УДК 517.9

В. В. Федоренко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ ТРАЕКТОРИЙ ИНТЕРВАЛОВ ПРОСТЕЙШИХ ОДНОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

We consider dynamical systems generated by continuous maps of an interval into itself. We investigate the asymptotic behavior of trajectories of subsets of the interval. In particular, we prove that if ω-limit set of an arbitrary trajectory is a fixed point, then a topological boundary of a trajectory of any subinterval exists.

Розглядаються динамічні системи, породжені неперервними відображеннями інтервалу в себе. Досліджується асимптотична поведінка траєкторій підмножин інтервалу. Зокрема доведено, що якщо ω-гранична множина довільної траєкторії — нерухома точка, то топологічна границя траєкторії будь-якого підінтервалу існує.

Пусть $I = [0, 1]$ — интервал прямой R^1 и $f \in C^0(I, I)$ — непрерывное отображение интервала I в себя. Пусть также $f^n = f \circ f^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$, а f^0 — тождественное отображение.

Последовательность $f^n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, называется траекторией точки $x \in I$ динамической системы (I, f, n) и обозначается через f_x. Точка $x' \in I$ называется ω-предельной точкой траектории f_x, если для любой окрестности $U(x')$ точки x' существует бесконечная последовательность моментов времени $n_1 > n_2 > \ldots > n_i > \ldots$ такая, что $f^{n_i}(x) \in U(x')$. Множество всех ω-предельных точек траектории f_x называется ω-предельным множеством траектории f_x и обозначается через $\omega_f(x)$. Отметим, что

$$\omega_f(x) = \bigcap_{n \geq 0} \overline{\bigcup_{j \geq n} f^j(x)}.$$

Аналогично понятию траектории точки можно ввести понятие траектории подмножества из I. Пусть M — произвольное непустое подмножество из I (возможно точка) и $f^n(M) = \bigcup_{x \in M} f^n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Последовательность $f^n(M)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, будем называть траекторией множества M и обозначать через f_M. Необходимость исследования поведения траекторий множеств, а не отдельных точек, естественно возникает в различных задачах (см. подробнее [1]), в частности, при исследовании асимптотического поведения решений разностных уравнений с непрерывным временем [2].

Существуют классы динамических систем, у которых поведение траекторий множеств совсем не похоже на поведение траекторий точек этой системы. Такой класс систем порождают, например, так называемые растягивающие отображения: $f \in C^0(I, I)$ имеет свойство растяжения на интервале I, если для любого открытого подынтервала J интервала I существует n_0, зависящее от J, такое, что $f^{n_0}(J) = I$. Представителем, имеющим многие типичные свойства растягивающих отображений, является отображение $f(x) = 1 - 2|x - 1/2|$, $x \in I$, достаточно подробно исследованное методами символической динамики. Траектория любого невырожденного подынтервала J системы, порожденной растягивающим отображением, имеет простое поведение: начиная с некоторого момента „времени" принимает значения, только равные I. В то же время, траектории точек допускают широкий спектр динамического поведения: существуют периодические траектории сколь угодно большого периода, существует континуум всюду плотных на интервале I траекторий и т. д.

С другой стороны, есть класс динамических систем (I, f, n), у которых асимптотическое поведение траекторий множеств похоже на поведение траекторий точек. Так, для связных подмножеств интервала, т. е. интервалов, схожесть в поведении траекторий точек и траекторий интервалов описывает следующая теорема.

Теорема 1. *Если ω-предельное множество траектории любой точки динамической системы (I, f, n) является неподвижной точкой, то топологический предел траектории любого подынтервала из I существует.*

Иначе говоря, в теореме 1 утверждается, что из существования топологического предела траектории любого вырожденного интервала следует существование топологического предела траектории любого (открытого, полуоткрытого, замкнутого, вырожденного) подынтервала. Справедливость обратного утверждения очевидна.

Класс отображений, для которого ω-предельное множество любой траектории является неподвижной точкой, достаточно полно исследован — известно много критериев принадлежности отображения этому классу, использующих различные понятия топологической динамики [3, 4]. Эти критерии, дополненные новым, а именно, использующим понятие топологического предела, приведены в конце работы.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится несколько лемм. Ниже используются следующие обозначения: $\langle a, b\rangle$ — замкнутый интервал, концами которого являются точки a и b; $\overline{\mathrm{lt}}\, f^n(J)$ — верхний топологический предел траектории интервала J; $\underline{\mathrm{lt}}\, f^n(J)$ — нижний топологический предел траектории интервала J; $\mathrm{lt} f^n(J)$ — топологический предел траектории интервала J; $\omega_f(J) = \bigcup_{x\in J} \omega_f(x)$.

Лемма 1. *Если ω-предельное множество траектории любой точки динамической системы (I, f, n) является неподвижной точкой, то $\underline{\mathrm{lt}}\, f^n(J) \supset \omega_f(J)$ для любого подынтервала J интервала I.*

Доказательство. Пусть J — любой подынтервал интервала I, x — любая точка из J, а x' — ω-предельное множество траектории f_x, которое является неподвижной точкой. Докажем, что $\underline{\mathrm{lt}}\, f^n(J) \supset x'$. Действительно, из определения $\omega_f(x)$ следует, что для любой окрестности $U(x')$ существует i_0 такое, что $f^i(x) \in U(x')$ при всех $i \geq i_0$. Поэтому $U(x')$ пересекается со всеми, кроме конечного их числа, множествами $f^n(J)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. А это и означает, что нижний топологический предел траектории f_J содержит множество x'.

Лемма 2. *Если ω-предельное множество траектории любой точки динамической системы (I, f, n) является неподвижной точкой, то $\overline{\mathrm{lt}}\, f^n(J)$ — замкнутый инвариантный интервал (возможно, вырожденный) для любого подынтервала J из I.*

Доказательство. Известно [5], что если топологическое пространство компактно и нижний топологический предел не пуст, то верхний топологический предел последовательности связных множеств связен. Из леммы 1 следует, что нижний топологический предел траектории любого подынтервала J из I динамической системы, удовлетворяющей условию леммы 2, не пуст. Поэтому верхний топологический предел траектории любого подынтервала J — замкнутое связное подмножество интервала I, т. е. замкнутый интервал, возможно вырожденный. Верхний топологический предел траектории интервала J можно представить в следующем виде [6]: $\overline{\mathrm{lt}}\, f^n(J) = \bigcap_{n\geq 0} \overline{\bigcup_{j\geq n} f^j(J)}$. Отсюда следует инвариантность верхнего топологического предела траектории любого подынтервала J, которая доказывается так же, как и инвариантность ω-предельного множества траектории точки [7].

Лемма 3. *Если ω-предельное множество траектории любой точки динамической системы (I, f, n) является неподвижной точкой, то любой замкнутый невырожденный инвариантный интервал содержит не менее двух неподвижных точек.*

Доказательство. Пусть $[a, b]$ — любой замкнутый инвариантный невырожденный подынтервал интервала I. Если обе точки a и b неподвижны, то утверждение очевидно. Пусть теперь хотя бы одна точка из них отлична от неподвижной, например, точка b. Поскольку $[a, b]$ — инвариантный интервал и $f(b) \neq b$, то существует точка $x \in [a, b)$ такая, что $f(x) = b$. Наибольшую из таких точек обозначим через c. Имеем $f(c) > c$ и $f(b) < b$. Следовательно, интервал $[c, b]$ содержит неподвижную точку.

Поскольку $[a, b]$ — инвариантный интервал, то множество $\{x \in [a, b] \mid f(x) = a\}$ непусто. Пусть d — любая точка этого множества. Известно [3], что если ω-предельное множество траектории любой точки динамической системы (I, f, n) является неподвижной точкой, то для любого $x \in I$ либо $x \notin f(\langle x, f(x)\rangle)$, либо $x = f(x)$. Отсюда следует, что $f(x) > c$ для любого $x \in [c, b]$. Поэтому $d < c$. В силу выбора точек d и c имеем $f([d, c]) = [a, b]$. Поэтому интервал $[d, c]$ также содержит неподвижную точку, отличную от той, которая принадлежит интервалу $[c, b]$.

Лемма 4. *Пусть ω-предельное множество траектории любой точки динамической системы (I, f, n) является неподвижной точкой. Если J — замкнутый интервал, концами которого являются неподвижные точки, и $\omega_f(J) \subset J$, то $f(J)$ — инвариантный интервал.*

Доказательство. Поскольку концами интервала $J = [a, b]$ являются неподвижные точки, то $f(J) \supseteq J$. Минимум функции $f(x)$ на интервале J обозначим через m_*, а максимум — через m^*. При этом $m_* \leq a$ и $m^* \geq b$. Если $m_* = a$ и $m^* = b$, то $f(J) = J$ и лемма доказана.

Пусть, например, $m^* > b$. Пусть также $x_{m^*} = \max\{x \in J \mid f(x) = m^*\}$. Имеем $f([x_{m^*}, b]) \supseteq [b, m^*]$. Поскольку $\omega_f(J) \subset J$, то интервал (b, m^*) не содержит неподвижных точек отображения f. Поэтому либо $f(x) > x$ при $x \in (b, m^*)$, либо $f(x) < x$ при $x \in (b, m^*)$. Если $f(x) > x$ при $x \in (b, m^*)$, то на интервале $[m^*, 1]$ существуют неподвижные точки. При этом наименьшая из них является ω-предельным множеством для некоторых точек из интервала J, что невозможно в силу условия $\omega_f(J) \subset J$. Итак, если $m^* > b$, то $f(x) < x$ при $x \in (b, m^*)$. Из условия леммы 4 следует [3], что для любого $x \in I$ либо $x \notin f(\langle x, f(x)\rangle)$, либо $x = f(x)$. Следовательно, $f([x_{m^*}, m^*]) \subset [x_{m^*}, m^*]$. Если $m_* = a$, то отсюда следует, что $f(J) = [a, m^*]$ — инвариантный интервал.

Пусть теперь $m^* > b$ и $m_* < a$. Множество $\{x \in J \mid f(x) = m_*\}$ является непустым и замкнутым. Минимальную его точку обозначим через x_{m_*}. Аналогично тому, как доказывалось включение $f([x_{m^*}, m^*]) \subset [x_{m^*}, m^*]$, доказывается, что $f([m_*, x_{m^*}]) \subset [m_*, x_{m^*}]$. Из этих двух включений и того, что $f(J) \supset \supset J$, следует инвариантность интервала $f(J) = [m_*, m^*]$.

Доказательство **теоремы 1.** Если ω-предельное множество траектории любой точки динамических систем (I, f, n) является неподвижной точкой, то для любого интервала $J \subset I$, $\overline{\mathrm{lt}}\, f^n(J)$ — замкнутый инвариантный интервал (лемма 2). Обозначим его через J_*. Если J_* — вырожденный интервал, т. е. точка, то $\mathrm{lt}\, f^n(J)$ существует и равен J_*.

Пусть J_* — невырожденный интервал, который обозначим через $[a, b]$. В силу леммы 3 на интервале J_* существуют по крайней мере две неподвижные точки. Минимальную неподвижную точку интервала J_* обозначим через α, а максимальную — через β. Пусть $U(\alpha)$ и $U(\beta)$ — произвольные непересекающиеся окрестности соответственно точек α и β. Точки α и β являются ω-предельными множествами для некоторых точек c и d из J. Поэтому существуют натуральные числа k, m такие, что $f^i(c) \in U(\alpha)$ при $i \geq k$ и $f^i(d) \in U(\beta)$ при $i \geq m$. Отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 > 0$ такое, что $[\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon] \subset f^n(J)$ при $n > n_0$. А это означает, что любая точка интервала (α, β) принадлежит всем множествам $f^n(J)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, за исключением конечного их числа. Итак, $[\alpha, \beta] \subseteq \underline{\mathrm{lt}}\, f^n(J)$. Если $[\alpha, \beta] = [a, b]$, то $\mathrm{lt}\, f^n(J)$ существует и равен J_*.

Пусть теперь $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Так как $a \leq \alpha < \beta \leq b$, то возможны только три случая: 1) $a = \alpha$ и $\beta < b$; 2) $a < \alpha$ и $\beta = b$; и 3) $a < \alpha$ и $\beta < b$. Рассмотрим только первый из них, доказательство в остальных случаях аналогично.

Из инвариантности $[a, b]$ следует, что множество $\{x \in [a, b] \mid f(x) = b\}$ не пусто. Наибольшую точку этого множества обозначим через c. Так как β — наибольшая неподвижная точка на интервале $[a, b]$, то $c < \beta$. Поскольку α, β — ω-предельные точки для точек из интервала J, то для любого ε из интервала $(0, \beta - c)$ существует $n_0 > 0$ такое, что $f^n(J) \supset [\alpha + \varepsilon, c]$ при всех $n \geq n_0$. Отсюда, поскольку $f(c) = b$, следует, что $f^{n+1}(J) \supset [\alpha + \varepsilon, b]$ при всех $n \geq n_0$. Поэтому нижний топологический предел последовательности $f^n(J)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, содержит каждую точку интервала $[a, b]$. Следовательно, $\mathrm{lt}\, f^n(J)$ существует и равен $f([a, b])$. Доказательство завершено.

Заметим, что в ходе доказательства теоремы 1 показано, что топологический предел траектории подынтервала и ω-предельные множества траекторий точек из этого подынтервала связаны соотношением

$$\mathrm{lt}\, f^n(J) = f\big([\inf \omega_f(J), \sup \omega_f(J)]\big).$$

В заключение работы приведем несколько критериев, характеризующих рассматриваемый класс отображений [3, 4]. Приведем определения используемых ниже понятий. Пусть $\mathrm{Fix}\, f = \{x \in I \mid f(x) = x\}$ — множество неподвижных точек отображения f; $\mathrm{Per} f = \bigcup_{n \geq 0} \mathrm{Fix}\, f^n$ — множество периодических точек отображения f. Точка $x \in I$ называется устойчивой по Пуассону, если для любой окрестности $U(x)$ точки x существует бесконечная последовательность моментов „времени" $n_1 > n_2 > \ldots > n_i > \ldots$ такая, что $f^{n_i}(x) \in U(x)$. Если $n_i = ni$ (n зависит от U), то x называется почти периодической; если последовательность $n_1 > n_2 > \ldots > n_i > \ldots$ относительно плотная, то точка x

называется рекуррентной. Точка $x \in I$ называется цепно-рекуррентной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность точек $x_i \in I$, $i = 0, 1, \ldots, n$, такая, что $x_0 = x = x_n$ и $|x_{i+1} - f(x_i)| < \varepsilon$ при любом $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Теорема А. *Для отображения $f \in C^0(I, I)$ следующие утверждения эквивалентны*:

1) *каждая периодическая точка отображения f является неподвижной точкой*;

2) *каждая неподвижная точка отображения f^2 является неподвижной точкой отображения f*;

3) ω-*предельное множество траектории любой точки является неподвижной точкой*;

4) $\forall x \in I$ *и* $m > 1$ *точки* $f^i(x)$ *при* $i > m$ *лежат по одну сторону от точки* $f^m(x)$;

5) $\forall x \in I$ *либо* $x \notin f(\langle x, f(x)\rangle)$, *либо* $x = f(x)$;

6) *каждая почти периодическая точка отображения f является неподвижной точкой*;

7) *каждая цепно-рекуррентная точка отображения f является неподвижной точкой*;

8) *топологический предел траектории любого подынтервала существует.*

Существуют отображения, для которых утверждения 1 – 8 теоремы А не выполняются, однако имеют место их аналоги для некоторой итерации исходного отображения [3]. Так, из теоремы о сосуществовании периодов периодических траекторий [8] следует, что если отображение f имеет периодическую траекторию периода 2^k при некотором k и не имеет периодической траектории периода 2^{k+1}, то любая периодическая точка отображения $g = f^{2^k}$ является неподвижной точкой. Поэтому теорему 1 можно обобщить.

Теорема 2. *Для отображения $f \in C^0(I, I)$ следующие утверждения эквивалентны*:

1) *существует* k_1 *такое, что* ω-*предельное множество траектории любой точки является периодической траекторией периода* 2^i, $0 \le i \le k_1$;

2) *существует* k_2 *такое, что топологический предел траектории любого подынтервала динамической системы* $(I, f^{2^{k_2}}, n)$ *существует.*

Заметим, что если отображение f гладкое или кусочно-монотонное, то для динамической системы (I, f, n) с замкнутым множеством периодических точек существует m такое, что f имеет периодическую траекторию периода 2^m при некотором m и не имеет периодической траектории периода 2^{m+1} [4, 9]. Поэтому для таких отображений так же можно сформулировать аналог теоремы 2.

Теорема 3. *Для гладкого или кусочно-монотонного отображения f следующие утверждения эквивалентны*:

1) *существует* m_1 *такое, что* ω-*предельное множество траектории любой точки является периодической траекторией периода* 2^i, $0 \le i \le m_1$;

2) *существует* m_2 *такое, что топологический предел траектории любого подынтервала динамической системы* $(I, f^{2^{m_2}}, n)$ *существует*;

3) *множество периодических точек отображения* f *замкнуто.*

И в заключение работы сформулируем гипотезу: для кусочно-линейного отображения f существует l такое, что топологический предел траектории любого открытого подынтервала динамической системы (I, f^l, n) существует.

1. *Sharkovsky A. N., Romanenko E. Yu.* Ideal turbulence: attractors of deterministic systems may lie in the space of random fields // Intern. J. Bifurcation and Chaos. – 1992. – **2**. – P. 31–36.
2. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. – К.: Наук. думка, 1986. – 280 с.
3. *Шарковский А. Н., Коляда С. Ф., Сивак А. Г., Федоренко В. В.* Динамика одномерных отображений. – К.: Наук. думка, 1989. – 216 с.
4. *Block L. S., Coppel W. A.* Dynamics in one dimension. – Berlin, Heidelberg: Springer – Verlag, 1992. – 249 p.
5. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. – М.; Л.: ОНТИ, 1937. – 304 с.
6. *Куратовский К.* Топология, т. 1. – М.: Мир, 1966. – 594 с.
7. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. 2-е изд. – М.; Л.: Гостехиздат, 1949. – 550 с.
8. *Шарковский А. Н.* Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя // Укр. мат. журн. – 1964. – **16**, № 1. – С. 61–71.
9. *Федоренко В. В., Шарковский А. Н.* Непрерывные отображения отрезка с замкнутым множеством периодических точек // Исследование дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1980. – С. 137–145.

Получено 05.12.00