечить δ-критичності групи G. Звідси $\langle z \rangle = \Omega(\langle a \rangle)$. Оскільки $[a, u] = [a, v] = 1$, $[w, a] = z$, то в групі $A = \langle a, D \rangle$ підгрупа $\langle a \rangle$ нормальна, а тому $A = \langle a \rangle \rightthreetimes D$. Оскільки $G' = \Omega(\langle a \rangle) \times D$, то $A \lhd G$. Покладемо $B = A \cdot \langle b \rangle$ і $C = A \cdot \langle c \rangle$. Зрозуміло, що $G = B \cdot C$. Припустимо, що $\beta > 1$ і β — найменше таке число. Тоді за попереднім $\Omega(\langle a \rangle) = \Omega(\langle b \rangle) = \langle z \rangle$. Маємо $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a^m \rangle = \langle b^m \rangle$, де $m > 0$, $n > 0$, $m < \alpha$, $n < \beta$ і $m \ge n$. Крім того, $a^{i3^m} = b^{3^n}$. Покладемо $d = a^h \cdot b$, де $h = -i \cdot 3^{m-n}$. Оскільки $\left[G', G\right] \le Z(G)$, то $d^{3^n} = \left(a^h \cdot b\right)^{3^n} = b^{3^n} \cdot a^{-i3^m} \cdot [a, b]^{(3^n+1)3^n/2} = b^{3^n} \cdot a^{-i3^m} = 1$.

Можна вважати $B = A \cdot \langle d \rangle$, а оскільки $n < \beta$, то одержуємо суперечність з мінімальністю числа β. Отже, $\beta = 1$ і, аналогічно, $\gamma = 1$. Маємо $G = (A \rightthreetimes \langle b \rangle) \rightthreetimes (\langle c \rangle)$ і $D = \langle u \rangle \times \langle v \rangle \times \langle w \rangle$. Таким чином, G — група типу II і необхідність встановлено.

Достатність. Нехай G — група одного з типів I або II. Тоді $G = \langle a, b, c \rangle$ — скінченна 3-група; $1 \ne [a, b, c] = z = [b, c, a] = [c, a, b] \in Z(G)$. За теоремою 1 і наслідком 1 $G \in \delta/\Delta_2$. Зрозуміло, що $Z(G) = \langle z \rangle \cdot \langle a^3 \rangle$. В групі G типу I $\exp G = 3$, а в групі G типу II $\exp G = 3^\alpha$, $\alpha > 1$. Розглянемо довільну максимальну підгрупу $H \le G$ і доведемо, що $H \in \Delta_2$. Оскільки підгрупа $\Phi(G) \subset H$, то $|H/\Phi(G)| = 9$, а тому $H = \Phi(G) \cdot L$, де $L = \langle x, y \rangle$. За теоремою 1 $L' \le Z(L)$, $L' \le \Phi(G) = Z(G) \times D$ і, крім того, $L' \le Z(H)$. У цьому випадку $H' = (\Phi(G))' \cdot L' \cdot [\Phi(G), L]$. Оскільки $[\Phi(G), L] \le \langle z \rangle \le Z(G)$, то $H' \le \langle z \rangle \cdot L' \le Z(H)$, тобто $H \in \Delta_2$. Нехай $N \lhd G$, група G є групою типу I або II і $N \ne \{1\}$. Якщо G породжується двома елементами, то за теоремою 1 $G/N \in \Delta_2$. Нехай G не породжується двома елементами. Якщо $z \in N$, то $G/N \in \Delta_2$. Припустимо, що

$z \notin N$. Тоді $\langle z \rangle \cap N = \{1\}$. З цього випливає, що жодний із твірних елементів групи G не належить N. Звідси $N \leq \Phi(G)$ і $\Phi(G) = Z(G) \times D$, де $Z(G) = \langle z, a^3 \rangle$, $G' = \langle z \rangle \times D$. Таким чином, N — елементарна абелева підгрупа. Зрозуміло, що $u, v, w \notin N$ і підгрупа N не містить жодного комутатора ваги 2. Звідси випливає, що $N = \{1\}$, а це суперечить умові. Теорему доведено.

1. *Головин О. Н., Гольдина Н. П.* Подгруппы свободных метабелевых групп // Мат. сб. – 1955. – **37**. – С. 323 – 336.
2. *Сесекин Н. Ф.* О классификации метабелевых групп без кручения с конечным числом образующих // Учен. зап. Урал. ун-та. – 1956. – **19**. – С. 27 – 51.
3. *Conrad P.* Skew tensor products and groups of class two // Nagoya Math. J. – 1963. – **23**. – P. 15 – 51.
4. *Ремесленников В. Н.* Два замечания о 3-ступенных нильпотентных группах // Алгебра и логика (семинар). – 1965. – **4**, № 2. – С.59 – 65.
5. *Haimo F.* Power type endomorphisms of some class 2 groups // Pacif. J. Math. – 1955. – **5**. – P. 201 – 213.
6. *Jonsson B.* Varieties of groups of nilpotence three // Notic. Amer. Math. Soc. – 1966. – **13**, № 4. – P. 488.
7. *Levi F.* Groups in which the commutator operation satisfies certain algebraic conditions // J. Indian Math. Soc. – 1942. – **6**. – P. 87 – 97.
8. *Ширшов А. И.* О некоторых группах, близких к энгелевым: Избранные труды. Кольца и алгебры. – М.: Наука, 1984. – С. 106 – 114.
9. *Нейман Х.* Многообразия групп. – М.: Мир, 1969. – 264 с.
10. *Higman G.* Some remarks on varieties of groups // Quart. J. Math. – 1959. – P. 165 – 178.
11. *Robinson D. J. S.* Finiteness conditions and generalized soluble groups. Pt. 2. – Berlin: Springer, 1972. – 254 p.
12. *Курош А. Г.* Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
13. *Холл М.* Теория групп. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 468 с.
14. *Cher Ving.* On finite p-groups with cyclic commutator subgroups // Arch. Math. – 1982. – **39**, № 4. – P. 295 – 298.
15. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. – М.: Наука, 1982. – 288 с.

Одержано 10.05.2000,
після доопрацювання — 30.10.2000