УДК 512.64

В. М. Прокіп (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

ПРО ОДИН КЛАС ДІЛЬНИКІВ БАГАТОЧЛЕННИХ МАТРИЦЬ НАД ОБЛАСТЯМИ ЦІЛІСНОСТІ

We establish conditions for the existence of a unital divisor of polynomial matrix over an integral domain of zero characteristic in the case where its eigenvalues are given.

Встановлено умови існування унітального дільника для багаточленної матриці над областю цілісності характеристики нуль, коли відомі її власні значення.

Нехай R — область цілісності з одиницею e характеристики нуль. Введемо позначення: R_n та $R_n[x]$ — кільця матриць порядку $n \geq 2$ над R та кільцем багаточленів $R[x]$; I — одинична, а O — нульова розмірності $n \times n$ матриці; $A^*(x)$ — взаємна матриця до $A(x) \in R_n[x]$, тобто $A(x)A^*(x) = A^*(x)A(x) = I \det A(x)$.

Задача про факторизацію матриці $A(x) \in R_n[x]$, тобто зображення її у вигляді добутку $A(x) = B(x)C(x)$, де $B(x) \in R_n[x]$, є досить нетривіальною в розумінні встановлення умов існування таких факторизацій. З огляду на [1] будемо досліджувати цю задачу при умові, що $B(x) = Ix^r - B_1x^{r-1} - \ldots - B_r$, $B_j \in R_n$, $1 \leq j \leq r$, — унітальна багаточленна матриця степеня $r \geq 1$ з визначником $\det B(x) = b(x) = (x-b_1)^{k_1}(x-b_2)^{k_2}\ldots(x-b_m)^{k_m}$, $b_i \in R$, $i = 1, 2, \ldots, m$. У такій постановці цю задачу розв'язано в [2, 3] для неособливих багаточленних матриць над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль. Проте виникають труднощі при поширенні результатів із [2, 3] на багаточленні матриці над іншими полями. У зв'язку з цим зазначимо, що залишається відкритою задача про факторизацію матриці $A(x) \in R_n[x]$ у випадку, коли R є тілом. У цій статті методами лінійної алгебри та теоретико-кільцевими методами дослідження структури матриць над областями головних ідеалів при деяких обмеженнях встановлено необхідні та достатні умови існування унітального дільника $B(x)$ матриці $A(x) \in R_n[x]$, $\operatorname{rank} A(x) \geq n-1$, коли задано її власні значення. Такий підхід дозволив розширити клас багаточленних матриць над полем, для яких можливе виділення унітального дільника.

Встановимо допоміжні результати, які мають і самостійний інтерес. Нехай $R = K$ — область головних ідеалів. Для матриці $A \in K_n$, $\operatorname{rank} A = r$, існують матриці $U, V \in GL(n, K)$ такі, що $UAV = F_A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_{r-1}, a_r, 0, \ldots, 0)$ — діагональна матриця з елементами $a_j \neq 0$, $1 \leq j \leq r$, на головній діагоналі, причому $a_1 \mid a_2 \mid \ldots \mid a_r$. Матрицю F_A називають канонічною діагональною формою (к. д. ф.) матриці A. Надалі через d_A будемо позначати н. с. д. мінорів $(n-1)$-го порядку матриці $A \in K_n$.

Лема 1. *Нехай для матриці* $A \in K_n$, $\operatorname{rank} A \geq n-1$, *існує зображення у вигляді добутку* $A = BC$, *де* $B \in K_n$, $\det B = b \neq 0$. *Якщо* $(b, \det A/b, d_A) = e$, *то для матриць* $U, V \in GL(n, K)$ *таких, що* $UAV = F_A$, *існує матриця* $W \in GL(n, K)$ *така, що* $UBW = F_B$ *і* $W^{-1}CV = F_C$, *тобто* $F_A = F_B F_C$.

Доведення. Якщо $\operatorname{rank} A = n$, то твердження леми випливає з роботи [4]. Нехай $\operatorname{rank} A = n-1$. Із рівності $A = BC$ отримуємо

$$UAV = F_A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_{n-1}, 0) = UBCV, \tag{1}$$

де $U, V \in GL(n, K)$. Для матриці UB існує матриця $W \in GL(n, K)$ така, що

$$UBW = \left\| \begin{matrix} h_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ h_{21} & h_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{n,n-1} & h_n \end{matrix} \right\|,$$

де h_i належать множині неасоційованих елементів кільця K, а h_{ij} — повній системі лишків за модулем h_i, $i>j$, в якій нульовий клас зображено нулем області K [5]. Оскільки $\det B = b$, то елементи b та $(h_1 h_2 \dots h_n)$ асоційовані. Тепер рівність (1) запишемо так: $F_A = UBWW^{-1}CV$. Очевидно, що $W^{-1}CV$ — нижня трикутна матриця рангу $n-1$. Отже,

$$F_A = \left\| \begin{matrix} h_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ h_{21} & h_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots \\ h_{n-1,1} & \dots & h_{n-1,n-2} & h_{n-1} & 0 \\ h_{n1} & \dots & h_{n,n-2} & h_{n,n-1} & h_n \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} g_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ g_{21} & g_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots \\ g_{n-1,1} & \dots & g_{n-1,n-2} & g_{n-1} & 0 \\ g_{n1} & \dots & g_{n,n-2} & g_{n,n-1} & 0 \end{matrix} \right\|.$$

З даної рівності одержуємо $a_i = h_i g_i$, $1 \le i < n$. Оскільки $(b, \det A/b, d_A) = e$, то на підставі викладеного вище отримуємо $((h_1 h_2 \dots h_n), (a_1 a_2 \dots a_{n-1})) = e$. Звідси випливає $h_i = e$, $g_i = a_i$, а $(h_n, g_i) = e$ для всіх $1 \le i \le n-1$. На підставі того, що h_{ij} належать повній системі лишків за модулем h_i, $i > j$, $h_{ij} = g_{ij} = 0$ для всіх $n > i > j \ge 1$, а елементи h_n та b асоційовані. Отже,

$$F_A = \left\| \begin{matrix} e & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & e & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & \dots & 0 & e & 0 \\ h_{n,1} & h_{n,2} & \dots & h_{n,n-1} & h_n \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} a_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} & 0 \\ g_{n,1} & g_{n,2} & \dots & g_{n,n-1} & 0 \end{matrix} \right\|$$

З цієї рівності знаходимо $h_{nj} a_i + h_n g_{nj} = 0$, $j = 1, 2, \dots, n-1$. Оскільки $(h_n, a_i) = e$ для всіх $i < n$, то з останньої рівності отримуємо $h_{nj} = 0(\bmod h_n)$, що неможливо, тому що h_{nj} належать повній системі лишків за модулем h_n, $n > j$.

Отже, $h_{nj} = g_{nj} = 0$ для всіх $j < n$, а для матриць $U, V \in GL(n, K)$ таких, що $UAV = F_A$, існує матриця $W \in GL(n, K)$ така, що $UBW = \operatorname{diag}(e, \dots, e, h_n) = F_B$ і $W^{-1}CV = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_{n-1}, 0) = F_C$. Очевидно, що $F_A = F_B F_C$. Лему доведено.

Елемент $b \ne 0$ із області K будемо називати регулярним, якщо b не є дільником одиниці в K (див. [6, с. 22]). Очевидно, якщо регулярний елемент $b \in K$ є дільником визначника матриці $A \in K_n$, то для A існує факторизація $A = BC$, де $B \in K_n$ така, що $\det B = b$. Проте матриця B заданим елементом b не завжди визначена однозначно (з точністю до асоційованості справа). Нижче наведемо умови, за яких матриця B елементом b визначена однозначно з точністю до асоційованості справа.

Теорема 1. *Нехай регулярний елемент* $b \in K$ *є дільником визначника мат-*

риці $A \in K_n$, $\operatorname{rank} A \geq n-1$, *тобто* $b \mid \det A$. *Якщо* $(b, \det A/b, d_A) = e$, *то для матриці* A *існує зображення у вигляді добутку* $A = BC$ *таке, що* $B \in K_n$ *і* $\det B = b$. *При цьому матриця* B *елементом* b *визначена однозначно з точністю до асоційованості, тобто якщо* $A = B_1 C_1$, *де* $B_1 \in K_n$, $\det B_1 = b$, *то* $B = B_1 T$, *де* $T \in GL(n, K)$.

Доведення. Нехай $A = UF_A V$, де $F_A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ — к. д. ф. матриці A, де $U, V \in GL(n, K)$ і $a_n = 0$, якщо $\operatorname{rank} A = n-1$.

Якщо $\operatorname{rank} A = n-1$, то на підставі умов теореми $(b, d_A) = e$. Розглянемо матрицю $F_1 = \operatorname{diag}(e, \ldots, e, b) \in K_n$. Оскільки $F_A = F_1 F_A$, то для матриці A існує зображення у вигляді добутку $A = UF_1 WW^{-1} F_A V = BC$, де $B = UF_1 W$, а $W \in GL(n, K)$ вибрана так, що $\det B = b$.

Нехай $\operatorname{rank} A = n$. Оскільки $b \mid \det A$, то $b \mid \det F_A$, тобто $a_i = b_i c_i$, $1 \leq i \leq n$, і $b = (b_1 b_2 \ldots b_n)$. Поклавши $F_1 = \operatorname{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ і $F_2 = \operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n)$, отримаємо $F_A = F_1 F_2$. З огляду на те, що $(b, \det A/b, d_A) = e$, маємо $(b, c, d_A) = e$, де $c = (c_1 c_2 \ldots c_n)$. Враховуючи [4], легко показати, що $(b_i, c_j) = e$ для всіх $1 \leq i \leq n$ та $1 \leq j \leq n$, за винятком $i = j = n$. Крім цього, з подільності $a_i \mid a_{i+1}$ дістаємо $b_i \mid b_{i+1}$, $c_i \mid c_{i+1}$, $1 \leq i < n$. Таким чином, для матриці A в даному випадку існує факторизація $A = UF_1 WW^{-1} F_2 V = BC$, де $B = UF_1 W$, а $W \in GL(n, K)$ вибрана так, що $\det B = b$.

Отже, для матриці A, $\operatorname{rank} A \geq n-1$, існує зображення у вигляді добутку $A = BC$, де $B \in K_n$ — неособлива матриця із заданим визначником $\det B = b$ і $(b, \det A/b, d_A) = e$. На підставі леми 1 $F_A = F_B F_C$. Згідно з наслідком 1 із [7] факторизація $A = BC$ єдина з точністю до асоційованості справа, тобто якщо для матриці A існує факторизація $A = B_1 C_1$ така, що $B_1 \in K_n$ і $\det B_1 = b$, то $B = B_1 T$, де $T \in GL(n, K)$ і $C = T^{-1} C_1$. Теорему доведено.

У кільці $R[x]$ розглянемо диференціювання: $\boldsymbol{D}\left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right) = \sum_{i=1}^{m} i a_i x^{i-1}$ і $\boldsymbol{D}^k = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{D}^{k-1})$. Під диференціюванням (похідною) матриці $A(x) = \|a_{ij}(x)\|_1^{m,n}$, де $a_{ij}(x) \in R[x]$, розуміємо її поелементне диференціювання: $\boldsymbol{D}(A(x)) = \|\boldsymbol{D}(a_{ij}(x))\|_1^{m,n}$. Унітальному багаточлену $b(x) = (x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2} \ldots (x-a_r)^{k_r} \in R[x]$ та матриці $A(x) = \|a_{ij}(x)\|_1^{m,n}$ поставимо у відповідність матрицю

$$M[A, b] = \left\| \begin{matrix} H_1 \\ H_2 \\ \ldots \\ H_r \end{matrix} \right\|, \quad \text{де} \quad H_j = \left\| \begin{matrix} A(a_j) \\ A^{(1)}(a_j) \\ \ldots \\ A^{(k_j-1)}(a_j) \end{matrix} \right\|,$$

$A^{(i)}(a_j)$ — значення i-ї похідної матриці $A(x)$ при $x = a_j$. Під записом $N[A, r, b]$ розуміємо значення матриці $(x^r A(x))$ на множині коренів багаточлена $b(x)$.

Матриці $B(x) \in R_n[x]$ та цілому числу $r \geq 0$ поставимо у відповідність матрицю $B_r(x) = B(x) \| Ix^{r-1} \ldots Ix \; I \|$. Очевидно, що $B_0(x) = B(x)$. Для багаточленних матриць над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль такі позначення наведено в [2]. Обґрунтування введених вище понять випливає з наступних лем, які мають і самостійний інтерес.

Лема 2. *Нехай для матриць* $B(x) = Ix^r - B_1 x^{r-1} - B_2 x^{r-2} - \ldots - B_r$, $B_j \in R_n$, $1 \le j \le r$, *та* $A(x) \in R_n[x]$ *виконується рівність* $A(x)B(x) = O(\bmod b(x))$, *де* $b(x) = (x-b_1)^{k_1}(x-b_2)^{k_2}\ldots(x-b_m)^{k_m}$, $b_i \in R$. *Тоді матриця* $Z_0 = \begin{Vmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_r \end{Vmatrix}$ *є розв'язком рівняння* $M[A_r, b]Z = N[A, r, b]$.

Доведення. Рівність $A(x)B(x) = O(\bmod b(x))$ запишемо у вигляді

$$x^r A(x) - A(x)\,\|Ix^{r-1}\ldots Ix\; I\| \begin{Vmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_r \end{Vmatrix} = b(x)C(x).$$

Поклавши $x^r A(x) = F(x)$, цю рівність перепишемо так: $F(x) - A_r(x)Z_0 = b(x)C(x)$. Продиференціювавши обидві частини останньої рівності $k_j - 1$ разів, підставляючи в кожному випадку в ліву та праву частини отриманих рівностей $x = b_j$, отримуємо $F^{(i)}(b_j) = A_r^{(i)}(b_j)Z_0$ для всіх $1 \le i \le k_j - 1$. Оскільки $F(b_j) = A_r(b_j)Z_0$, то $\begin{Vmatrix} A_r(b_j) \\ A_r^{(1)}(b_j) \\ \vdots \\ A_r^{(k_j-1)}(b_j) \end{Vmatrix} Z_0 = \begin{Vmatrix} F(b_j) \\ F^{(1)}(b_j) \\ \vdots \\ F^{(k_j-1)}(b_j) \end{Vmatrix}$. На підставі того, що $1 \le j \le m$, матриця Z_0 є розв'язком рівняння $M[A_r, b]Z = N[A, r, b]$. Лему доведено.

Нижче вкажемо зв'язок між матрицею $A(x)$ та унітальним багаточленом $b(x) = (x-b_1)^{k_1}(x-b_2)^{k_2}\ldots(x-b_m)^{k_m}$, $b_i \in R$, для яких матричне рівняння $M[A_r, b]Z = N[A, r, b]$ розв'язне.

Лема 3. *Нехай для багаточлена* $b(x) = (x-b_1)^{k_1}(x-b_2)^{k_2}\ldots(x-b_m)^{k_m}$, $b_i \in R$, $\deg b(x) = nr$, *та матриці* $A(x) \in R_n[x]$, $\deg A(x) \ge (n-1)r$, *матричне рівняння* $M[A_r, b]Z = N[A, r, b]$ *розв'язне. Тоді існує унітальна багаточленна матриця* $D(x) = Ix^r - D_1 x^{r-1} - \ldots - D_{r-1}x - D_r$, $D_j \in R_n$, *така, що* $A(x)D(x) = O(\bmod b(x))$.

Доведення. Нехай матриця $Z_0 = \|D_1^T \ldots D_{r-1}^T\; D_r^T\|^T$, $D_j \in R_n$ (T — операція транспонування), — розв'язок рівняння $M[A_r, b]Z = N[A, r, b]$. За цим розв'язком побудуємо матрицю $D(x) = Ix^r - D_1 x^{r-1} - \ldots - D_{r-1}x - D_r$. Поділивши добуток $A(x)D(x)$ на $Ib(x)$ із залишком, отримаємо $A(x)D(x) = b(x)C(x) + Q(x)$, де $Q(x) \in R_n[x]$, $\deg Q(x) < nr$. Оскільки $M[A_r, b]Z_0 = N[A, r, b]$, то з останньої рівності випливає $M[A_r, b] - N[A, r, b] = N[Q, b] = O$, тобто $Q(x) = O(\bmod b(x))$, що неможливо, оскільки $\deg Q(x) < nr$. Отже, $A(x)D(x) = b(x)C(x)$, що і доводить лему.

Наслідок 1. *Нехай для матриці* $A(x) \in R_n[x]$, $\operatorname{rank} A(x) \geq n-1$, *існує факторизація* $A(x) = B(x)C(x)$, *де* $B(x) \in R_n[x]$ — *унітальна багаточленна матриця степеня* $r \geq 1$ *з визначником* $\det B(x) = b(x) = (x-b_1)^{k_1}(x-b_2)^{k_2}\ldots$ $\ldots(x-b_m)^{k_m}$, $b_j \in R$. *Тоді* $\deg A^*(x) \geq (n-1)r$ *і матричне рівняння* $M[A_r^*, b]Z =$ $= N[A^*, r, b]$ *розв'язне.*

Доведення. Оскільки $\operatorname{rank} A(x) \geq n-1$, то з факторизації $A(x) = B(x)C(x)$ отримуємо $A^*(x) = C^*(x)B^*(x) \neq O$. Отже, $A^*(x)B(x) = b(x)C^*(x)$. А оскільки $\deg b(x) = nr$, то з цієї рівності випливає $\deg A^*(x) \geq (n-1)r$. Крім цього, на підставі леми 2 отримуємо розв'язність рівняння $M[A_r^*, b]Z = N[A^*, r, b]$. Наслідок доведено.

Нижче вкажемо умови, за яких для матриці $A(x) \in R_n[x]$, $\operatorname{rank} A(x) \geq n-1$, існує факторизація $A(x) = B(x)C(x)$, де $B(x) \in R_n[x]$ — унітальна багаточленна матриця степеня $r \geq 1$ з визначником $\det B(x) = b(x) = (x-b_1)^{k_1}(x-b_2)^{k_2}\ldots$ $\ldots(x-b_m)^{k_m}$, $b_j \in R$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Пошук таких розкладів матриці $A(x)$ розіб'ємо на частини, задаючи спочатку унітальний багаточлен $b(x) = (x-b_1)^{k_1} \times$ $\times (x-b_2)^{k_2}\ldots(x-b_m)^{k_m}$, $b_j \in R$, $j = 1, 2, \ldots, m$, степеня nr, $r \leq \deg A(x)$, який є дільником визначника матриці $A(x)$, а потім будемо намагатись вказати умови цих зображень матриці $A(x)$. З огляду на наслідок 1 об'єктом нашого дослідження можуть бути лише ті матриці $A(x) \in R_n[x]$, для яких $\deg A^*(x) \geq$ $\geq (n-1)r$.

Теорема 2. *Нехай багаточлен* $b(x) = (x-b_1)^{k_1}(x-b_2)^{k_2}\ldots(x-b_m)^{k_m}$, $b_j \in R$, *степеня* nr *є дільником визначника матриці* $A(x) \in R_n[x]$, $\operatorname{rank} A(x) \geq n-1$, *тобто* $\det A(x) = b(x)c(x)$, $r \leq \deg A(x)$. *Нехай, далі,* $\deg A^*(x) \geq (n-1)r$, *а для кожного спільного кореня* b_l *багаточленів* $b(x)$ *та* $c(x)$ *матриця* $A^*(b_l) \neq$ $\neq O$. *Для матриці* $A(x)$ *існує факторизація* $A(x) = B(x)C(x)$, *де* $B(x) \in R_n[x]$ — *унітальна багаточленна матриця степеня* $r \geq 1$ *з визначником* $\det B(x) =$ $= b(x)$, *тоді і тільки тоді, коли рівняння* $M[A_r^*, b]Z = N[A^*, r, b]$ *розв'язне. Якщо ж дільник* $B(x)$ *існує, то він єдиний із заданим визначником* $b(x)$.

Доведення. *Необхідність* випливає з наслідку 1.

Доведемо *достатність*. Нехай матриця $Z_0 = \| B_1^T \ldots B_{r-1}^T \ B_r^T \|^T$, $B_j \in R_n$, $j =$ $= 1, 2, \ldots, r$ (T — операція транспонування), — розв'язок рівняння $M[A_r^*, b]Z =$ $= N[A^*, r, b]$. Згідно з лемою 2 для матриці $B(x) = Ix^r - B_1x^{r-1} - \ldots - B_{r-1}x - B_r$ виконується рівність $A^*(x)B(x) = b(x)Q(x)$. Нехай P — поле часток кільця R, $R \subseteq P$. Оскільки для кожного спільного кореня b_l багаточленів $b(x)$ та $c(x)$ матриця $A^*(b_l) \neq O$, то для матриці $A(x) \in R_n[x]$ виконується $(b(x), c(x),$ $d_A(x)) = e$, де $d_A(x)$ — н. с. д. мінорів $(n-1)$-го порядку матриці $A(x)$. З огляду на те, що $A(x) = U(x)F_A(x)V(x)$, де $U(x), V(x) \in GL(n, P[x])$, враховуючи теорему 1, матрицю $A(x)$ запишемо у вигляді $A(x) = U(x)F_1(x)F_2(x)V(x)$, де $F_1(x) = \operatorname{diag}(b_1(x), b_2(x), \ldots, b_n(x)) \in R_n[x]$, $b_i(x) \mid b_{i+1}(x)$ і $\det F_1(x) = b(x)$, $F_2(x) = \operatorname{diag}(c_1(x), \ldots, c_{n-1}(x), c_n(x))$, $c_i(x) \mid c_{i+1}(x)$.

Із рівності $A^*(x)B(x) = b(x)G(x)$ отримуємо

$$F_2^*(x)F_1^*(x)U^*(x)B(x) = b(x)S(x). \tag{2}$$

Оскільки $(b_i(x), c_j(x)) = e$ для всіх $1 \le i \le n$ та $1 \le j \le n$, за винятком $i = j = n$, то з рівності (2) випливає $U^*(x)B(x) = \operatorname{diag}(b_1(x), b_2(x), \ldots, b_n(x))\,Q(x)$. Переходячи до визначників в обох частинах цієї рівності та прирівнюючи їх степені, дістаємо $\det B(x) = b(x)$ і $Q(x) \in GL(n, P[x])$. Отже, для матриці $B(x)$ існує зображення $B(x) = U(x)F_1(x)T(x)$, де $T(x) \in GL(n, P[x])$.

Таким чином, для матриці $A(x) \in P_n[x]$ існує зображення у вигляді добутку

$$A(x) = U(x)F_1(x)T(x)T^{-1}(x)F_2(x)V(x) = B(x)C(x),$$

де $C(x) = T^{-1}(x)F_2(x)V(x)$. Оскільки $B(x)$ — унітальна багаточленна матриця степеня r і $(b(x), c(x), d_A(x)) = e$, то на підставі теореми 1 матриця $B(x)$ своїм визначником $b(x)$ визначена однозначно. А оскільки $A(x), B(x) \in R_n[x]$, то з рівності $A(x) = B(x)C(x)$ випливає $C(x) \in R_n[x]$. Отже, для матриці $A(x) \in R_n[x]$ існує факторизація $A(x) = B(x)C(x)$, де $B(x) \in R_n[x]$ — унітальна багаточленна матриця степеня $r \ge 1$ із заданим визначником $\det B(x) = b(x)$, причому $B(x)$ багаточленом $b(x)$ визначено однозначно. Теорему доведено.

Неважко переконатись і в тому, що матриця Z_0 є єдиним розв'язком рівняння $M[A_r^*, b]Z = N[A^*, r, b]$.

Зауважимо, якщо при умовах теореми 2 шуканий унітальний дільник $B(x)$ із заданим визначником $\det B(x) = b(x)$ існує, то неважко переконатися в тому, що матричне рівняння $M[A_r^*, b]Z = N[A^*, r, b]$ має єдиний розв'язок, тобто $\operatorname{rank} M[A_r^*, b]Z = \operatorname{rank}\left\| M[A_r^*, b] \;\; N[A^*, r, b] \right\| = nr$. Для розв'язності цього рівняння можна використати метод, запропонований у роботі [8]. Крім цього, з доведення достатності теореми 2 отримуємо метод побудови шуканого дільника за розв'язком цього рівняння.

Наслідок 2. *Нехай визначник неособливої матриці $A(x) \in R_n[x]$, зображений у вигляді добутку $\det A(x) = b(x)c(x)$, де $b(x) = (x - b_1)^{k_1}(x - b_2)^{k_2} \ldots (x - b_m)^{k_m}$, $b_j \in R$, $j = 1, 2, \ldots, m$, — унітальний багаточлен степеня nr. Якщо $c(b_j) \ne 0$ для всіх $j = 1, 2, \ldots, m$, то для $A(x)$ існує факторизація $A(x) = B(x)C(x)$, де $B(x) \in R_n[x]$ — унітальна багаточленна матриця степеня $r \ge 1$ з визначником $\det B(x) = b(x)$, тоді і тільки тоді, коли рівняння $M[A_r^*, b]Z = N[A^*, r, b]$ розв'язне. Якщо ж шуканий дільник $B(x)$ існує, то він єдиний із заданим визначником $b(x)$.*

Наслідок 3. *Нехай для матриці $A(x) \in R_n[x]$, $\operatorname{rank} A(x) \ge n - 1$, н. с. д. мінорів $(n-1)$-го порядку $A(x)$ над полем часток кільця R $d_A(x) = \mathrm{const} \ne 0$. Нехай, далі, багаточлен $b(x) = (x - b_1)^{k_1}(x - b_2)^{k_2} \ldots (x - b_m)^{k_m}$, $b_j \in R$, $j = 1, 2, \ldots, m$, степеня nr є дільником визначника матриці $A(x)$. Якщо $\deg A^*(x) \ge (n-1)r$, то для матриці $A(x)$ існує факторизація $A(x) = B(x)C(x)$ така, що $B(x) \in R_n[x]$ — унітальна багаточленна матриця степеня $r \ge 1$ з визначником $\det B(x) = b(x)$, тоді і тільки тоді, коли рівняння $M[A_r^*, b]Z = N[A^*, r, b]$ розв'язне. Якщо ж шуканий дільник $B(x)$ існує, то він єдиний із заданим визначником $b(x)$.*

Наступне твердження встановлює необхідні та достатні умови існування унітального дільника із заданими власними значеннями для багаточленної матриці $A(x) \in R_n[x]$, $\operatorname{rank} A(x) \geq n-1$.

Зауваження. *Нехай унітальний багаточлен* $b(x) = (x-b_1)^{k_1}(x-b_2)^{k_2}\ldots\ldots(x-b_m)^{k_m}$, $b_j \in R$, $j = 1, 2, \ldots, m$, *степеня* $nr \geq n$ *є дільником визначника матриці* $A(x) \in R_n[x]$, $\operatorname{rank} A(x) \geq n-1$, *причому* $\deg A^*(x) \geq (n-1)r$. *Для матриці* $A(x)$ *існує факторизація* $A(x) = B(x)C(x)$, *де* $B(x) \in R_n[x]$ — *унітальна багаточленна матриця степеня* r *з визначником* $\det B(x) = b(x)$, *тоді і тільки тоді, коли серед розв'язків рівняння* $M[A_r^*, b]Z = N[A^*, r, b]$ *існує розв'язок* $Z_0 = \begin{Vmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_r \end{Vmatrix}$, $B_i \in R_n$, $i = 1, 2, \ldots, r$, *такий, що матриця* $B(x) = Ix^r - B_1x^{r-1} - \ldots - B_{r-1}x - B_r$ — *лівий дільник матриці* $A(x)$ *і* $\det B(x) = b(x)$.

Зазначимо, якщо при умовах зауваження унітальна багаточленна матриця $B(x) = Ix^r - B_1x^{r-1} - \ldots - B_{r-1}x - B_r$ є лівим дільником матриці $A(x)$, але $\det B(x) \neq b(x)$, то для $A(x)$ існує факторизація $A(x) = B(x)C(x)$.

Одержані результати застосуємо до задачі про виділення унітального дільника з $(n \times (n-1))$-вимірної матриці $A(x)$ над $R[x]$ рангу $n-1$. Нехай $A(x)$ — $(n \times (n-1))$-вимірна матриця з елементами з $R[x]$ рангу $n-1$. Розглянемо матрицю $A_1(x) = \begin{Vmatrix} 0 & \\ \vdots & A(x) \\ 0 & \end{Vmatrix}$. Оскільки $\operatorname{rank} A_1(x) = n-1$, то

$$A_1^*(x) = \begin{Vmatrix} a_1(x) & a_2(x) & \ldots & a_n(x) \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix} \neq O,$$

де $a_j(x) = (-1)^{j+1}m_j(x)$, а $m_j(x)$ — мінор $(n-1)$-го порядку матриці $A(x)$, отриманий із неї викресленням j-го рядка. Тепер матриці $A(x)$ поставимо у відповідність рядок $a(x) = \| a_1(x)\, a_2(x) \ldots a_n(x) \|$. З огляду на те, що множини лівих дільників матриць $A(x)$ та $A_1(x)$ збігаються, враховуючи викладене вище та теорему 2, отримуємо такий наслідок.

Наслідок 4. *Нехай* $A(x)$ — $(n \times (n-1))$-*вимірна матриця з елементами із* $R[x]$ *рангу* $n-1$ *степеня* $s \geq r \geq 1$. *Нехай, далі,* $b(x) = (x-b_1)^{k_1}(x-b_2)^{k_2}\ldots\ldots(x-b_m)^{k_m}$, $b_j \in R$, $j = 1, 2, \ldots, m$, — *багаточлен степеня* nr *такий, що* $\deg a(x) \geq (n-1)r$ *і* $a(b_j) \neq 0$ *для всіх* $j = 1, 2, \ldots, m$. *Для матриці* $A(x)$ *існує зображення у вигляді добутку* $A(x) = B(x)C(x)$, *де* $B(x) \in R_n[x]$ — *унітальна багаточленна матриця степеня* $r \geq 1$ *з визначником* $\det B(x) = b(x)$, *тоді і тільки тоді, коли рівняння* $M[a_r, b]Z = N[a, r, b]$ *розв'язне. Якщо ж дільник* $B(x)$ *існує, то він єдиний із заданим визначником* $b(x)$.

Нехай $R = P$ — поле характеристики нуль. Враховуючи теорему 2 з [2, с. 130] та [9], з наведених вище результатів отримуємо такі наслідки.

Наслідок 5. *Нехай багаточлен* $b(x) = (x-b_1)^{k_1}(x-b_2)^{k_2}\ldots(x-b_m)^{k_m}$, $b_j \in P$, $j = 1, 2, \ldots, m$, *степеня* nr *є дільником визначника матриці* $A(x) \in P_n[x]$, $\operatorname{rank} A(x) \geq n-1$, *тобто* $\det A(x) = b(x)c(x)$. *Нехай, далі,* $\deg A^*(x) \geq (n-1)r$, *а для кожного спільного кореня* b_i *багаточленів* $b(x)$ *та* $c(x)$ *матриця* $A^*(b_i) \neq O$. *Для матриці* $A(x)$ *існує факторизація* $A(x) = B(x)C(x)$, *де* $B(x) \in P_n[x]$ — *унітальна багаточленна матриця степеня* $r \geq 1$ *з визначником* $\det B(x) = b(x)$, *тоді і тільки тоді, коли* $\operatorname{rank} M[A_r^*, b] = nr$. *Якщо ж шуканий дільник* $B(x)$ *існує, то він единий із заданим визначником* $b(x)$.

Наслідок 6. *Нехай* $A(x)$ — $(n \times (n-1))$-*вимірна матриця з елементами з* $P[x]$ *рангу* $n-1$ *степеня* $s \geq r$. *Нехай, далі,* $b(x) = (x-b_1)^{k_1}(x-b_2)^{k_2}\ldots(x-b_m)^{k_m}$, $b_j \in P$, $j = 1, 2, \ldots, m$, — *багаточлен степеня* $nr \geq n$ *такий, що* $\deg a(x) \geq (n-1)r$ *і* $a(b_i) \neq 0$ *для всіх* b_i. *Для* $A(x)$ *існує зображення у вигляді добутку* $A(x) = B(x)C(x)$, *де* $B(x) \in P_n[x]$ — *унітальна багаточленна матриця степеня* $r \geq 1$ *із визначником* $\det B(x) = b(x)$, *тоді і тільки тоді, коли* $\det M[a_r, b] \neq 0$. *Якщо ж шуканий дільник* $B(x)$ *існує, то він единий із заданим визначником* $b(x)$.

1. *Лопатинский Я. Б.* Разложение полиномиальной матрицы на множители // Науч. зап. Львов. политехн. ин-та. Сер. физ.-мат. – 1957. – Вып. 38, № 2. – С. 3–7.
2. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. – Київ: Наук. думка, 1981. – 224 с.
3. *Gohberg I., Lancaster P., Rodman L.* Matrix polynomials. – New York: Acad. Press, 1982. – 409 p.
4. *Прокип В. М.* О мультипликативности канонических диагональных форм матриц // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 7. – С. 60–62.
5. *Newman M.* Integral matrices. – New York: Acad. Press, 1972. – 224 p.
6. *Родосский К. А.* Алгоритм Евклида. – М.: Наука, 1988. – 240 с.
7. *Прокіп В. М.* Про мультиплікативність канонічних діагональних форм матриць над областю головних ідеалів. II // Укр. мат. журн. – 2001. – 53, № 2. – С. 274–277.
8. *Прокіп В. М.* Про розв'язність лінійних матричних рівнянь над факторіальною областю // Вісн. ун-ту „Львів. політехніка". Прикл. математика. – 1998. – № 346. – С. 68–72.
9. *Прокіп В. М., Мельник О. М., Кузаконь В. М.* Про один клас дільників багаточленних матриць над полем // Вісн. Львів. нац. ун-ту. Прикл. математика та інформатика. – 2002. – Вип. 5. – С. 39–44.

Одержано 10.02.2003